1. Calcula los siguientes límites (caso de que el resultado sea ∞ indicar si es $+\infty$ o $-\infty$). **[2 puntos: 0,5 puntos por apartado]**

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-}{-x^2+x+1}$ **; b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2x^3+x\quad -x+}{x^2-2}$ **; c)** $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^3-x+2x\quad -8}{4x^3-5x\quad +6x-7}$ **; d)** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x\quad -x-}{x^3+x\quad -8x-12}$

2. Dada la función $y=\dfrac{x^3-8}{x^2+\quad -2}$ calcular:

   a) Dominio. **[0,5 puntos]**

   b) Asíntotas, tanto verticales como horizontales. Si tiene asíntotas verticales hallar la tendencia por la izquierda y por la derecha de las mismas. **[1,5 puntos: 1 punto las verticales y tendencias; 0,5 puntos las horizontales]**

   c) Puntos de corte con el eje *X* y con el eje *Y*. **[1 punto: 0,6 puntos los del eje *X*; 0,4 puntos el del eje *Y*]**

   d) Representación gráfica aproximada. **[1 punto]**

3. Dada la siguiente función definida por trozos:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si} \quad \leq -1 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad -1<x<1 \\ x^2 \quad 2x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

   a) Estudiar la continuidad en los puntos $x=-1$ y $x=1$. Caso de que sea continua explicar claramente por qué y caso de que no sea continua decir el tipo de discontinuidad existente. **[2 puntos]**

   b) Realiza una representación gráfica aproximada de la función. **[1 punto]**

4. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas. **[1 punto; 0,5 puntos por apartado]**

   a) $\log x=\dfrac{1}{2}\log(\quad 2)$

   b) $\log\sqrt{x}=1-\log\sqrt{3x+5}$

① a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{-x^2+x+1} = \dfrac{0}{-5} = \underline{\underline{0}}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-2x^3+x^2-x+3}{x^2-2x+1} = \left[\dfrac{1}{0}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x\to 1^- \\ +\infty & \text{si } x \to 1^+ \end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^3-x+2x^4-8}{4x^3-5x^4+6x-7} = \dfrac{2}{-5} = \underline{\underline{-\dfrac{2}{5}}}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+x^2-8x-12} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+1)(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+2)^2} =$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-3)(x+2)} = \left[\dfrac{3}{0}\right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x\to -2^- \\ -\infty & \text{si } x\to -2^+ \end{cases}$

② a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$
ya que las soluciones de
$x^2+x-2=0$ son $x_1=-2$, $x_2=1$.

b) Verticales

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3-8}{x^2+x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to -2^- \\ +\infty & \text{si } x\to -2^+ \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x=-2}$ es A.V

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-8}{x^2+x-2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x\to 1^- \\ -\infty & \text{si } x\to 1^+ \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$ es A.V.

Horizontales

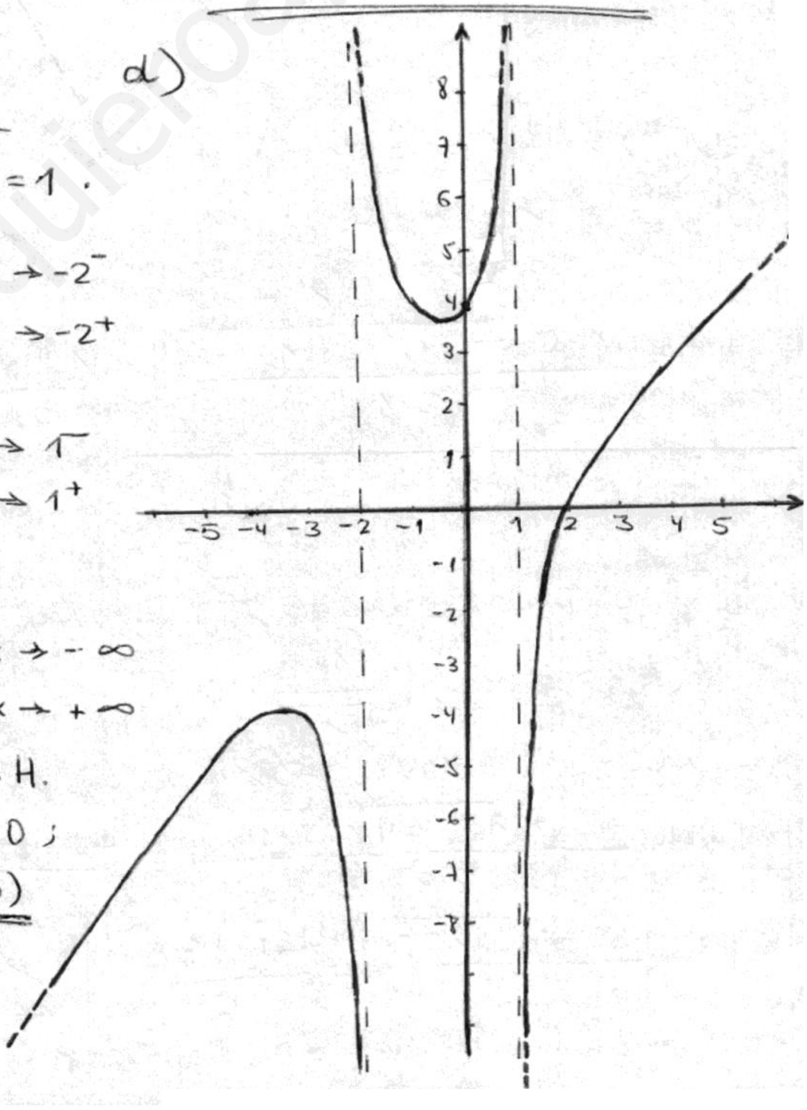
$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-\infty}{x^2+x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x\to -\infty \\ +\infty & \text{si } x\to +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ la función no tiene A.H.

