4 PROGRAMACIÓN LINEAL

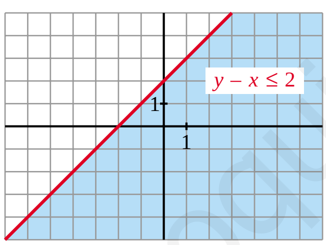
Página 102

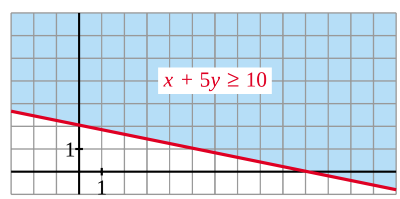
Problema 1

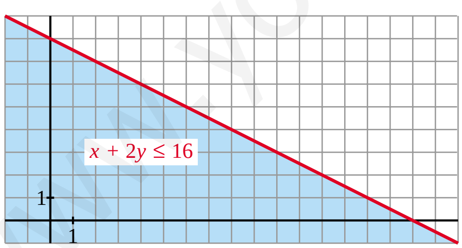
- **Para representar $y - x \leq 2$, representa la recta $y - x = 2$. Después, para decidir a cuál de los dos semiplanos corresponde la inecuación, toma un punto cualquiera exterior a la recta y comprueba si sus coordenadas verifican o no la desigualdad.**

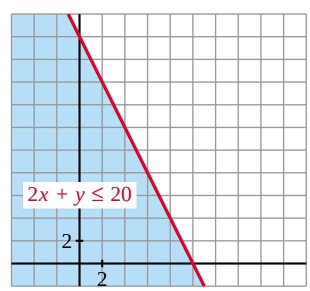
  Análogamente, representa:

  $$x + 5y \geq 10 \qquad x + 2y \leq 16 \qquad 2x + y \leq 20$$









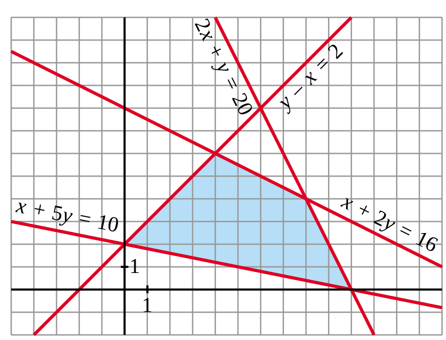
Página 103

Problema 2

- **Representa el recinto formado por las siguientes condiciones:**

  $y - x \leq 2$; $x + 5y \geq 10$;

  $x + 2y \leq 16$; $2x + y \leq 20$



Problema 3

- ***Un comerciante acude al mercado a comprar naranjas. Dispone de 500 € y en su furgoneta caben 700 kg.***

  En el mercado hay naranjas de tipo A a 0,5 € y de tipo B a 0,8 €. Él las podrá vender a 0,58 € las de tipo A y a 0,9 € las de tipo B, y se cuestiona cuántos kilogramos de cada tipo debería comprar para conseguir que los beneficios sean lo más altos posible.

  a) Si se gasta todo el dinero en naranjas de tipo B, ¿cuántos kilos le caben aún en su furgoneta?

  b) Si llena la furgoneta con naranjas de tipo A, ¿cuánto dinero le sobra? ¿Cuál será el beneficio?

  c) ¿Cuál será el beneficio si compra 400 kg de naranjas de tipo A y 300 kg de tipo B?

a) 500 : 0,8 = 625 kg de naranjas de tipo *B* puede comprar.

700 – 625 = 75 kg le caben aún en su furgoneta.

b) $700 \cdot 0{,}5 = 350$ € se gasta.

500 – 350 = 150 € le sobran.

Beneficio = $700 \cdot (0{,}58 - 0{,}5) = 56$ €

c) $400 \cdot (0{,}58 - 0{,}5) + 300(0{,}9 - 0{,}8) = 62$ € de beneficio.

Página 116

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

1 **Minimiza la función $f(x, y) = 2x + 8y$ sometida a las siguientes restricciones:**

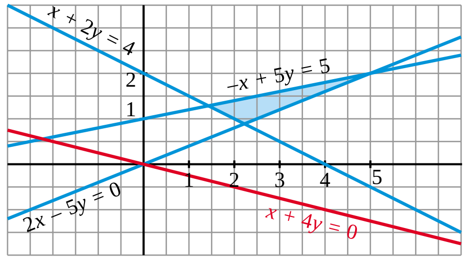
$$\begin{cases} x \geq 0, \ y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

• Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 0 \\ -x + 5y = 5 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

• Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + 8y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas: $2x + 8y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 4y = 0$



• El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{20}{9} \\[2ex] y = \dfrac{8}{9} \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

• El mínimo vale $f\left(\dfrac{20}{9}, \dfrac{8}{9}\right) = \dfrac{104}{9}$.

2 **Maximiza y minimiza la función $p = x + 2y - 3$ con las siguientes restricciones:**

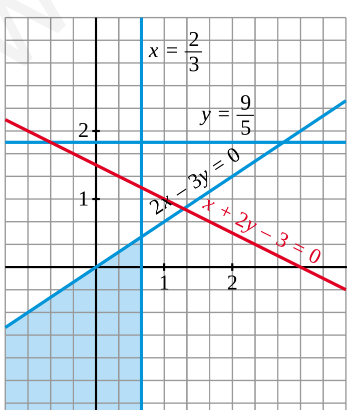
$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x - 3y \geq 0} \\ \mathbf{5y \leq 9} \\ \mathbf{3x \leq 2} \end{array}\right.$$

• Representamos las rectas:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 0 \\ \quad\quad 5y = 9 \\ 3x \quad\quad = 2 \end{array}\right.$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema.

• Representamos la dirección de las rectas $p = x + 2y - 3$, dibujando la recta $x + 2y - 3 = 0$:



La restricción $5y \leq 9$ es superflua. La región sería la misma sin ella.

• El **máximo** se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\[2ex] y = \dfrac{4}{9} \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$$

El máximo es $p\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{9} - 3 = \dfrac{-13}{9}$

• No hay **mínimo**.

