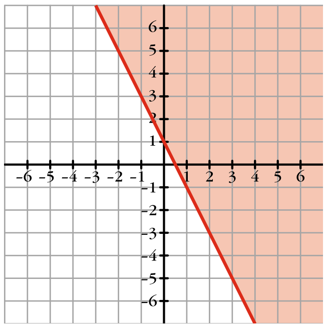
Programación Lineal

Ejercicio nº 1.-

a) Representa gráficamente las soluciones de la inecuación:

$$2x - y \leq 3$$

b) Averigua cuál es la inecuación cuyas soluciones corresponden al siguiente semiplano:

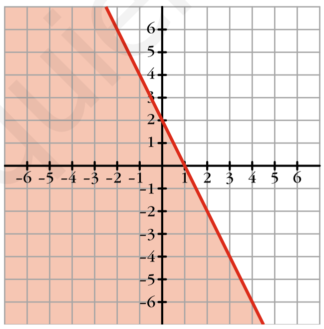


Ejercicio nº 2.-

a) Representa las soluciones de la inecuación:

$$2x + 2y \leq 1$$

b) Identifica la inecuación que corresponde al siguiente semiplano:

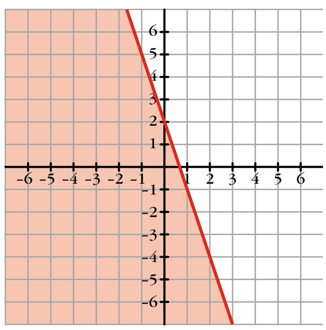


Ejercicio nº 3.-

a) Haz una representación gráfica de las soluciones de la siguiente inecuación:

$$x + 2y \geq 4$$

b) Halla la siguiente inecuación cuyas soluciones vienen representadas por:

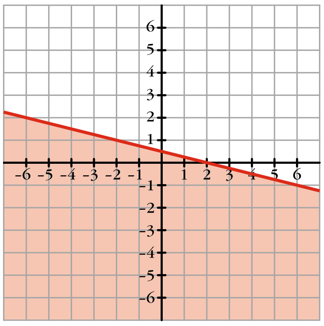


Ejercicio nº 4.-

a) Representa las soluciones de la siguiente inecuación:

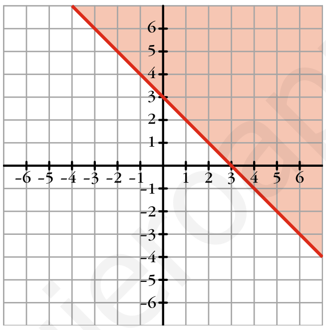
$$3x + 4y \geq 1$$

b) Identifica la inecuación cuyas soluciones corresponden al siguiente semiplano:



Ejercicio nº 5.-

a) Halla la inecuación que corresponde al siguiente semiplano:



b) Representa gráficamente las soluciones de la inecuación:

$$3x - y \leq 2$$

Ejercicio nº 6.-

a) Construye el recinto de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y \leq 120 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Los puntos (20, 10), (20, 0) y (20, 20), ¿forman parte de las soluciones del sistema anterior?

Ejercicio nº 7.-

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 6x - y \leq 1 \\ x + y \geq -1 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

b) Di si los puntos (0, 1), (0, 0) y (0, 3) son soluciones del sistema anterior.

Ejercicio nº 8.-

a) Dibuja el recinto formado por los puntos que cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} y \le 3 \\ y - x \ge 1 \\ y - 3x \le 0 \end{cases}$$

b) Indica si los puntos (0, 0), (2, 1) y (1, 2) forman parte de las soluciones del sistema anterior.

Ejercicio nº 9.-

a) Representa el recinto que cumple estas restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \le 9 \\ 2x + y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) Da tres puntos que sean solución del sistema anterior.

Ejercicio nº 10.-

a) Dibuja el recinto que cumple estas restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \le 15 \\ 5x + y \le 20 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

b) ¿Pertenecen los puntos (0, 6), (4, 0) y (5, 6) al conjunto de soluciones del sistema anterior?

