1. Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en los puntos $x=-2$, $x=1$ y $x=3$. Donde no sea continua decir el tipo de discontinuidad. Si alguna de las discontinuidades es de salto indicar la longitud del mismo. **(3 puntos: 1 por el estudio de la continuidad en cada uno de los puntos)**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+}{x-1} & \text{si} \quad x<-2 \\ -2x-3 & \text{si} \quad -2\le \quad <1 \\ 3 & \text{si} \quad x \quad 1 \\ x^2+x-7 & \text{si} \quad 1<x\le 3 \\ \dfrac{5x+}{3x-} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

2. Calcula los siguientes límites. En los apartados. En los apartados **a)** y **b)** explica razonadamente por qué el resultado es el que has obtenido. **(2 puntos; 0,5 los apartados a) y b) y 1 punto el apartado c)).**

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-3x^3+6x \quad -2x+1}{-2x^2+ \quad -}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-x^2-4x \quad +1}{- \quad x^2+ \quad -1}$

c) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{-2x^3-3 \quad -4}{2x^2+ \quad -}$

3. Halla las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones y sitúa la curva respecto a ellas. Si alguna de las funciones no tuviera asíntotas horizontales sitúa la curva cuando x tienda a $+\infty$ y a $-\infty$ **(3 puntos; 1,5 por apartado)**

a) $f(x)=\dfrac{2x^2-}{x^2- \quad -6}$

b) $g(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

4. Dada la función $f(x)=\dfrac{-x^2+4}{x^2+2}$, hallar: **(2 puntos: 0,5 puntos por apartado)**

a) Asíntotas verticales.
b) Asíntotas horizontales.
c) Puntos de corte con los ejes.
d) Representación gráfica aproximada.

① $\underline{\underline{x=-2}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{-3}{-3} = 1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (-2x-3) = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = 1. \text{ Además}$$

$f(-2) = 1$. Entonces $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f$ es continua en $x=-2$.

$\underline{\underline{x=1}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (-2x-3) = -5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+x-7) = -5\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = -5.$$

Sin embargo $f(1) = 3$. Entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$. Por tanto hay una discontinuidad evitable en $x=1$.

$\underline{\underline{x=3}}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2+x-7) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{5x+1}{3x-5} = \dfrac{16}{4} = 4\end{array}\right\} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x\to 3} f(x)$$

porque los límites laterales son distintos. Discontinuidad de salto finito en $x=3$. Longitud del salto: $L = |l_1 - l_2| = |5-4| = \underline{\underline{1}}$.

② a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x^3+6x^2-2x+1}{-2x^2+x-1} = -\infty$ (porque grado del numerador es mayor que el grado del denominador; luego se estudia el signo de los monomios de mayor grado).

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x-x^2-4x^3+1}{2x^2+2x^3-3x+2} = -2$ (porque cuando los grados del numerador y denominador son iguales se dividen los coeficientes líderes).

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x^3-3x^2-4}{2x^2+x-6} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = (\text{RUFFINI}) = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(-2x^2+x-2)}{(x+2)(2x-3)} =$

$= \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2x^2+x-2}{2x-3} = \dfrac{-12}{-7} = \underline{\underline{\dfrac{12}{7}}}$

③ a) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-x-6}$

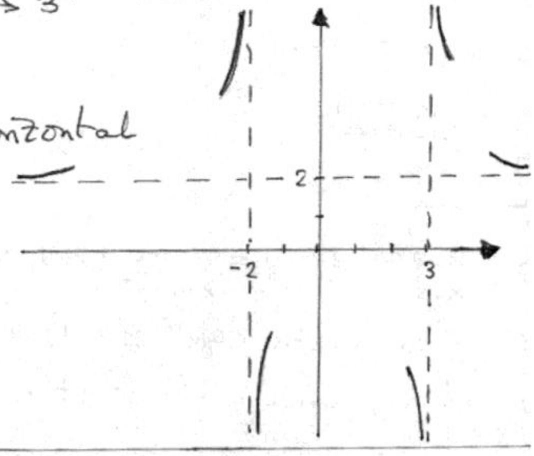
<u>VERTICALES</u>: $x^2-x-6=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2-1}{x^2-x-6} = \left[\dfrac{7}{0}\right] = \infty = \begin{cases} +\infty \text{ si } x\to -2^- \\ -\infty \text{ si } x\to -2^+ \end{cases}$ $\underline{\underline{x=-2}}$ Asíntota vertical

$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-1}{x^2-x-6} = \left[\dfrac{17}{0}\right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x\to 3^- \\ +\infty \text{ si } x\to 3^+ \end{cases}$ $\underline{\underline{x=3}}$ Asíntota vertical

<u>HORIZONTALES</u>

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2-x-6} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{y=2}}$ Asíntota horizontal



b) $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

<u>VERTICALES</u>: $x^2-4=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \left[\dfrac{-8}{0}\right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x\to -2^- \\ +\infty \text{ si } x\to -2^+ \end{cases}$

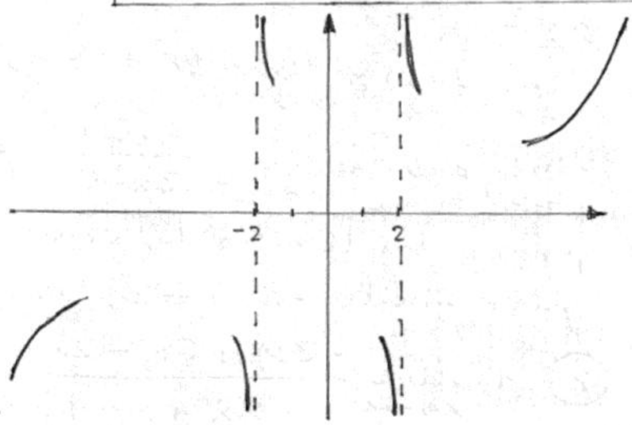
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \left[\dfrac{8}{0}\right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x\to 2^- \\ +\infty \text{ si } x\to 2^+ \end{cases}$

Por tanto $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

<u>HORIZONTALES</u>

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3}{x^2-4} = \begin{cases} +\infty \text{ si } x\to +\infty \\ -\infty \text{ si } x\to -\infty \end{cases}$

Por tanto no tiene asíntotas horizontales.



④ <u>VERTICALES</u>:

$x^2+2x-3=0 \begin{cases} x=-3 \\ x=1 \end{cases}$ > Asíntotas verticales

$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = \left[\dfrac{-5}{0}\right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x\to -3^- \\ +\infty \text{ si } x\to -3^+ \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = \left[\dfrac{3}{0}\right] = \infty = \begin{cases} -\infty \text{ si } x\to 1^- \\ +\infty \text{ si } x\to 1^+ \end{cases}$

<u>HORIZONTALES</u>

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = -1 \Rightarrow y=-1$ Asíntota horizontal

<u>PUNTOS DE CORTE</u>

* Eje Y: $x=0 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}$: $\underline{\underline{\left(0, -\frac{4}{3}\right)}}$
* Eje X: $y=0 \Rightarrow \dfrac{-x^2+4}{x^2+2x-3} = 0 \Rightarrow -x^2+4=0$

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$: $\underline{\underline{(2,0)}}, \underline{\underline{(-2,0)}}$