3 **Maximiza la función $z = 3x + 4y$ sujeta a las siguientes restricciones:**

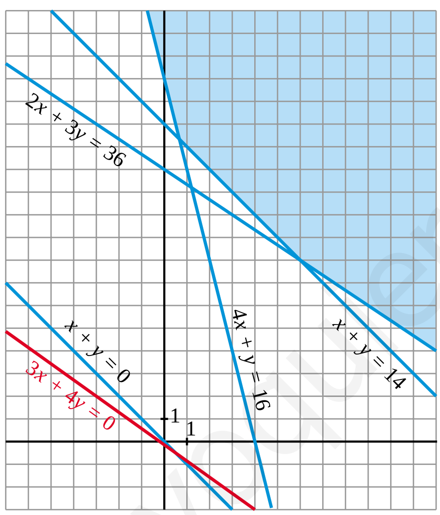
$$\begin{cases} \mathbf{2x + 3y \geq 36} \\ \mathbf{2x + 2y \geq 28} \\ \mathbf{8x + 2y \geq 32} \\ \mathbf{x + y \geq 0} \end{cases}$$

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 36 \\ 2x + 2y = 28 \quad \to \quad x + y = 14 \\ 8x + 2y = 32 \quad \to \quad 4x + y = 16 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

y obtenemos la región que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 3x + 4y$, dibujando la recta $3x + 4y = 0$:



La restricción $x + y \geq 0$ es superflua. La región sería la misma sin ella.

- No hay máximo. La función $3x + 4y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

4 **En la región determinada por $3x + y \geq 5$, $x - y \leq 0$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, halla el punto en que la función $f(x, y) = 2x + 4y$ alcanza su valor mínimo. ¿Puede alcanzar su máximo en esa región?**

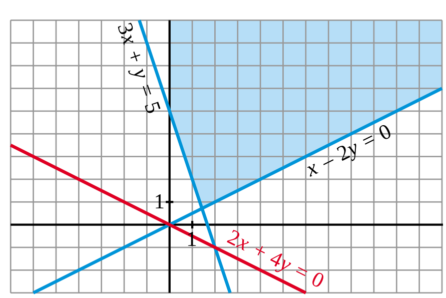
- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + 4y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas:

$$2x + 4y = 0 \quad \to \quad x + 2y = 0$$



• El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas.

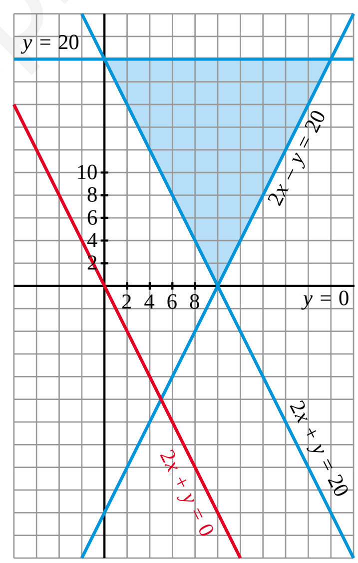
$$\left.\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{10}{7} \\ y &= \frac{5}{7} \end{aligned}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{10}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

• No hay máximo. La función $2x + 4y$ se puede hacer tan grande como se quiera en el recinto propuesto.

5 **Calcula los puntos del recinto** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x + y \geq 20} \\ \mathbf{2x - y \leq 20} \\ \mathbf{0 \leq y \leq 20} \end{array}\right.$ **que hacen mínima o máxima la función** $z = 2x + y$**. ¿Cuántas soluciones hay?**

• Representamos las rectas $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 20 \\ 2x - y = 20 \\ y = 20 \\ y = 0 \end{array}\right.$

y obtenemos la región que cumple las restricciones dadas.



• Representamos la dirección de las rectas $z = 2x + y$, dibujando la recta $2x + y = 0$. Esta recta es paralela a $2x + y = 20$, que determina uno de los lados del recinto:

• Hay infinitos puntos que hacen mínima la función: todos los que están sobre el segmento de recta $y = 20 - 2x$ con $0 \leq x \leq 10$.

• El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 20 \\ y &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= 20 \\ y &= 20 \end{aligned}\right\} \text{ Punto } (20, 20)$$

6 **¿Es posible maximizar y minimizar la función** $z = x + y + 1$ **sujeta a estas restricciones?**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x + 4y - 13 \geq 0} \\ \mathbf{2x - 3y - 3 \leq 0} \\ \mathbf{5x - y - 27 \leq 0} \end{array}\right.$$

• Representamos las rectas: $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y - 13 = 0 \\ 2x - 3y - 3 = 0 \\ 5x - y - 27 = 0 \end{array}\right.$

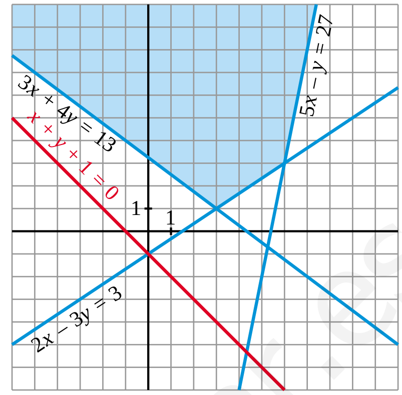
y obtenemos el recinto que cumple las restricciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas

$$z = x + y + 1,$$

dibujando la recta $x + y + 1 = 0$.

- No existe máximo ni mínimo.



7 **Las rectas $2x + y = 18$, $2x + 3y = 26$ y $x + y = 16$ se cortan dos a dos en tres puntos que son los vértices de un triángulo T. Sea S la intersección del triángulo T con el primer cuadrante. Halla el máximo de la función $z = 5x + 3y$ cuando x e y varían en S.**

- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ 2x + 3y = 26 \\ x + y = 16 \end{cases}$$

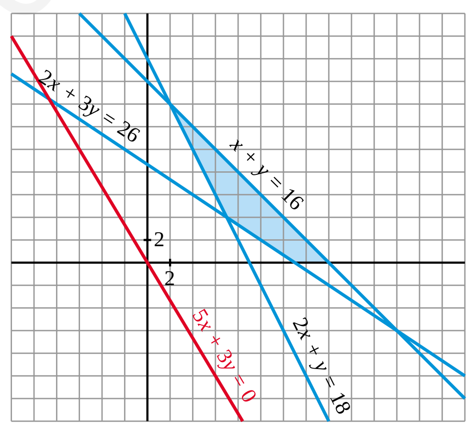
y obtenemos el triángulo T, y la región S.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + 3y$, dibujando la recta:

$$5x + 3y = 0$$

- El máximo se alcanza en el punto de corte de $x + y = 16$ con el eje X; es decir, en el punto (16, 0).

- El máximo vale $z = 5 \cdot 16 + 3 \cdot 0 = 80$



8 **Dibuja el recinto que cumple estas restricciones:**

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y - x + 1 \geq 0 \\ y - 4 \leq 0 \\ y + 2x - 5 \leq 0 \end{cases}$$

a) Localiza los puntos de este recinto en los que la función objetivo $F(x, y) = x + y$ se hace máxima y mínima, respectivamente.

b) Sobre el mismo recinto, haz máxima y mínima la función $G(x, y) = 5x + y$.