Ejercicio nº 11.-

Halla el mínimo de la función $z = 3x + 2y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 3x + 4y \le 12 \\ 3x + 2y \ge 2 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Ejercicio nº 12.-

a) Dibuja el recinto definido por:

$$\begin{cases} -2x + y \le 3 \\ 2x - y \le 2 \\ x + 2y \le 4 \end{cases}$$

b) Halla los vértices del recinto anterior.

c) Halla el máximo de la función $z = 4y - x$, sujeta a las restricciones propuestas en a). ¿En qué punto del recinto alcanza dicho máximo?

Ejercicio nº 13.-

Halla el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$, en la región determinada por:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

Ejercicio nº 14.-

Maximiza la función $z = x + y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 26 \\ 4x + 3y \leq 44 \\ 2x + 3y \leq 28 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio nº 15.-

Maximiza la función $z = 150x + 100y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 600 \\ 2x + y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio nº 16.-

Cierto fabricante produce dos artículos, A y B, para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: sección de montaje y sección de pintura.
El artículo A requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos en la de pintura; y el artículo B, tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura.

La sección de montaje solo puede estar en funcionamiento nueve horas diarias, mientras que la de pintura solo ocho horas cada día. El beneficio que se obtiene produciendo el artículo B es de 40 euros y el de A es de 20 euros.

Calcula la producción diaria de los artículos A y B que maximiza el beneficio.

Ejercicio nº 17.-

Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 g de oro y 1,5 g de plata, vendiéndolas a 40 euros cada una. Para la fabricación de las de tipo B emplea 1,5 g de oro y 1 g de plata, y las vende a 50 euros. El orfebre tiene solo en el taller 750 g de cada uno de los metales.

Calcula cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo.

Ejercicio nº 18.-

Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas, *A* y *B*: La oferta *A* consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se venden a 30 euros; la oferta *B* consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta *A* ni menos de 10 de la *B*.

¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar la ganancia?

Ejercicio nº 19.-

En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia *A* y otras 15 de una sustancia *B*. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de una unidad de *A* y cinco de *B*, y el tipo II con una composición de cinco unidades de *A* y una de *B*. El precio del tipo I es de 10 euros y el del tipo II es de 30 euros. Se pregunta:
¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

Ejercicio nº 20.-

Una fábrica produce neveras utilitarias y de lujo. La fábrica esta dividida en dos secciones: montaje y acabado. Los requerimientos de trabajo vienen dados por la siguiente tabla:

	MONTAJE	ACABADO
UTILITARIA	3 horas	3 horas
LUJO	3 horas	6 horas

El máximo número de horas de trabajo disponibles diariamente es de 120 en montaje y 180 en acabado, debido a las limitaciones de operarios.
Si el beneficio es de 300 euros por cada nevera utilitaria y de 400 euros por cada nevera de lujo, ¿cuántas deben fabricarse diariamente de cada una para obtener el máximo beneficio?

Ejercicio nº 21.-

Un quiosco vende bolígrafos a 20 céntimos de euro y cuadernos a 30 céntimos de euro. Llevamos 120 céntimos de euro y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos, por lo menos. ¿Cuál será el número máximo de piezas que podemos comprar?

Ejercicio nº 22.-

En una pequeña empresa se fabrican diariamente solo dos tipos de aparatos, *A* y *B*. Como máximo pueden fabricarse 3 aparatos de cada tipo y, obligatoriamente, al menos un artículo del tipo *B*.
Indica todas las posibilidades de fabricación si se quieren obtener unas ventas superiores a 60 euros, teniendo en cuenta que los precios de los artículos *A* y *B* son de 30 y 10 euros, respectivamente.

Ejercicio nº 23.-

La casa *X* fabrica helados *A* y *B*, hasta un máximo diario de 1 000 kilos. La fabricación de un kilo de *A* cuesta 1,8 euros y uno de *B*, 1,5 euros. Calcula cuántos kilos de *A* y *B* deben fabricarse, sabiendo que la casa dispone de 2 700 euros /día y que un kilo de *A* deja un margen igual al 90% del que deja un kilo de *B*.

Ejercicio nº 24.-

Disponemos de 210 000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo *A* que rinden el 10% y las de tipo *B* que rinde el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130 000 euros en las de tipo *A* y, como mínimo, 6 000 euros en las de tipo *B*. además, queremos que la inversión en las del tipo *A* sea menor o igual que el doble de la inversión en *B*.

¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

Ejercicio nº25.-

Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias *A* y *B*. Un kilo de *A* contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero; un kilo de *B* tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos, respectivamente; y la cantidad de *A* es como mucho el doble que la de B.

