Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Hallar la ecuación de la recta paralela a la recta y = –5x + 2 y que pasa por el punto (3, 5). **(1 punto)**

2. Resuelve las siguientes ecuaciones: **(2 puntos)**

a) $2x+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{9}{4}$; **b)** $\sqrt{x+2}=3-\sqrt{x-1}$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ x^2+xy=140 \end{array}\right\}$ **(1 punto)**

4. Hallar los valores de m para que la ecuación de segundo grado $x^2-27x+3m=0$ tenga una solución triple que la otra. **(1,5 puntos)**

5. Hallar dos números de tal forma que su suma sea 62 y la suma de sus cuadrados 1954. **(1,5 puntos)**

6. Descomponer en producto de factores (factorizar) los siguientes polinomios:

a) x^3-4x^2+x+6 ; **b)** x^4-x^2-12

Dar las soluciones de las correspondientes ecuaciones: $x^3-4x^2+x+6=0$, $x^4-x^2-12=0$. **(2 puntos)**

7. ¿Qué valor debe tomar k para que al dividir el polinomio $(k+2)x^2+2kx-2$ entre $x-3$ su resto sea 1? **(1 punto)**

① La recta ha de ser de la forma $y = -5x + n$ pues, al ser paralela a $y = -5x + 2$, tienen la misma pendiente. Como pasa por el punto $(3, 5)$, entonces:

$5 = -5 \cdot 3 + n \Rightarrow 5 = -15 + n \Rightarrow \underline{n = 20}$

Así, la recta buscada es $\underline{\underline{y = -5x + 20}}$

② a) $2x + \dfrac{1}{x+3} = \dfrac{9}{4} \Rightarrow \dfrac{2x \cdot 4(x+3)}{4(x+3)} + \dfrac{4 \cdot 1}{4(x+3)} = \dfrac{9(x+3)}{4(x+3)}$

$\Rightarrow 8x(x+3) + 4 = 9(x+3) \Rightarrow 8x^2 + 24x + 4 = 9x + 27$

$\Rightarrow 8x^2 + 15x - 23 = 0.$ $\Delta = 15^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-23) = 225 + 736$;

$\Delta = 961.$ $x = \dfrac{-15 \pm 31}{16} = \begin{cases} \underline{x_1 = 1} \\ \underline{\underline{x_2 = -\dfrac{46}{16} = -\dfrac{23}{8}}} \end{cases}$

b) $\sqrt{x+2} = 3 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x+2})^2 = (3 - \sqrt{x-1})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2 = 9 + x - 1 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x-1} \Rightarrow x + 2 = x + 8 - 6\sqrt{x-1}$

$\Rightarrow 6\sqrt{x-1} = 6 \Rightarrow (6\sqrt{x-1})^2 = 6^2 \Rightarrow 36(x-1) = 36$

$\Rightarrow 36x - 36 = 36 \Rightarrow 36x = 72 \Rightarrow \underline{\underline{x = \dfrac{72}{36} = 2}}$

③ $\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ x^2 + xy = 140 \end{array}\right\}$ $x + y = 20 \longrightarrow \underline{y = 20 - x}$ Sustituyendo en la segunda ecuación

$x^2 + x(20 - x) = 140 \Rightarrow x^2 + 20x - x^2 = 140 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20x = 140 \Rightarrow \underline{\underline{x = 7}}$; $y = 20 - 7 \Rightarrow \underline{\underline{y = 13}}$

④ Si una solución es x, la otra es $3x$ (triple de la otra)

Entonces SUMA DE SOLUCIONES: $S = x + 3x = 4x$

PRODUCTO DE SOLUCIONES: $P = x \cdot 3x = 3x^2$

Pero como la ecuación es $x^2 - 27x + 3m = 0$

ha de ser $\left.\begin{array}{l} S = +27 \\ P = 3m \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4x = 27 \longrightarrow x = \dfrac{27}{4} \\ 3x^2 = 3m \end{array}$ Sustituyendo

$3 \cdot \left(\dfrac{27}{4}\right)^2 = 3m \Rightarrow \underline{\underline{m = \dfrac{729}{16}}}$

5

$$\left.\begin{array}{l} x+y=62 \\ x^2+y^2=1954 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=62-y \\ (62-y)^2+y^2=1954 \Rightarrow \end{array}$$

$\Rightarrow 3844+y^2-124y+y^2=1954 \Rightarrow 2y^2-124y+1890=0$

(dividiendo entre 2) $y^2-62y+945=0$

$\Delta=(-62)^2-4\cdot1\cdot945=3844-3780=64.$

$$y=\frac{62\pm8}{2}=\begin{cases} y_1=35 \\ y_2=27 \end{cases}$$

Si $y_1=35 \Rightarrow x=62-35=27$

Si $y_2=27 \Rightarrow x=62-27=35$

Soluciones

$(27, 35)$

$(35, 27)$

6

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & 3 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^3-4x^2+x+6=(x-2)(x+1)(x-3)$

Soluciones: $x_1=2$; $x_2=-1$; $x_3=3$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -1 & 0 & -12 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 & 12 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 6 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & 0 & -6 & \\ \hline & 1 & 0 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-x^2-12=(x-2)(x+2)(x^2+3)$

Soluciones: $x_1=2$, $x_2=-2$

No hay más soluciones porque $0=x^2+3$ no tiene solución.