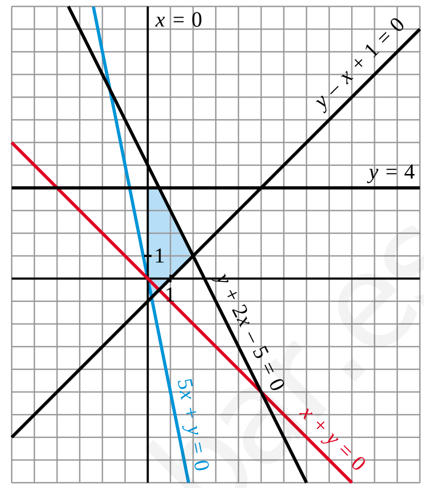
- Representamos las rectas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - x + 1 = 0 \\ y - 4 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

y obtenemos el recinto que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $z = x + y$, dibujando la recta $x + y = 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z = 5x + y$, dibujando la recta $5x + y = 0$.



a) • $F(x, y)$ alcanza el **máximo** en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y + 2x - 5 = 0 \\ y = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 4 \end{array}\right\} \text{ Punto } \left(\frac{1}{2}, 4\right)$$

• $F(x, y)$ alcanza el **mínimo** en el punto de corte con el eje Y de la recta $y - x + 1 = 0$, es decir, en el punto $(0, -1)$.

b) • $G(x, y)$ alcanza el **máximo** en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} y - x + 1 = 0 \\ y + 2x - 5 = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \text{ Punto } (2, 1)$$

El máximo vale $G(2, 1) = 5 \cdot 2 + 1 = 11$

• $G(x, y)$ alcanza el **mínimo** en el punto $(0, -1)$.

El mínimo vale $G(0, -1) = -1$.

9 **S** **Considera el triángulo de vértices (0, 0), (2, 8) y (10, 3). Determina razonadamente:**

a) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = -4x + y + 9$ alcanza el máximo.

b) El punto del triángulo donde la función $f(x, y) = 4x + y + 12$ alcanza el máximo.

Sabemos que el máximo se alcanza en algún vértice (o en un lado). Calculamos el valor de la función dada en cada uno de los vértices:

a) $f(x, y) = -4x + y + 9$

$$\left.\begin{array}{l} f(0, 0) = 9 \\ f(2, 8) = 9 \\ f(10, 3) = -28 \end{array}\right\}$$

Hay infinitos puntos que hacen máxima la función: todos los puntos del lado que une los vértices (0, 0) y (2, 8).

b) $f(x, y) = 4x + y + 12$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,\ 0) = 12 \\ f(2,\ 8) = 28 \\ f(10,\ 3) = 55 \end{array}\right\}$$ La función alcanza el máximo en el punto (10, 3).

PARA RESOLVER

10 **Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa *A* le paga 0,05 € por impreso repartido y la empresa *B*, con folletos más grandes, le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de tipo *A*, en la que le caben 120, y otra para los de tipo *B*, en la que caben 100. Ha calculado que cada día puede repartir 150 impresos como máximo.**

¿Cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

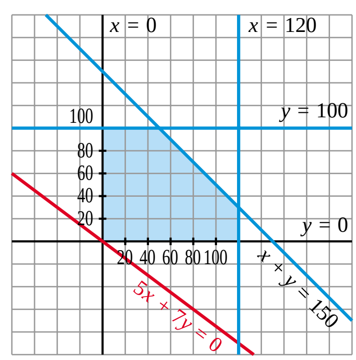
- Llamamos x al nº de impresos de tipo A e y al nº de impresos de tipo B.

- Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le x \le 120 \\ 0 \le y \le 100 \\ x + y \le 150 \end{array}\right\}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 0,05x + 0,07y$. Tenemos que maximizar $f(x, y)$, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $0,05x + 0,07y = 0 \rightarrow 5x + 7y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0,05x + 0,07y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 150 \\ y = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 100 \end{array}$$

Por tanto, habrá de repartir 50 impresos de tipo A y 100 de tipo B. El beneficio será de:

$f(50, 100) = 0,05 \cdot 50 + 0,07 \cdot 100 = 9,5$ €

11 **Una industria vinícola produce vino y vinagre. El doble de la producción de vino es siempre menor o igual que la producción de vinagre más cuatro unidades. Además, el triple de la producción de vinagre más cuatro veces la producción de vino es siempre menor o igual que 18 unidades.**

Halla el número de unidades de cada producto que se deben producir para alcanzar un beneficio máximo, sabiendo que cada unidad de vino deja un beneficio de 8 € y cada unidad de vinagre 2 €.

- Llamamos x a las unidades de vino e y a las de vinagre. Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x \leq y + 4 \\ 3y + 4x \leq 18 \end{array}\right\}$$

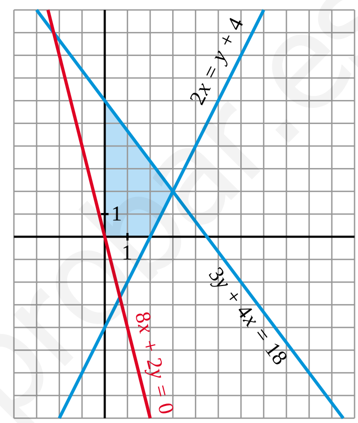
- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 8x + 2y$. Tenemos que maximizar $f(x, y)$, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $8x + 2y = 0 \ \rightarrow \ 4x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 2y$.

- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x = y + 4 \\ 3y + 4x = 18 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 2 \end{array}\right\}$$

Por tanto, hay que producir 3 unidades de vino y 2 de vinagre.



Página 117

12 **Un autobús Madrid-París ofrece plazas para fumadores al precio de 100 € y a no fumadores al precio de 60 €.**

Al no fumador se le deja llevar 50 kg de peso y al fumador 20 kg.

Si el autobús tiene 90 plazas y admite un equipaje de hasta 3 000 kg, ¿cuál debería ser la oferta de la compañía si se quiere obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de plazas para fumadores e y al nº de plazas para no fumadores.

- Las restricciones del problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + y \leq 90 \\ 20x + 50y \leq 3\,000 \quad \rightarrow \quad 2x + 5y \leq 300 \end{array}\right.$$

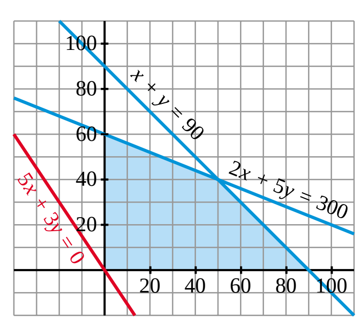
- Tenemos que maximizar la función:

  $f(x, y) = 100x + 60y$, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $100x + 60y = 0 \ \rightarrow \ 5x + 3y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 100x + 60y$:

- El máximo se alcanza en el punto $(90, 0)$.

