

EXAMEN FUNCIONES 1

1.- Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = \frac{x-1}{3+x}$; $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

- Calcula los dominios de f , g y h .
- Calcula la función inversa de g .
- Calcula $f \circ g$, $g \circ f$, $h \circ f$ y sus dominios

2.- Calcula los siguientes límites (en caso de no existir, explica por qué):

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{\sqrt{x+4}-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{3x+1} - \frac{x^3-x^2+1}{3x^2} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2-4x+6}{x-5}}$

3.- Encuentra razonadamente la expresión analítica de una función racional que cumpla:

- Tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$
- Tiene asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$
- Tiene asíntota horizontal en $y = 2$
- Haz una representación gráfica aproximada de dicha función.

4.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x+3} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ mx-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y halla m para que sea continua en $x = 1$

5.- Representa gráficamente la función $f(x) = \left| \frac{x+3}{x-2} \right|$. Halla su dominio y su recorrido y exprésala como función a trozos.

PUNTUACIÓN: 2 PUNTOS CADA EJERCICIO

SOLUCIONES

1.- Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = \frac{x-1}{3+x}$; $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

a) dominios de f, g y h.

$$f(x) = \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = [2, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{x-1}{3+x} \rightarrow 3+x = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \text{Dom}(h) = (0, +\infty)$$

b) función inversa de g: $y = \frac{x-1}{3+x} \rightarrow x = \frac{y-1}{3+y} \rightarrow 3x + xy = y-1 \rightarrow 3x+1 = y-xy$

$$y(1-x) = 3x+1 \rightarrow y = \frac{3x+1}{1-x} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-x}$$

$$c) (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left[\frac{x-1}{3+x}\right] = \sqrt{\frac{x-1}{3+x} - 2} = \sqrt{\frac{x-1-6-2x}{3+x}} = \sqrt{\frac{-x-7}{3+x}}$$

$$\frac{-(x+7)}{3+x} \geq 0 \rightarrow \frac{x+7}{3+x} \leq 0 \rightarrow$$



$$\text{Dom}(f \circ g) = [-7, -3)$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{x-2}] = \frac{\sqrt{x-2}-1}{3+\sqrt{x-2}} \rightarrow \text{Dom}(g \circ f) = [2, +\infty)$$

$$(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(\sqrt{x-2}) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) \rightarrow \text{Dom}(h \circ f) = (2, +\infty)$$

$$2.- a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x-15}{\sqrt{x+4}-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x-15)(\sqrt{x+4}+3)}{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(3x-15)(\sqrt{x+4}+3)}{x+4-9} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} 3(\sqrt{x+4}+3) = 18$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{3x+1} - \frac{x^3-x^2+1}{3x^2} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x^2-1)3x^2}{3x+1} - \frac{(x^3-x^2+1)(3x+1)}{3x^2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^4-3x^2-3x^4+3x^3-3x-x^3+x^2-1}{9x^3+3x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3-2x^2-3x-1}{9x^3+3x^2} \right) = \frac{2}{9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}} = (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left[\frac{1}{x-2} - 1 \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \frac{1-x+2}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{(x-3)(x-2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{x-2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2-4x+6}{x-5}} = \left(\sqrt{\frac{11}{0}} \right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{\frac{x^2-4x+6}{x-5}} = \sqrt{\frac{11}{0^-}} \rightarrow \text{no existe} \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{\frac{x^2-4x+6}{x-5}} = \sqrt{\frac{11}{0^+}} = +\infty \end{cases}$$

No existe

límite

3.- a) Discontinuidad evitable en $x = 3$

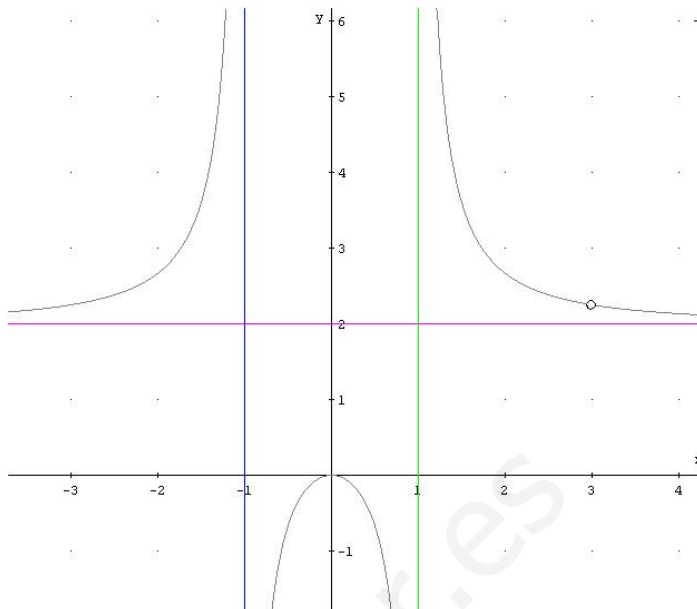
$$\rightarrow \frac{(x-3)}{(x-3)}$$

A.V. en $x = 1$ y $x = -1$

$$\rightarrow \frac{(x-3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$

A.H. en $y = 2$

$$\rightarrow \frac{2(x-3)x^2}{(x-3)(x-1)(x+1)}$$



$$4.- f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x+3} & \text{si } x \leq -1 \rightarrow \text{continua en } (-\infty, -3) \cup (-3, -1), \text{ racional} \\ \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \rightarrow \text{continua en } (-1, 1), \text{ racional} \\ mx - 2 & \text{si } x \geq 1 \rightarrow \text{continua en } (1, +\infty) \end{cases}$$

