I ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Página 100

1 **De entre las ecuaciones siguientes:**

$\mathbf{3x^2 + 5x - 2 = 0}$

$\mathbf{2x^2 - 4 = 0}$

$\mathbf{x^2 + x - 1 = 0}$

$\mathbf{9x^2 + 4 = 0}$

a) Señala las que no tienen soluciones en $\mathbb{Q}$.

b) ¿Cuáles tienen solución en $\mathbb{R}$?

Resolución

Resolvemos las ecuaciones:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0 \quad \begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$2x^2 - 4 = 0 \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \quad \begin{cases} x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$9x^2 + 4 = 0$ no tiene solución.

a) No tienen solución en $\mathbb{Q}$: $2x^2 - 4 = 0$; $x^2 + x - 1 = 0$; $9x^2 + 4 = 0$

b) Todas tienen solución en $\mathbb{R}$ salvo $9x^2 + 4 = 0$.

2 **Compara $\sqrt[4]{5}$ y $\sqrt[12]{120}$ reduciéndolas a índice común.**

Resolución

Como $\sqrt[4]{5} = \sqrt[3 \cdot 4]{5^3} = \sqrt[12]{125}$, resulta que:

$\sqrt[4]{5} > \sqrt[12]{120}$

3 **Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:**

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $\dfrac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Resolución

a) $a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = a\sqrt{a}$

b) $\dfrac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \dfrac{30\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 30$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} - \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6} - \dfrac{2\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{12} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} =$

$= \dfrac{5\sqrt{6}}{6} - \dfrac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} =$

$= \dfrac{5\sqrt{6} - \sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{6}$

4 **Si** $\boldsymbol{\log k = -1{,}3}$ **calcula el valor de las siguientes expresiones:**

a) $\log k^3$ **b)** $\log \dfrac{1}{k}$ **c)** $\log \dfrac{k}{100}$

Resolución

a) $\log k^3 = 3 \log k = 3(-1{,}3) = -3{,}9$

b) $\log \dfrac{1}{k} = \log 1 - \log k = 0 - (-1{,}3) = 1{,}3$

c) $\log \dfrac{k}{100} = \log k - \log 100 = -1{,}3 - 2 = -3{,}3$

5 **Halla** $\boldsymbol{x}$ **en cada caso:**

a) $|7 - 3x| = 2$ **b)** $|x^2 - 3| = 1$

Resolución

a) $|7 - 3x| = 2$

- $7 - 3x = 2 \rightarrow x = \dfrac{5}{3}$
- $7 - 3x = -2 \rightarrow x = 3$

Soluciones: $x_1 = \dfrac{5}{3};\ x_2 = 3$

b) $|x^2 - 3| = 1 \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \quad \rightarrow \; x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ x^2 - 3 = -1 \;\rightarrow \; x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \sqrt{2}$; $x_4 = -\sqrt{2}$

6 **Calcula x para que $2^{x+1} = 3^x$.**

Resolución

$2^{x+1} = 3^x \;\rightarrow\; (x + 1)\,log\ 2 = x\ log\ 3 \;\rightarrow\; x\ log\ 2 - x\ log\ 3 = -log\ 2$

$x(log\ 2 - log\ 3) = -log\ 2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-log\ 2}{log\ 2 - log\ 3} = 1{,}71$

Solución: $x = 1{,}71$

7 **El precio de la leche subió un 15% en enero y un 18% en febrero, y bajó un 20% en marzo. ¿Cuál ha sido la subida total en esos tres meses?**

Resolución

Si el precio de la leche es p, tenemos los siguientes aumentos y disminuciones:

enero $\rightarrow p \cdot 1{,}15$

febrero $\rightarrow (p \cdot 1{,}15) \cdot 1{,}18$

marzo $\rightarrow (p \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}18) \cdot 0{,}80$

El precio final es $p \cdot (1{,}15 \cdot 1{,}18 \cdot 0{,}80) = p \cdot 1{,}0856$.

Por tanto, la subida total ha sido de un 8,56%.

8 **Depositamos un capital de 5 000 € al 6% anual durante 3 años y 3 meses. Calcula en cuánto se transforma si el periodo de capitalización es:**

a) Trimestral

b) Mensual

c) Di, en cada caso, cuál es la T.A.E.

Resolución

a) Un 6% anual significa un $\dfrac{6}{4} = 1{,}5\%$ trimestral.

3 años y 3 meses son 13 trimestres. Así,

$$C_F = 5\,000\left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^{13} = 6\,067{,}76 \text{ €}$$

b) Un 6% anual significa un $\frac{6}{12} = 0{,}5\%$ mensual.