Por tanto, deben ofrecer 90 plazas para fumadores y ninguna para no fumadores, para obtener el máximo beneficio.



13 **Una persona quiere invertir 100 000 € en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal.**

Decide invertir como máximo 60 000 € en la compra de acciones A y, por lo menos, 20 000 € en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B.

¿Cómo debe invertir los 100 000 € para que el beneficio anual sea máximo?

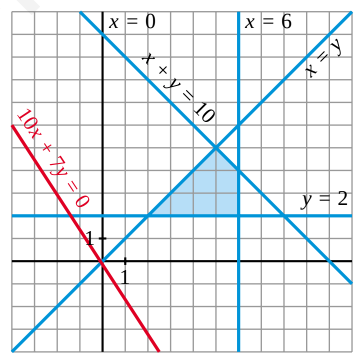
- Llamamos x al dinero invertido en acciones de tipo A (en decenas de miles de euros) e y al dinero invertido en acciones de tipo B (en decenas de miles de euros).

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x + y \le 10 \\ 0 \le x \le 6 \\ y \ge 2 \\ x \ge y \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio anual es: $f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}07y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $0{,}1x + 0{,}07y = 0 \;\rightarrow\; 10x + 7y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}1x + 0{,}07y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10 \\ x = 6 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 4 \end{array}$$

Por tanto, debe invertir 60 000 € en acciones de tipo A y 40 000 € en acciones de tipo B.

14 **Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 500 €. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 0,5 € el kg y las de tipo B a 0,8 € el kg.**

Sabemos que solo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg de naranjas como máximo y que piensa vender el kilo de naranjas de tipo A a 0,58 € y el de tipo B a 0,9 €.

¿Cuántos kilogramos de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener beneficio máximo?

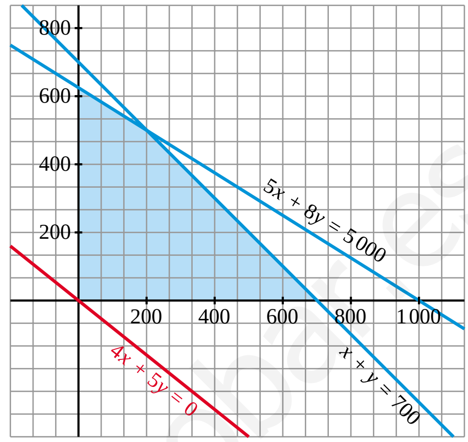
- Llamamos x a los kg de naranjas del tipo A e y a los kg de naranjas del tipo B.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \ge 0;\; y \ge 0 \\ x + y \le 700 \\ 0{,}5x + 0{,}8y \le 500 \quad \rightarrow \quad 5x + 8y \le 5\,000 \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 0{,}08 + 0{,}1y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones, y la recta $0{,}08x + 0{,}1y = 0 \rightarrow$ $\rightarrow 8x + 10y = 0 \rightarrow 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}08x + 0{,}1y$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 700 \\ 5x + 8y = 5\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 200 \\ y = 500 \end{array}$$

Por tanto, deberá comprar 200 kg de naranjas del tipo A y 500 kg del tipo B.

15 **Un sastre tiene 80 m² de tela de algodón y 120 m² de tela de lana.**

Un traje de caballero requiere 1 m² de algodón y 3 m² de lana y un vestido de señora necesita 2 m² de cada una de las telas.

Calcula el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden por el mismo precio.

- Llamamos x al número de trajes e y al número de vestidos. Resumamos en una tabla la información:

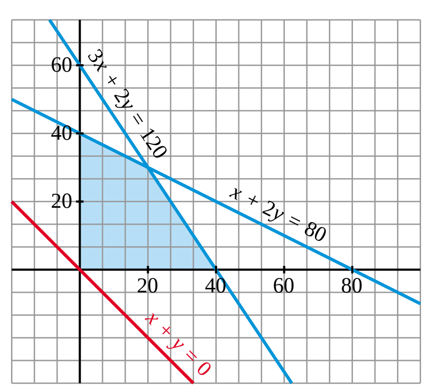
	Nº	ALGODÓN	LANA
TRAJE	x	x	$3x$
VESTIDO	y	$2y$	$2y$
TOTAL		$x + 2y$	$3x + 2y$

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \end{cases}$$

- Si llamamos k al beneficio obtenido por la venta de un traje o de un vestido, la función que nos da el beneficio total es $f(x, y) = k(x + y)$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el recinto de restricciones y la recta $k(x + y) = 0 \rightarrow x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = k(x + y)$.



- El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 120 \\ x + 2y = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 20 \\ y = 30 \end{array}$$

Por tanto, debe confeccionar 20 trajes y 30 vestidos.

16 **Se quiere promocionar una marca desconocida, D, de aceites, utilizando una marca conocida, C. Para ello, se hace la siguiente oferta:**

"Pague a solo 2,5 € el litro de aceite C y a 1,25 € el litro de aceite D siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D".

Disponemos de un máximo de 31,25 €.

a) Represente gráficamente los modos existentes de acogernos a la oferta.

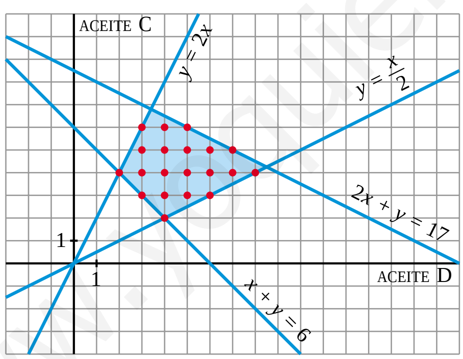
b) Acogiéndonos a la oferta, ¿cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar? ¿Cuál es la máxima de C?

- Llamamos x al nº de litros de aceite D, e y al nº de litros de aceite C.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ \ y \geq 0 \\ x + y \geq 6 \\ \dfrac{x}{2} \leq y \leq 2x \\ 2{,}5y + 1{,}25x \leq 21{,}25 \quad \to \quad 2y + x \leq 17 \\ x,\ y \text{ enteros} \end{cases}$$

a) Representamos gráficamente el recinto:



Hay 20 puntos en el recinto (20 modos de acogernos a la oferta).

b) La mínima cantidad de D son 2 litros y la máxima de C son 8 litros.

17 **Se quiere elaborar una dieta para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2 mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 mg de la C y 2 mg de la D.**

Para ello, se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por kilo es, para ambos, de 0,3 € y cuyo contenido vitamínico en miligramos por kilo es el siguiente:

	A	**B**	**C**	**D**
P	**1**	**1**	**20**	**2**
Q	**1**	**3**	**7,5**	**0**

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?