Habrá que estudiar la continuidad en $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$

En $x = -3$

$$f(-3) = \frac{-12}{0} \text{ no existe} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x}{x+3} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{4x}{x+3} = \frac{-12}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{4x}{x+3} = \frac{-12}{0^+} = -\infty \end{cases} \text{ tenemos una}$$

discontinuidad de salto infinito, es decir una asintota vertical de ramas divergentes

En $x = -1$

$$f(-1) = \frac{-4}{2} = -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x}{x+3} = \frac{-4}{2} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{cases} \text{ tenemos una}$$

discontinuidad de salto infinito en $x = -1$

En $x = 1$

$$f(1) = m - 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx - 2) = m - 2 \end{cases}$$

$$\text{para que sea continua en } x = 1 \text{ tiene que ser } m - 2 = \frac{3}{2} \Rightarrow m = 2 + \frac{3}{2} \rightarrow m = \frac{7}{2}$$

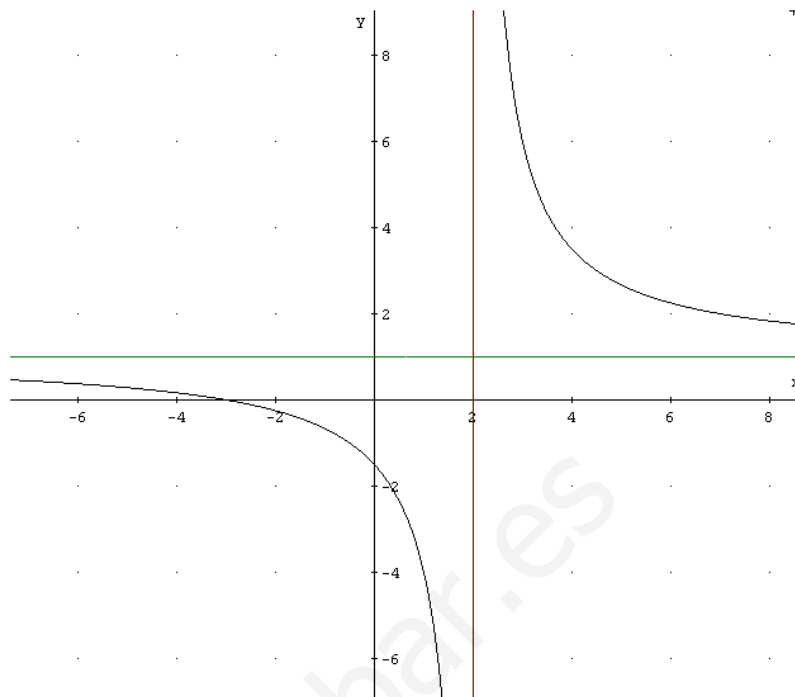
5.- $f(x) = \left| \frac{x+3}{x-2} \right|$ empezamos

representando gráficamente

la hipérbola $y = \frac{x+3}{x-2}$

que tiene la asíntota vertical en $x = 2$

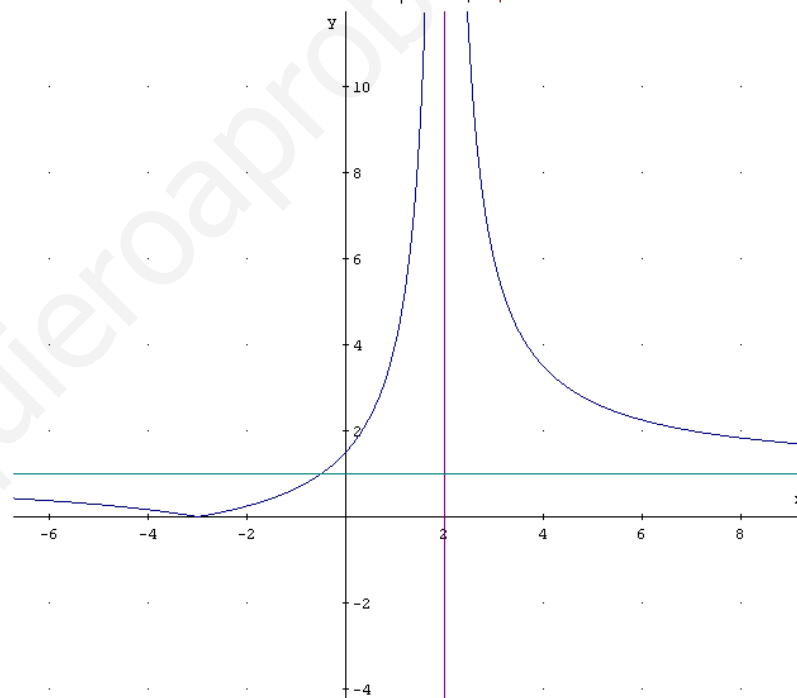
y la asíntota horizontal en $y = 1$,
dibujamos su gráfica



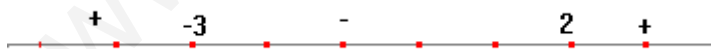
y “pasamos” la parte negativa (debajo del eje OX) a positiva (al hacer el valor absoluto)

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

$\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$



$\frac{x+3}{x-2} > 0$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{x-2} & \text{si } x < -3 \\ -\frac{x+3}{x-2} & \text{si } -3 \leq x < 2 \\ \frac{x+3}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$