c) Eje X. $y=0$; $x^3-8=0$;
$x^3=8$; $x=\sqrt[3]{8}=2 \Rightarrow \underline{\underline{(2,0)}}$

Eje Y. $x=0 \Rightarrow y=4$
$\Rightarrow \underline{\underline{(0,4)}}$

d)



③ $\boxed{x=-1}$

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1} (2x+3) = 1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x-2} = \frac{-1}{3}$ $\Bigg\}\Rightarrow$

Como los límites laterales son distintos, en $x=-1$, no es continua. Hay una discontinuidad de salto finito.

$\boxed{x=1}$

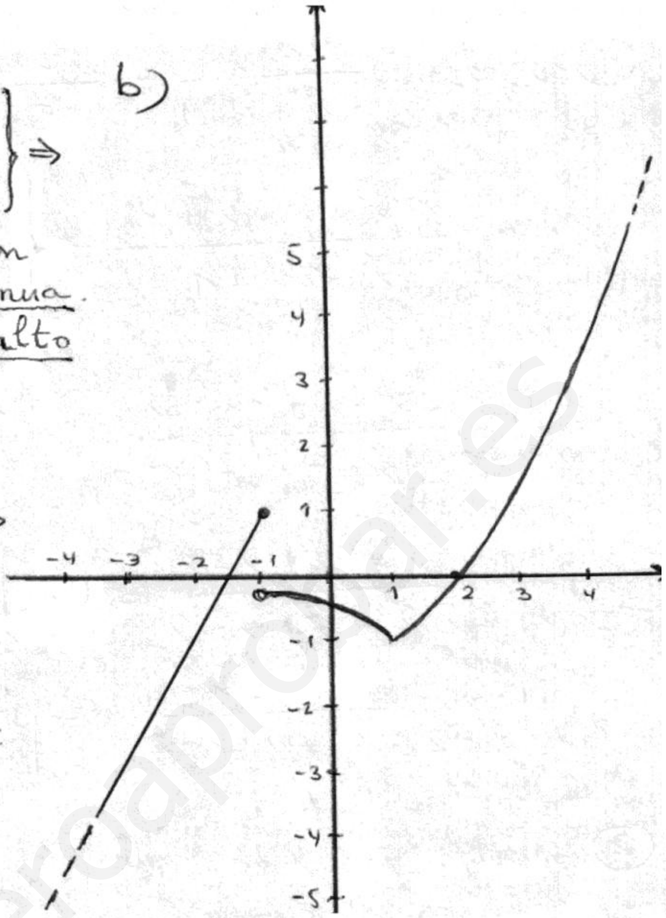
$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = -1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} (x^2-2x) = -1$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\lim_{x\to 1} f(x) = -1 = f(1)$

Por tanto f es continua en $x=1$.

b)



④ a) $\log x = \frac{1}{2}\log(x+2)$;

$2\log x = \log(x+2)$; $\log x^2 = \log(x+2)$;

$x^2 = x+2$; $x^2 - x - 2 = 0$;

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

La solución $x_2 = -1$ hay que descartarla porque $\log x$ no tiene sentido si x es negativo.

b) $\log\sqrt{x} = 1 - \log\sqrt{3x+5}$; $\log\sqrt{x} = \log 10 - \log\sqrt{3x+5}$;

$\log\sqrt{x} = \log\frac{10}{\sqrt{3x+5}}$; $\sqrt{x} = \frac{10}{\sqrt{3x+5}}$; $x = \frac{100}{3x+5}$;

$x(3x+5) = 100$; $3x^2 + 5x - 100 = 0$;

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 3\cdot(-100)}}{2\cdot 3} = \frac{-5\pm\sqrt{25+1200}}{6} =$$

$$= \frac{-5\pm\sqrt{1225}}{6} = \frac{-5\pm 35}{6} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-40}{6} = \frac{-20}{3} \end{cases}$$

(la 2ª solución hay que descartarla)