• Llamamos x al pienso de tipo P (en kg) e y al de tipo Q (en kg). Las restricciones son las siguientes:

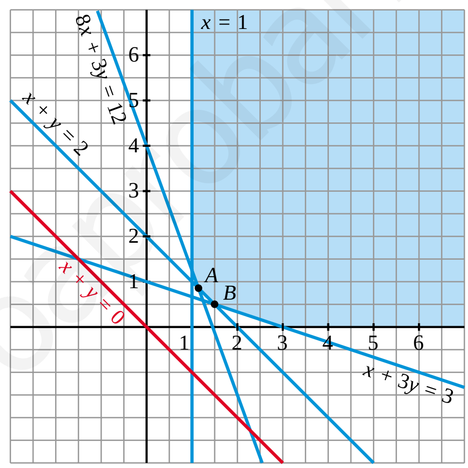
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x + 3y \geq 3 \\ 20x + 7{,}5y \geq 30 \quad \rightarrow \quad 8x + 3y \geq 12 \\ 2x \geq 2 \quad \rightarrow \quad x \geq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

• La función que nos da el gasto es: $f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}3y = 0{,}3(x + y)$. Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

• Representamos el recinto de restricciones, y la recta

$$0{,}3(x, y) = 0 \quad \rightarrow \quad x + y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}3(x + y)$.



• Como la recta $x + y = 0$ es paralela a $x + y = 2$, el mínimo se alcanza en cualquier punto de la recta $x + y = 2$ comprendido entre A y B. Hallamos las coordenadas de A y de B:

A: Punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 8x + 3y = 12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{6}{5} \\[2mm] y = \dfrac{4}{5} \end{array}\right\} \quad A\left(\dfrac{6}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$$

B: Punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x + 3y = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\[2mm] y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad B\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$$

18 **Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T_1 y T_2, para lo que usa tres ingredientes, A, B y C. Dispone de 150 kg de A, 90 kg de B y 150 kg de C. Para fabricar una tarta T_1 debe mezclar 1 kg de A, 1 kg de B y 2 kg de C, mientras que para hacer una tarta T_2 necesita 5 kg de A, 2 kg de B y 1 kg de C.**

a) Si se venden las tartas T_1 a 10 €, y las tartas T_2 a 23 €, ¿qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?

b) Si se fija el precio de una tarta del tipo T_1 en 15 €, ¿cuál será el precio de una tarta del tipo T_2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T_1 y 15 del tipo T_2?

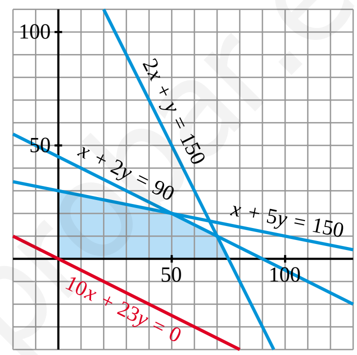
• Llamamos x al nº de tartas de tipo T_1 e y al nº de tartas de tipo T_2.

• Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x + 5y \leq 150 \\ x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \end{cases}$$

a) • La función que nos da los ingresos es $f(x, y) = 10x + 23y$. Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

• Representamos el recinto de restricciones, y la recta $10x + 23y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 10x + 23y$:



• El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + 5y = 150 \\ x + 2y = \ \ 90 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 50 \\ y = 20 \end{array}$$

Por tanto, deben fabricarse 50 tartas de tipo T_1 y 20 tartas de tipo T_2.

b) • Si llamamos k al precio de la tarta de tipo T_2, los ingresos vendrían dados por la función $g(x, y) = 15x + ky$.

• Si la función $g(x, y)$ alcanza el máximo en el punto (60, 15), que no es un vértice, será porque hay infinitas soluciones y la recta $15x + ky = 0$ será paralela a $x + 2y = 90$. Por tanto:

$$\left.\begin{array}{lcl} 15x + ky = 0 & \rightarrow & \text{pendiente} = -\dfrac{15}{k} \\ x + 2y = 90 & \rightarrow & \text{pendiente} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{-15}{k} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad k = 30$$

Por tanto, el precio de una tarta del tipo T_2 será de 30 €.

Página 118

19 **Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas —de cortar, coser y teñir— se emplean en la producción.**

Fabricar una chaqueta representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, tres horas y la de teñir, una hora. Fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser, una hora y la de teñir, ninguna hora. La máquina de teñir se puede usar durante tres horas, la de coser, doce y la de cortar, siete.

Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y cinco por cada pantalón.

¿Cómo emplearemos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

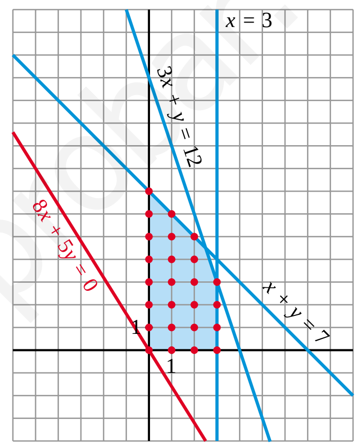
• Llamamos x al nº de chaquetas e y al nº de pantalones.

• Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq 3 \\ x + y \leq 7 \\ 3x + y \leq 12 \end{cases} \qquad x, \ y \ \text{enteros}$$

• La función que nos da el beneficio es $f(x, y) = 8x + 5y$. Tenemos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

• Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 5y$:



• El máximo se alcanza en el punto (2, 5). Por tanto, han de fabricarse 2 chaquetas y 5 pantalones.

20 S **Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P_1 y P_2, cuyos contenidos vitamínicos por kg son los que aparecen en la tabla:**

	A	B
P_1	2	6
P_2	4	3

Si el kilogramo de pienso P_1 vale 0,4 € y el del P_2 0,6 €, ¿cómo deben mezclarse los piensos para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

• Llamamos x a los kg de pienso P_1 e y a los kg de pienso P_2.

• Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 4 \quad \rightarrow \quad x + 2y \geq 2 \\ 6x + 3y \geq 6 \quad \rightarrow \quad 2x + y \geq 2 \end{cases}$$

• La función que nos da el coste es $f(x, y) = 0{,}4x + 0{,}6y$. Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

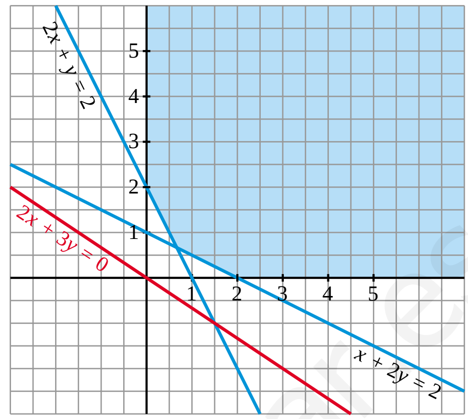
- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

$$0{,}4x + 0{,}6y = 0 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}4x + 0{,}6y$.

