Matemáticas 1 CCSSS Santander: **2017-03-31**

Funciones: operaciones, exponenciales, logaritmos, límites y continuidad

Apellidos: **Nombre:** **Grupo:**

¡SE DEBEN JUSTIFICAR TODOS LOS PASOS Y SIMPLIFICAR! TODO EJERCICIO ESCRITO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

1.- **(20 puntos)** Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\sqrt{x+1}$ y $h(x)=2^{x+1}$

a) Demostrar que f y g son inversas.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1=x+1-1=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2-1+1}=\sqrt{x^2}=x$$

b) Hallar $(h\circ g)(3)$ $=h(g(3))=h\left(\sqrt{3+1}\right)=h(2)=2^{2+1}=8$

$(f\circ h)(-1)$ $=f(h(-1))=f\left(2^{o}\right)=f(1)=0$

2.- **(10 puntos)** La población de una ciudad es de 2 500 000 habitantes, aumenta a un ritmo anual del 8 por ciento. Calcular el número de habitantes de la ciudad dentro de 50 años . ¿Cuántos años tardará en duplicarse la población?

$$P=2500000\cdot 1{,}08^t$$

$$para\ \ t=50\Rightarrow P=2500000\cdot 1{,}08^{50}=117254031{,}3\simeq 117\,254\,031\ habi\tan tes$$

$$5000000=2500000\cdot 1{,}08^t\Rightarrow 2=1{,}08^t\Rightarrow t=\frac{\ln 2}{\ln 1{,}08}\approx 9\ años$$

3.- **(40 puntos)** Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{1}}{1}=1$

b) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x}=\left(\dfrac{0}{0}\,Ind.\right)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}}=\dfrac{3-2}{3}=\dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-4x^2-12}{2-3x^3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\,Ind.\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3}{-3x^3}=-\dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{6\sqrt{x+3}}=\left(\dfrac{0}{0}\,Ind.\right)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-3)\cancel{(x+3)}\sqrt{x+3}}{6\cancel{\sqrt{x+3}\sqrt{x+3}}}=\dfrac{0}{6}=0$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4-5x^3-1}{x^3+12}\underset{C.V.\,t=-x}{=}\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^4+5t^3-1}{-t^3+12}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\,Ind.\right)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^4}{-t^3}=\lim\limits_{t\to\infty}-t=-\infty$

f) $\lim\limits_{x\to 2}(5x-6)^{x-2}=(10-6)^0=4^0=1$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x}{x+1}-\dfrac{2x^2}{x-1}\right)=(\infty-\infty\,Ind.)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(2x^2-x)(x-1)-2x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{-5x^2+x}{x^2-1}\right)=$

$=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\,Ind.\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=-5$

h) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x-3}-x\right)$ $=\left(\infty-\infty\, Ind.\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x-3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5x-3}+x\right)}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-3-x^2}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{\sqrt{x^2+5x-3}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty} Ind.\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2}+x}=\frac{5}{2}$$

4.- **(20 puntos)** Estudiar la continuidad de la función y clasificar las discontinuidades si existen:

a) $f(x)=\frac{x^2-1}{2x+2}$

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}\Rightarrow$ como es una función racional es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$

$x=-1\Rightarrow\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{2(x+1)}=\left(\frac{0}{0} Ind.\right)=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{2\cancel{(x+1)}}=\frac{-2}{2}=-1$ y $\nexists f(-1)\Rightarrow$ discontinuidad evitable.

b) $f(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x} & si\ x<-2\\ 5-2x & si\ x\geq-2\end{cases}$

⊙ $y=\frac{x+1}{x}$ es continua en $\mathbb{R}$-$\{0\}$ y por tanto continua en $x<-2$

⊙ $y=5-2x$ es continua en $\mathbb{R}$ y por tanto en $x>-2$

⊙ $x=-2$ $\left.\begin{array}{l}\to\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}5-2x=9\\ \to\lim_{x\to-2^-}f(x)=\lim_{x\to-2^-}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow$ discontinuidad no evitable de salto finito.

y=f(x) es continua en $\mathbb{R}-\{-2\}$

5.- **(10 puntos)** Hallar el valor del parámetro "a" para que la $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-1 & si\ x\leq1\\ x+1 & si\ x>1\end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

⊙ $y=x^2+ax-1$ y $y=2^x$ son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

⊙ x=1 $\left.\begin{array}{l}\to\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}2^x=2\\ \to\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}x^2+ax-1=a\\ \to f(1)=a\end{array}\right\}\Rightarrow a=2$

para a=2 la función es continua en todo $\mathbb{R}$

TODO EJERCICIO A LÁPIZ NO SERÁ EVALUADO

A.G.Onandía