3 años y 3 meses son 39 meses. Así,

$$C_F = 5\,000\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^{39} = 6\,073{,}60 \text{ €}$$

c) • La T.A.E. correspondiente a un 6% anual con períodos de capitalización trimestrales, es:

6% anual $\rightarrow \frac{6}{4} = 1{,}5\%$ trimestral $\rightarrow$ 1,015 trimestral

Como son 4 trimestres, $1{,}015^4 = 1{,}0614$.

Por tanto, la T.A.E. es del 6,14%.

• La T.A.E. correspondiente a un 6% anual con períodos de capitalización mensuales, es:

6% anual $\rightarrow \frac{6}{12} = 0{,}5\%$ mensual $\rightarrow$ 1,005 mensual

Como son 12 meses, $1{,}005^{12} = 1{,}0617$.

Por tanto, la T.A.E. es del 6,17%.

9 Recibimos un préstamo de 10 000 € al 13% anual, que debíamos devolver en un solo pago. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido si al liquidarlo pagamos 16 304,7 €?

Resolución

Si lo pagáramos en 1 año, se pagaría:

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{13}{100}\right) = 10\,000 \cdot 1{,}13$$

Si fuera en dos años:

$$10\,000 \cdot 1{,}13^2$$

Por tanto, para saber cuántos años hemos tardado en liquidar la deuda, tenemos que resolver la ecuación:

$$10\,000 \cdot 1{,}13^a = 16\,304{,}7 \;\rightarrow\; 1{,}13^a = \frac{16\,304{,}7}{10\,000} = 1{,}63047 \;\rightarrow\; a = \frac{\log 1{,}63047}{\log 1{,}13} = 4$$

Así, hemos tardado 4 años en devolver el crédito de 10 000 € al banco.

10 Un banco nos presta 30 000 € al 10% anual, que hemos de devolver en 3 años mediante pagos mensuales. ¿Cuánto tendremos que pagar cada mes?

Resolución

Debemos pagar 30 000 € en 36 meses, a un 10% anual.

$$10\%\ \text{anual} \rightarrow \frac{10}{12} = 0{,}83\%\ \text{mensual}$$

$$30\,000 \xrightarrow[\text{al } 0{,}83\%]{\text{en 36 meses}} 30\,000 \cdot 1{,}0083^{36} = 40\,397{,}35$$

Ahora:

$$m(1 + 1{,}0083 + 1{,}0083^2 + \ldots + 1{,}0083^{35}) = m \cdot \frac{1{,}0083^{36} - 1}{1{,}0083 - 1} = 41{,}7564m$$

Así:

$$41{,}7564m = 40\,397{,}35 \rightarrow m = \frac{40\,397{,}35}{41{,}7564} = 967{,}45$$

Por tanto, cada una de las mensualidades será de 967,45 €.

11 Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^3 - 9x$

b) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

Resolución

a) $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x + 3)(x - 3)$

b) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = x^2(3x^3 - 4x^2 - 5x + 2) = x^2(x + 1)(x - 2)(3x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & -5 & 2 \\
-1 & & -3 & 7 & -2 \\
\hline
 & 3 & -7 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 6 & -2 & \\
\hline
 & 3 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

12 Opera y simplifica:

$$\frac{(3x^2 + 4x)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Resolución

$$\frac{(3x^2 + 4x)(x^2 + 1) - (x^3 + 2x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 + 4x^3 + 4x - 2x^4 - 4x^3 - 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

13 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(x+4)^2-7=(2x+3)^2+2x$

b) $2x^4-3x^2-2=0$

c) $\sqrt{2x+3}-2x=x-6$

d) $3x^5-4x^4-5x^3+2x^2=0$

Resolución

a) $x^2+16+8x-7=4x^2+9+12x+2x$

$$3x^2+6x=0 \rightarrow 3x(x+2)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array} \right.$$

Soluciones: $x_1=0,\ x_2=-2$

b) Hacemos el cambio $x^2=z \rightarrow 2z^2-3z-2=0 \rightarrow$

$$\rightarrow z=\frac{3\pm 5}{4} \left\langle \begin{array}{l} z=2 \\ z=-\dfrac{1}{2} \ \text{No vale} \end{array} \right.$$

$$\text{Si } z=2 \left\langle \begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Soluciones: $x_1=\sqrt{2},\ x_2=-\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2x+3}-2x=x-6$

$$\sqrt{2x+3}=x-6+2x \rightarrow \left(\sqrt{2x+3}\right)^2=(3x-6)^2$$

$$2x+3=9x^2+36-36x \rightarrow 9x^2-38x+33=0$$

$$x=\frac{38\pm 16}{18} \left\langle \begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{11}{9} \end{array} \right.$$