- El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + \ \ y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{array}$$



Por tanto, se deben mezclar $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_1 con $\frac{2}{3}$ kg de pienso P_2.

21 S **Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos.**

Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y del número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos.

El beneficio de la empresa por jornada es de 150 € por electricista y 120 € por mecánico.

¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de electricistas e y al de mecánicos.
- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x \leq 30; \quad y \leq 20 \\ y \geq x \\ y \leq 2x \\ x, y \quad \text{enteros} \end{cases}$$

- La función que nos da el beneficio es:

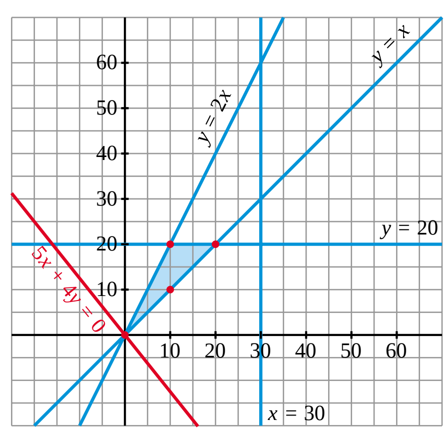
$$f(x, y) = 150x + 120y$$

Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

$$150x + 120y = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 4y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 150x + 120y$.



- Solo hay 4 puntos en el conjunto de restricciones: (0, 0), (10, 10), (10, 20) y (20, 20). El máximo se alcanza en el punto (20, 20). Por tanto, deben elegirse 20 electricistas y 20 mecánicos.

22 S **Una confitería es famosa por sus dos especialidades en tartas: la tarta Imperial y la tarta de Lima.**

La tarta Imperial requiere para su elaboración medio kilo de azúcar y 8 huevos y tiene un precio de venta de 8 €.

La tarta de Lima necesita 1 kilo de azúcar y 8 huevos, y tiene un precio de venta de 10 €.

En el almacén les quedan 10 kilos de azúcar y 120 huevos.

a) ¿Qué combinaciones de especialidades pueden hacer?

Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

b) ¿Cuántas unidades de cada especialidad han de producirse para obtener el mayor ingreso por ventas?

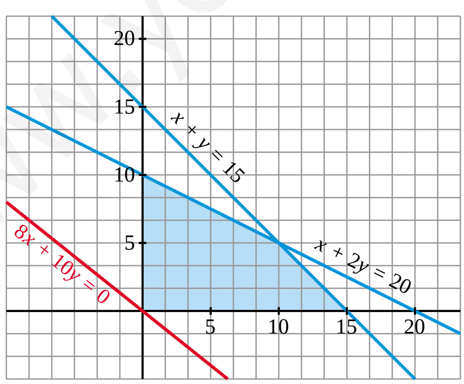
a) • Llamamos x al nº de tartas de tipo Imperial e y al nº de tartas de Lima.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0; \quad x, \ y \ \text{ enteros} \\ 0{,}5x + y \leq 10 \quad \rightarrow \quad x + 2y \leq 20 \\ 8x + 8y \leq 120 \quad \rightarrow \quad x + y \leq 15 \end{cases}$$

- La función que nos da los ingresos por ventas es $f(x, y) = 8x + 10y$. Tendremos que maximizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta $8x + 10y = 0 \ \rightarrow \ 4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8x + 10y$:



(Puntos de coordenadas enteras dentro de este recinto)

b) El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} x + \ \ y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 10 \\ y = \ \ 5 \end{array}$$

Por tanto, han de fabricar 10 tartas Imperiales y 5 de Lima.

23 **S** **Un orfebre fabrica dos tipos de joyas.**

La unidad de tipo A se hace con 1 g de oro y 1,5 g de plata y se vende a 25 €.

La de tipo B se vende a 30 € y lleva 1,5 g de oro y 1 g de plata.

Si solo se dispone de 750 g de cada metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

- Llamamos x al nº de unidades de tipo A e y al nº de unidades de tipo B.

- Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \end{cases}$$

- La función que tenemos que maximizar, sujeta a las restricciones anteriores, es: $f(x, y) = 25x + 30y$

- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

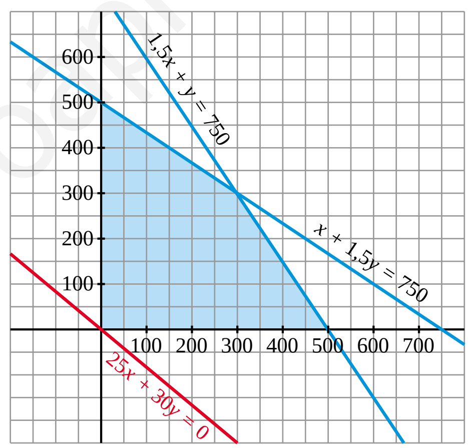
$$25x + 30y = 0 \quad \rightarrow \quad 5x + 6y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 25x + 30y$.

- El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} 1{,}5x + \phantom{1{,}5}y &= 750 \\ x + 1{,}5y &= 750 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 300 \\ y &= 300 \end{aligned}$$

Por tanto, ha de fabricar 300 joyas de cada uno de los dos tipos.



24 **S** **Se desea realizar una mezcla con dos sustancias, A y B, que ha de contener como mínimo 10 unidades de cada una de ellas.**

Estas sustancias nos las venden dos proveedores en forma de lotes.

El lote del primer proveedor es tal que los contenidos de B y de A están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de A.

El lote del segundo proveedor es tal que los contenidos de A y de B están en relación de 4 a 1 y hay una unidad de B.

El primer proveedor vende cada lote a 10 € y el segundo al doble. Ambos proveedores nos venden lotes enteros o fracciones de ellos.

¿Qué número de lotes hemos de comprar para que el coste sea mínimo?

- Llamamos x a los lotes del primer proveedor e y a los lotes del segundo proveedor.

• Las restricciones del problema son:

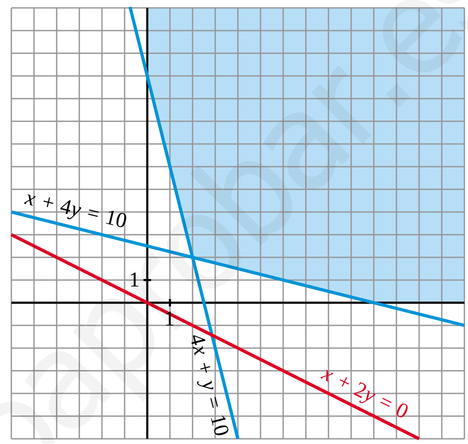
$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x + 4y \geq 10 \\ 4x + y \geq 10 \end{cases}$$

• La función que nos da el coste es $f(x, y) = 10x + 20y$. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

• Representamos el conjunto de restricciones y la recta

$$10x + 20y = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y = 0,$$

que nos da la dirección de las rectas $z = 10x + 20y$:



• El mínimo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 4y = 10 \\ 4x + \ \ y = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}$$

Por tanto, hemos de comprar 2 lotes de cada uno de los dos tipos.