Calcula los kilos de *A* y los de *B* que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de *A* vale 2 euros y uno de *B* 10 euros.
¿Puede eliminarse alguna restricción?

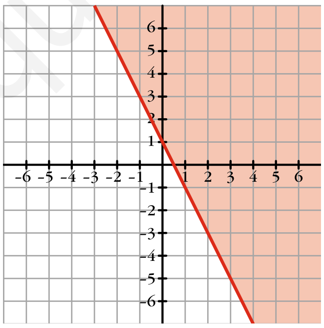
Soluciones Programación Lineal

Ejercicio nº 1.-

a) Representa gráficamente las soluciones de la inecuación:

$$2x - y \leq 3$$

b) Averigua cuál es la inecuación cuyas soluciones corresponden al siguiente semiplano:



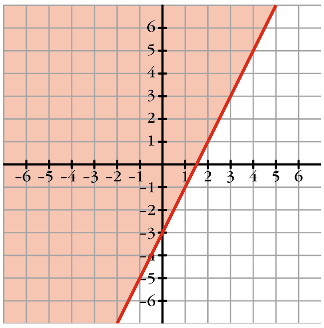
Solución:

a) Representamos la recta $2x - y = 3 \rightarrow y = 2x - 3$. Pasa por los puntos $(0, -3)$ y $(1, -1)$.

Para ver cuál de los dos semiplanos corresponde a las soluciones de la inecuación, sustituimos, por ejemplo, (0, 0):

$2 \cdot 0 - 0 = 0 \leq 3 \rightarrow (0, 0)$ sí es solución.

Por tanto, las soluciones son todos los puntos del siguiente semiplano:



b Escribimos la ecuación de la recta, localizando dos puntos de ella. Por ejemplo, (0, 1) y (1, –1).

La pendiente será: $m = \dfrac{-1-1}{1-0} = -2$

La ecuación de la recta es: $y - 1 = -2x \;\rightarrow\; y + 2x = 1$

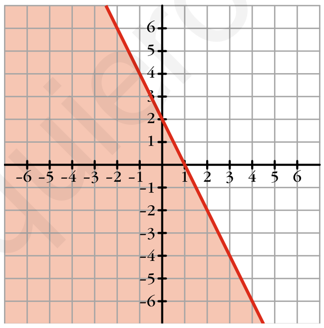
Como (0, 0) no es solución de la inecuación, deducimos que ha de ser: $y + 2x \geq 1$

Ejercicio nº 2.-

a) Representa las soluciones de la inecuación:

$\mathbf{2x + 2y \leq 1}$

b) Identifica la inecuación que corresponde al siguiente semiplano:



Solución:

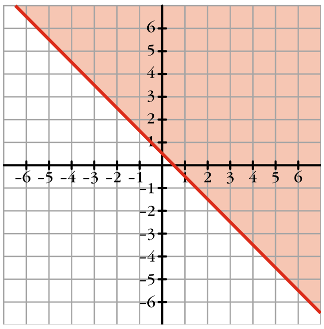
a) Representamos la recta $2x + 2y = 1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{1-2x}{2}$. Pasa por los puntos

$\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ y $\left(1, \dfrac{-1}{2}\right)$.

Para ver cuál de los dos semiplanos corresponde a las soluciones de la inecuación, sustituimos, por ejemplo, (0, 0):

$2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \leq 1 \;\rightarrow\;$ (0, 0) no es solución.

Por tanto, las soluciones son todos los puntos del siguiente semiplano:



b) Escribimos la ecuación de la recta, localizando dos puntos de ella. Por ejemplo (0, 2) y (1, 0).

La pendiente será: $m = \dfrac{0-2}{1-0} = -2$

La ecuación de la recta es: $y - 2 = -2x \rightarrow y + 2x = 2$

Como (0, 0) es solución de la inecuación, deducimos que ha de ser:

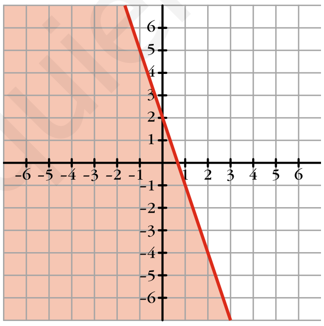
$y + 2x \le 2$

Ejercicio nº 3.-

a) Haz una representación gráfica de las soluciones de la siguiente inecuación:

$\boldsymbol{x + 2y \ge 4}$

b) Halla la siguiente inecuación cuyas soluciones vienen representadas por:



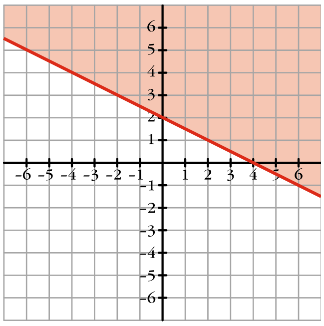
Solución:

a) Representamos la recta $x + 2y = 4 \rightarrow y = \dfrac{4-x}{2}$. Pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(2, 1)$.

Para ver cuál de los dos semiplanos corresponde a las soluciones de la inecuación, sustituimos, por ejemplo, (0, 0):

$0 + 2 \cdot 0 = 0 \le 4 \rightarrow$ (0, 0) no es solución.

Por tanto, las soluciones son todos los puntos del siguiente semiplano:



b) Escribimos la ecuación de la recta, localizando dos puntos de ella. Por ejemplo, (0, 2) y (1, –1).

La pendiente será: $m = \dfrac{-1-2}{1-0} = -3$

La ecuación de la recta es $y - 2 = -3x \rightarrow y + 3x = 2$

Como (0, 0) es solución de la inecuación, deducimos que ha de ser:

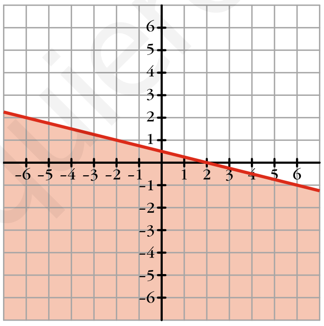
$y + 3x \leq 2$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

a) Representa las soluciones de la siguiente inecuación:

$\mathbf{3x + 4y \geq 1}$

b) Identifica la inecuación cuyas soluciones corresponden al siguiente semiplano:



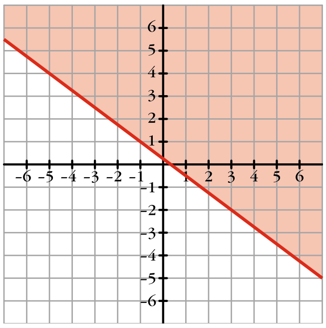
Solución:

a) Representamos la recta $3x + 4y = 1 \rightarrow y = \dfrac{1-3x}{4}$. Pasa por los puntos $(-1, 1)$ y $(3, -2)$.

Para ver cuál de los dos semiplanos corresponde a las soluciones de la inecuación, sustituimos, por ejemplo, (0, 0):

$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \leq 1 \rightarrow$ (0, 0) no es solución.

Por tanto, las soluciones son todos los puntos del siguiente semiplano:



b) Escribimos la ecuación de la recta, localizando dos puntos de ella. Por ejemplo (2, 0) y (–2, 1).

La pendiente será: $m = \dfrac{1-0}{-2-2} = \dfrac{-1}{4}$

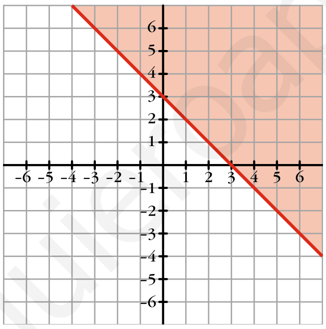
La ecuación de la recta es: $y = \dfrac{-1}{4}(x-2) \rightarrow 4y = -x + 2 \rightarrow 4y + x = 2$

Como (0, 0) es la solución de la inecuación, deducimos que ha de ser:

$4y + x \leq 2$

<u>Ejercicio nº 5.-</u>

a) Halla la inecuación que corresponde al siguiente semiplano:



b) Representa gráficamente las soluciones de la inecuación:

$\mathbf{3x - y \leq 2}$

Solución:

a) Escribimos la ecuación de la recta, localizando dos puntos. Por ejemplo (0, 3) y (3, 0).