Comprobamos las soluciones:

$$x=3 \rightarrow \sqrt{2\cdot 3+3}-2\cdot 3=3-6 \ \text{ Vale}$$

$$x=\frac{11}{9} \rightarrow \sqrt{2\cdot\frac{11}{9}+3}-2\cdot\frac{11}{9}=\frac{11}{9}-6 \rightarrow \frac{7}{3}-\frac{22}{9}\neq-\frac{43}{9} \ \text{ No vale}$$

La solución es $x=3$.

d) $3x^5-4x^4-5x^3+2x^2 \overset{(*)}{=} x^2(x+1)(x-2)(3x-1)=0$

(*) Ejercicio 11 b)

Soluciones: $x_1=0;\ x_2=-1;\ x_3=2;\ x_4=\dfrac{1}{3}$

14 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \le 9 \end{cases}$

Resolución

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ y = 3 - x \\ \to\ x(3 - x) + x = 0\ \to\ 3x - x^2 + x = 0 \end{array}$

$-x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x_1 = 0\ \to\ y_1 = 3 \\ x_2 = 4\ \to\ y_2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: $(0, 3)$ y $(4, -1)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \le 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ x > 2 \\ \to\ 2x \le 10\ \to\ x \le 5 \end{array}$

Soluciones: $x \in (2, 5]$

15 **Opera y simplifica:**

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x}\right) - (x^2 - 3x)$$

Resolución

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x}\right) - (x^2 - 3x) =$$

$$= \frac{(x^2 - 4)(x^3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 2x)} - (x^2 - 3x) = \frac{(x + 2)(x - 2)x(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)x(x + 2)} - (x^2 - 3x) =$$

$$= (x - 2)(x - 1) - (x^2 - 3x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x = 2$$

16 **Resuelve:**

a) $\dfrac{7 - x}{x^2 + 4x + 4} + \dfrac{x}{x + 2} = 1$ b) $3^{x^2 - 2} = \dfrac{1}{3}$ c) $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x + 1} + 16 = 0$

Resolución

a) $\dfrac{7 - x}{(x + 2)^2} + \dfrac{x}{x + 2} = 1\ \to\ \dfrac{7 - x + x(x + 2)}{(x + 2)^2} = 1\ \to$

$\to\ 7 - x + x^2 + 2x = x^2 + 4x + 4\ \to$

$\to\ 3x - 3 = 0\ \to\ x = 1$

Solución: $x = 1$

b) $3^{x^2-2} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow x^2 - 2 = -1 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1, \; x_2 = -1$

c) $(4^x)^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4 + 16 = 0 \xrightarrow[4^x = t]{\text{cambio}} t^2 - 8t + 16 = 0 \rightarrow (t-4)^2 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow t = 4 \rightarrow 4^x = 4 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$

17 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x - 4y = 5} \\ \boldsymbol{2^{x-6} \cdot 2^y = 16} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + z = 1} \\ \boldsymbol{-2x + y - z = -5} \\ \boldsymbol{3x - y + 3z = 10} \end{cases}$

Resolución

a) $\left.\begin{array}{l} x - 4y = 5 \\ 2^{x-6} \cdot 2^y = 16 \end{array}\right\} \rightarrow 2^{x-6} \cdot 2^y = 2^4 \rightarrow 2^{x-6+y} = 2^4 \rightarrow$

$\rightarrow x - 6 + y = 4 \rightarrow x + y = 10$

Por tanto, tenemos:

$\left.\begin{array}{l} x - 4y = 5 \\ x + y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.^a} \\ \xrightarrow{-2.^a} \end{array} \begin{cases} x - 4y = 5 \\ -x - y = -10 \end{cases}$

$ -5y = -5 \rightarrow y = 1$

$x + 1 = 10 \rightarrow x = 9$

Solución: $x = 9, \; y = 1$

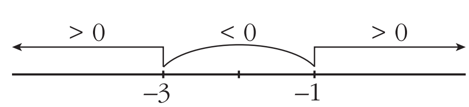
b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{1.^a} \\ \xrightarrow{2.^a + 2 \cdot 1.^a} \\ \xrightarrow{3.^a - 3 \cdot 1.^a} \end{array} \begin{cases} x + 2y + z = 1 \longrightarrow x = 1 \\ 5y + z = -3 \longrightarrow z = 2 \\ -7y = 7 \longrightarrow y = -1 \end{cases}$

Solución: $x = 1, \; y = -1, \; z = 2$

18 **Resuelve:** $\boldsymbol{x^2 + 4x + 3 \geq 0}$

Resolución

$x^2 + 4x + 3 \geq 0$ $\qquad x^2 + 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$



Soluciones: $(-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

19 **Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado?**

Resolución

x: tiempo que tarda B en llenar el depósito

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2+1}{2x} = \frac{x}{2x} \rightarrow x = 3 \text{ horas}$$

B tarda 3 horas y A tarda 6 horas.