Página 119

25 S **Un veterinario aconseja a un granjero dedicado a la cría de aves una dieta mínima que consiste en 3 unidades de hierro y 4 unidades de vitaminas diarias. El granjero sabe que cada kilo de maíz proporciona 2,5 unidades de hierro y 1 de vitaminas y que cada kilo de pienso compuesto proporciona 1 de hierro y 2 de vitaminas. Sabiendo que el kilo de maíz vale 0,3 € y el de pienso compuesto 0,52 €, se pide:**

a) ¿Cuál es la composición de la dieta diaria que minimiza los costes del granjero? Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

b) ¿Cambiaría la solución del problema si por escasez en el mercado el granjero no pudiera disponer de más de 1 kilo diario de pienso compuesto? Razona la respuesta.

a) • Llamamos x al nº de kg de maíz e y al nº de kg de pienso.

• Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2{,}5x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$

• La función que nos da el coste es $f(x, y) = 0{,}3x + 0{,}52y$. Tenemos que minimizar esta función sujeta a las restricciones anteriores.

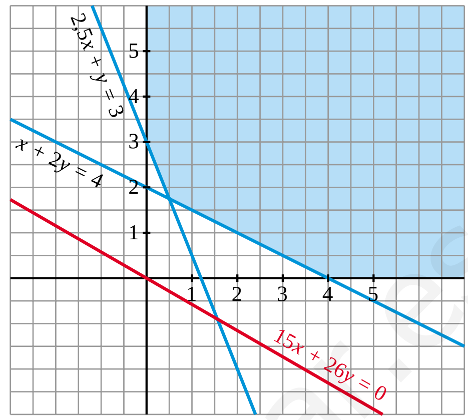
- Representamos el conjunto de restricciones y la recta

  $0{,}3x + 0{,}52y = 0 \quad \rightarrow \quad 15x + 26y = 0,$

  que nos da la dirección de las rectas $z = 0{,}3x + 0{,}52y$.

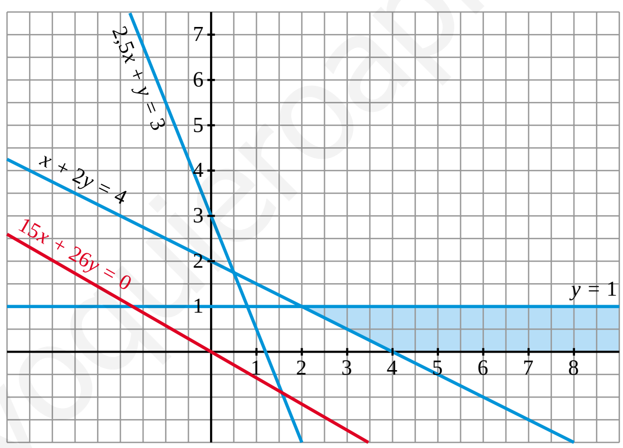
- El mínimo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ 2{,}5x + y = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{7}{4} \end{array}$$



Por tanto, debe utilizar $\frac{1}{2}$ kg de maíz y $\frac{7}{4}$ kg de pienso compuesto.

b) • Si añadimos la restricción $y \le 1$ a las anteriores, el recinto sería:



- El mínimo en este caso se alcanzaría en el punto de corte de:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 4 \\ y = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

En este caso, debería utilizar 2 kg de maíz y 1 kg de pienso compuesto.

CUESTIONES TEÓRICAS

26 **¿Puede una función objetivo alcanzar su valor óptimo en un punto interior de la región factible? (Es decir, no situado en el borde).**

¿Puede ocurrir si se admiten valores decimales en x e y?

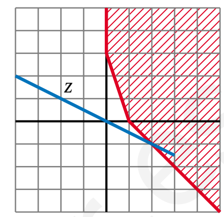
Sí puede alcanzar su valor óptimo en el interior cuando tratamos con valores enteros.

No puede ocurrir si los valores son decimales.

27 **¿Puede una función objetivo representarse por una recta horizontal? ¿Y por una vertical?**

Sí se puede representar por una recta horizontal, y también por una vertical.

28 **¿Tiene máximo la función z en el recinto señalado? ¿Y mínimo?**



No tiene máximo ni mínimo.

29 **Al representar las distintas restricciones de un problema, comprobamos que no hay ningún punto que cumpla todas a la vez (la región de validez es vacía). ¿Qué podemos afirmar sobre la solución del problema?**

La solución no existe, ya que no hay ningún punto que cumpla las restricciones.

PARA PROFUNDIZAR

30 **Una empresa compra 26 locomotoras a tres fábricas: 9 a A, 10 a B y 7 a C. Las locomotoras deben prestar servicio en dos estaciones distintas: 11 de ellas en la estación N y 15 en la S. Los costes de traslado son, por cada una, los que se indican en la tabla (en miles de euros):**

	A	**B**	**C**
N	**6**	**15**	**3**
S	**4**	**20**	**5**

Averigua cómo conviene hacer el reparto para que el coste sea mínimo.

- Hacemos una tabla:

	A	B	C	
N	x	y	$11 - x - y$	11
S	$9 - x$	$10 - y$	$x + y - 4$	15
	9	10	7	26

- Las restricciones del problema son:

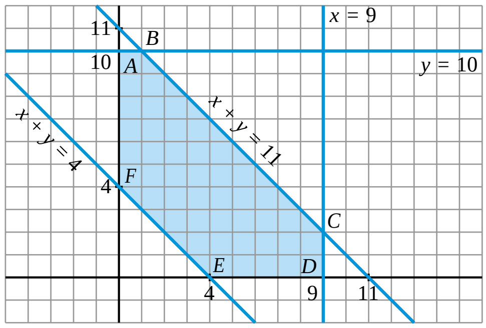
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ x + y \leq 11 \\ x \leq 9 \\ y \leq 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{(para que todos los datos de la tabla sean positivos o cero)} \\ (x,\ y \text{ enteros}) \end{array}$$

- La función que nos da el coste (en miles de euros) es:

$$f(x, y) = 6x + 15y + 3(11 - x - y) + 4(9 - x) + 20(10 - y) + 5(x + y - 4) =$$
$$= 4x - 3y + 249$$

Tenemos que minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

• Representamos el recinto de restricciones:



(x, y enteros)

Los vértices del recinto son:

A (0, 10) B (1, 10)

C (9, 2) D (9, 0)

E (4, 0) F (0, 4)

• Hallamos $f(x, y)$ en cada uno de los vértices:

$f(0, 10) = 219$ $f(1, 10) = 223$

$f(9, 2) = 279$ $f(9, 0) = 285$

$f(4, 0) = 265$ $f(0, 4) = 237$

• El mínimo se alcanza en el punto A (0, 10).