7

$p(3)=1 \Rightarrow (k+2)3^2+2k\cdot3-2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (k+2)9+6k-2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9k+18+6k-2=1 \Rightarrow 15k=1+2-18$

$\Rightarrow 15k=-15 \Rightarrow k=\frac{-15}{15} \Rightarrow \underline{\underline{k=-1}}$

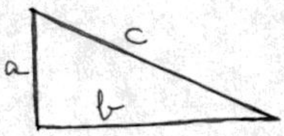
(1) $y = 2x + n$. Como $(-2, -5)$ pertenece a esta recta, entonces
$-5 = 2\cdot(-2) + n \Rightarrow -5 = -4 + n \Rightarrow \underline{n = -1}$
La recta pedida es pues $\underline{\underline{y = 2x - 1}}$

(2) a) $x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{10}{3} \Rightarrow 3x^2 + 3 = 10x \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$
$\Rightarrow \Delta = (-10)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 = 64 \Rightarrow x = \dfrac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

b) $\sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{2x-5} \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = \left(3 - \sqrt{2x-5}\right)^2$
$\Rightarrow x + 1 = 3^2 + \left(\sqrt{2x-5}\right)^2 - 2\cdot 3\sqrt{2x-5} \Rightarrow$
$x + 1 = 9 + 2x - 5 - 6\sqrt{2x-5} \Rightarrow 6\sqrt{2x-5} = x + 3$
$\Rightarrow \left(6\sqrt{2x-5}\right)^2 = (x+3)^2 \Rightarrow 36(2x-5) = x^2 + 9 + 6x$
$\Rightarrow 72x - 180 = x^2 + 9 + 6x \Rightarrow x^2 - 66x + 189 = 0$
$\Delta = (-66)^2 - 4\cdot 1\cdot 189 = 4356 - 756 = 3600$
$x = \dfrac{66 \pm 60}{2} = \begin{cases} x_1 = 63 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

(3) $\left.\begin{array}{l} x^2 - xy = 68 \\ x - y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y + 4$. Sustituyendo en la 1ª
$(y+4)^2 - (y+4)y = 68 \Rightarrow y^2 + 16 + 8y - y^2 - 4y = 68$
$\Rightarrow 4y = 52 \Rightarrow \underline{y = 13} \Rightarrow \underline{x = 17}$

(4) Si una solución es x la otra es el doble: $2x$
La suma es $s = x + 2x = 3x$.
El producto es $p = x \cdot 2x = 2x^2$.
Como la ecuación es $x^2 - 2mx + 8 = 0$ ha de ser
$\left.\begin{array}{l} s = 2m \\ p = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = 2m \\ 2x^2 = 8 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$
Si $x = 2 \Rightarrow 6 = 2m \Rightarrow \underline{m = 3}$
Si $x = -2 \Rightarrow -6 = 2m \Rightarrow \underline{m = -3}$

(5) 

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ab}{2} = 60 \\ a + b = 23 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} ab = 120 \\ a + b = 23 \end{array}\right\}$

$a = 23 - b$. Sustituyendo en la 1ª $(23 - b)b = 120 \Rightarrow$
$\Rightarrow 23b - b^2 = 120 \Rightarrow b^2 - 23b + 120 = 0$
$\Delta = (-23)^2 - 4\cdot 1\cdot 120 = 49 \Rightarrow b = \dfrac{23 \pm 7}{2} = \begin{cases} 15 \\ 8 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } b = 15 \Rightarrow a = 8 \\ \text{Si } b = 8 \Rightarrow a = 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Los catetos miden } 8 \text{ y } 15 \text{ m.}$$

En cualquier caso $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 8^2 + 15^2 = 289$

$\Rightarrow c = 17 \Rightarrow$ la hipotenusa mide 17 m.

6

a)

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 12 & 8 \\ -2 & & -2 & -8 & -8 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -4 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)(x+2)(x+2)$

Las soluciones de $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ son $\underline{\underline{x = -2}}$ (triple)

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -4 & 2 & -12 \\ 2 & & 2 & 6 & 4 & 12 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 6 & \boxed{0} \\ -3 & & -3 & 0 & -6 & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

NO HAY MÁS RAÍCES ENTERAS

$x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 = (x-2)(x+3)(x^2+2)$

Las soluciones de $x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12 = 0$ son $\underline{\underline{x = 2}}$, $\underline{\underline{x = -3}}$ (no hay más pues $x^2 + 2 = 0$ no tiene solución).

7

$p(2) = 3 \Rightarrow 2(k+1)2^2 + 3 \cdot 2 + k - 2 = 3$

$\Rightarrow 8(k+1) + 6 + k - 2 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8k + 8 + 6 + k - 2 = 3 \Rightarrow 9k = -9$

$\Rightarrow \underline{\underline{k = -1}}$