La pendiente será: $m = \dfrac{0-3}{3-0} = -1$

La ecuación de la recta es: $y - 3 = -x \rightarrow y + x = 3$

Como (0, 0) no es solución de la inecuación, deducimos que ha de ser:

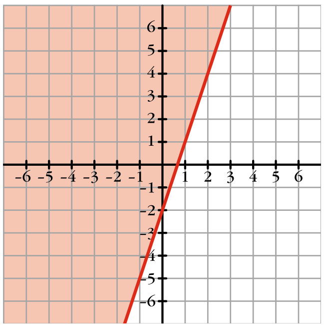
$y + x \geq 3$

b) Representamos la recta $3x - y = 2 \rightarrow y = 3x - 2$. Pasa por los puntos (0, –2) y (1, 1).

Para ver cuál de los dos semiplanos corresponde a las soluciones de la inecuación, sustituimos, por ejemplo, (0, 0):

$3 \cdot 0 - 0 = 0 \leq 2 \;\; \rightarrow \;\; (0, 0)$ sí es solución.

Por tanto, las soluciones son todos los puntos del siguiente semiplano:



Ejercicio nº 6.-

a) Construye el recinto de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 3y \leq 120 \\ 3x + 6y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

b) Los puntos (20, 10), (20, 0) y (20, 20), ¿forman parte de las soluciones del sistema anterior?

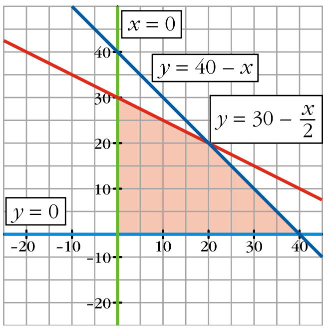
Solución:

a) Representamos las rectas

$$\begin{cases} 3x + 3y = 120 \;\rightarrow\; x + y = 40 \;\rightarrow\; y = 40 - x \\ 3x + 6y = 180 \;\rightarrow\; y = \dfrac{180 - 3x}{6} \;\rightarrow\; y = 30 - \dfrac{x}{2} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo el (0, 0), para comprobar cuáles son los puntos que cumplen las desigualdades propuestas.

El recinto buscado es:



b) A la vista de la gráfica anterior, tenemos que los tres puntos son soluciones del sistema.

Ejercicio nº 7.-

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 6x - y \le 1 \\ x + y \ge -1 \\ y \le 2 \end{cases}$$

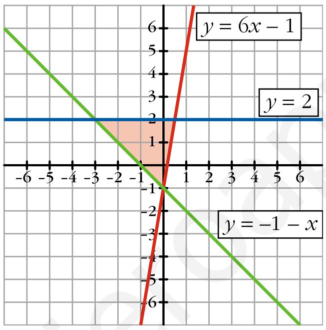
b) Di si los puntos (0, 1), (0, 0) y (0, 3) son soluciones del sistema anterior.

Solución:

a) Representamos las rectas $\begin{cases} 6x - y = 1 & \rightarrow \quad y = 6x - 1 \\ x + y = -1 & \rightarrow \quad y = -1 - x \\ y = 2 \end{cases}$

Tomamos un punto cualquiera; por ejemplo el (0, 0), para comprobar cuáles son los puntos que cumplen las desigualdades propuestas.

El recinto buscado es:



b) A la vista de la gráfica anterior, tenemos que (0, 1) sí es solución del sistema, (0, 0) también lo es, pero (0, 3) no.

Ejercicio nº 8.-

a) Dibuja el recinto formado por los puntos que cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} y \le 3 \\ y - x \ge 1 \\ y - 3x \le 0 \end{cases}$$

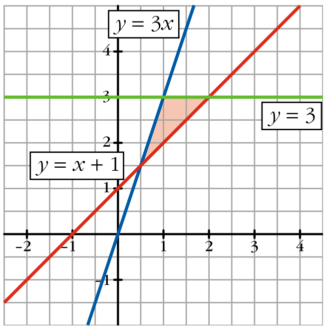
b) Indica si los puntos (0, 0), (2, 1) y (1, 2) forman parte de las soluciones del sistema anterior.

Solución:

a) Representamos las rectas $\begin{cases} y = 3 \\ y - x = 1 & \rightarrow \quad y = x + 1 \\ y - 3x = 0 & \rightarrow \quad y = 3x \end{cases}$

Tomamos un punto cualquiera; por ejemplo el (1, 0), para comprobar cuáles son los puntos que cumplen las desigualdades propuestas.

El recinto buscado es:



b) A la vista de la gráfica anterior, tenemos que $(0, 0)$ y $(2, 1)$ no son soluciones del sistema, pero $(1, 2)$ sí lo es.