Por tanto, el reparto debe efectuarse así:

	A	B	C	
N	0	10	1	11
S	9	0	6	15
	9	10	7	26

31 **Un productor tabaquero posee 85 hectáreas de terreno para plantar dos variedades de tabacos VIRGINIA y PROCESADO. La variedad VIRGINIA tiene un rendimiento de 9 600 €/ha, pero necesita 3 h/ha de uso de maquinaria y 80 h/ha de mano de obra. Además, el Estado limita su explotación a 30 ha por plantación.**

La variedad PROCESADO produce un rendimiento de 7 500 €/ha y utiliza 2 h/ha de uso de maquinaria y 60 h/ha de mano de obra.

La cooperativa local le ha asignado 190 h de uso de maquinaria, pero solo se dispone de 5 420 horas de mano de obra a 12 €/h. ¿Cuántas hectáreas debe dedicar a cada variedad de tabaco?

• Llamamos x a las hectáreas dedicadas a VIRGINIA e y a las dedicadas a PROCESADO.

• Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0; \quad y \geq 0 \\ x \leq 30 \\ x + y \leq 85 \\ 3x + 2y \leq 190 \\ 80x + 60y \leq 5\,420 \quad \rightarrow \quad 4x + 3y \leq 271 \end{cases}$$

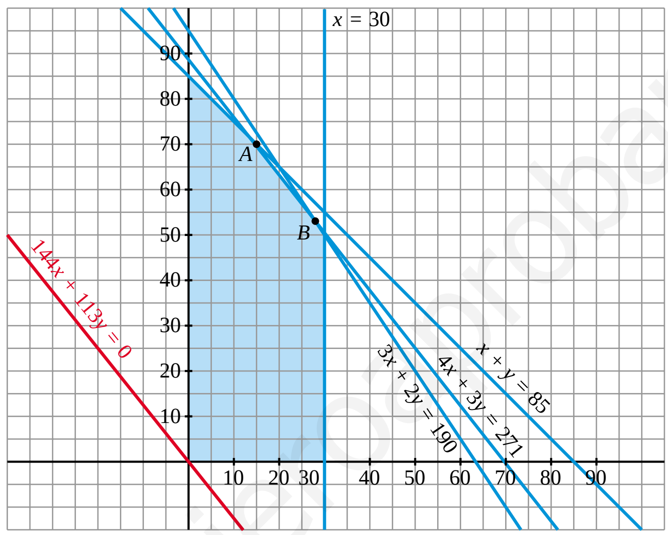
• La función que nos da el beneficio será igual al rendimiento menos el coste de la mano de obra:

$$f(x, y) = (9\,600x - 960x) + (7\,500y - 720y) = 8\,640x + 6\,780y$$

Tenemos que maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

• Representamos el recinto de restricciones, y la recta $8\,640x + 6\,780y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 144x + 113y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 8\,640x + 6\,780y$:



• Hallamos los puntos A y B, y obtenemos el valor de $f(x, y)$ en cada uno de los dos:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 85 \\ 4x + 3y &= 271 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= 16 \\ y &= 69 \end{aligned}\right\} A(16, 69) \rightarrow f(16, 69) = 606\,060$$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 3y &= 271 \\ 3x + 2y &= 190 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= 28 \\ y &= 53 \end{aligned}\right\} B(28, 53) \rightarrow f(28, 53) = 601\,260$$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto A; es decir, debe dedicar 16 ha a VIRGINIA y 69 ha a PROCESADO.

32 Don Elpidio decide emplear hasta 30 000 € de su patrimonio en la adquisición de acciones de dos sociedades de inversión: BLL e ISSA.

El precio de cada acción es de 10 € cada una, y en ambos casos.

BLL dedica el 35% de su actividad al sector seguros, el 45% al sector inmobiliario y el 20% al industrial.

ISSA dedica el 30% de sus recursos al sector seguros, el 25% al inmobiliario y el 45% al industrial.

D. Elpidio no quiere invertir más del 40% de su capital en el sector industrial ni más del 35% en el inmobiliario. ¿Cuántas acciones debe adquirir de cada sociedad si BLL prevé entregar un dividendo de 1,2 €/acción e ISSA de 1 €/acción?

• Llamamos x al nº de acciones que adquiere de BLL e y al nº de acciones que adquiere de ISSA.

• Hagamos una tabla que resuma la información que nos dan:

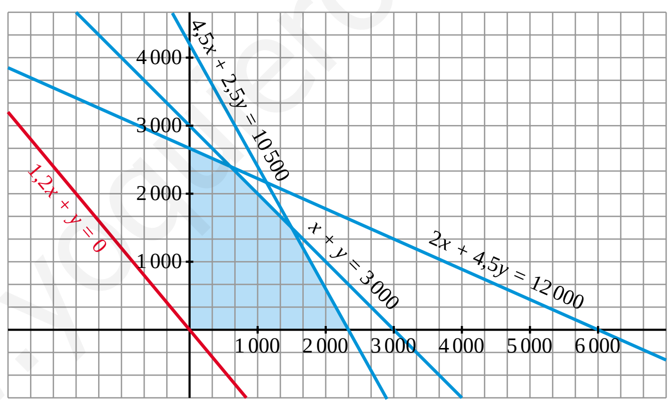
	Nº	PRECIO	SEGUROS	INMOBILIARIA	INDUSTRIAL
ACCIONES BBL	x	$10x$	$3,5x$	$4,5x$	$2x$
ACCIONES ISSA	y	$10y$	$3y$	$2,5y$	$4,5y$
TOTAL		$10x + 10y$	$3,5x + 3y$	$4,5x + 2,5y$	$2x + 4,5y$

• Las restricciones del problema son:

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 10x + 10y \leq 30\,000 \quad \to \quad x + y \leq 3\,000 \\ 2x + 4,5y \leq 12\,000 \\ 4,5x + 2,5y \leq 10\,500 \end{cases}$$

• La función que nos da los beneficios es $f(x, y) = 1,2x + y$. Tenemos que maximizarla, sujeta a las restricciones anteriores.

• Representamos el conjunto de restricciones y la recta $1,2x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 1,2x + y$:



• El máximo se alcanza en el punto de corte de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 3\,000 \\ 4,5x + 2,5y &= 10\,500 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 1\,500 \\ y &= 1\,500 \end{aligned}$$

Por tanto, debe adquirir 1 500 acciones de cada una de las dos sociedades.