Ejercicio nº 9.-

a) Representa el recinto que cumple estas restricciones:

$$\begin{cases} x + 3y \le 9 \\ 2x + y \le 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

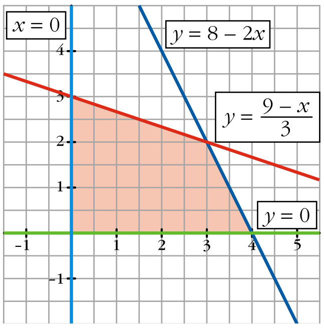
b) Da tres puntos que sean solución del sistema anterior.

Solución:

a) Representamos las rectas $\begin{cases} x + 3y = 9 & \rightarrow & y = \dfrac{9 - x}{3} \\ 2x + y = 8 & \rightarrow & y = 8 - 2x \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Tomamos un punto cualquiera, por ejemplo el $(0, 0)$, para comprobar cuáles son los puntos que cumplen las desigualdades propuestas.

El recinto buscado es:



b) Por ejemplo: $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(2, 0)$.

Ejercicio nº 10.-

a) Dibuja el recinto que cumple estas restricciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y \le 15} \\ \boldsymbol{5x + y \le 20} \\ \boldsymbol{x \ge 0} \\ \boldsymbol{y \ge 0} \end{cases}$$

b) ¿Pertenecen los puntos (0, 6), (4, 0) y (5, 6) al conjunto de soluciones del sistema anterior?

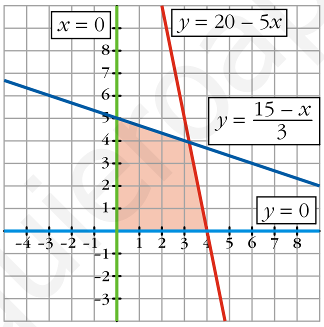
Solución:

a) Representamos la recta $x + 3y = 15 \rightarrow y = \dfrac{15 - x}{3}$ y tomamos un punto cualquiera; por ejemplo el (0, 0), para comprobar cuáles son los puntos que cumplen

$x + 3y \le 15.$

Hacemos lo mismo con las rectas $\begin{cases} 5x + y = 20 \rightarrow y = 20 - 5x \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

El recinto buscado es:



b) A la vista del dibujo obtenido en a), tenemos que (0, 6) no es solución; (4, 0) sí lo es y (5, 6) no.

Ejercicio nº 11.-

Halla el mínimo de la función $z = 3x + 2y$ con las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{3x + 4y \le 12} \\ \boldsymbol{3x + 2y \ge 2} \\ \boldsymbol{x \ge 0} \\ \boldsymbol{y \ge 0} \end{cases}$$

Solución:

• Representamos las rectas $\begin{cases} 3x + 4y = 12 \rightarrow y = \dfrac{12 - 3x}{4} \\ 3x + 2y = 2 \rightarrow y = \dfrac{2 - 3x}{2} \end{cases}$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \ge 0$ e $y \ge 0$.

Los vértices de dicha región son los puntos:

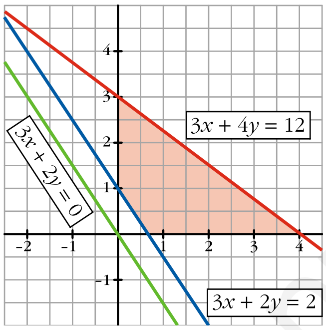
$$(0, 1);\ (0, 3);\ (4, 0)\ \text{ y }\ \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

- Representamos la dirección de las rectas $z = 3x + 2y$, dibujando lo que pase por el origen de coordenadas: $3x + 2y = 0$

- Observamos que la recta $3x + 2y = 0$ y la recta $3x + 2y = 2$ son paralelas. Por tanto, el mínimo se alcanza en todos los puntos del segmento que une $(0, 1)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

Este mínimo vale:

$$z = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$



Ejercicio nº 12.-

a) Dibuja el recinto definido por:

$$\begin{cases} -2x + y \leq 3 \\ 2x - y \leq 2 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

b) Halla los vértices del recinto anterior.

c) Halla el máximo de la función $z = 4y - x$, sujeta a las restricciones propuestas en a). ¿En qué punto del recinto alcanza dicho máximo?

Solución:

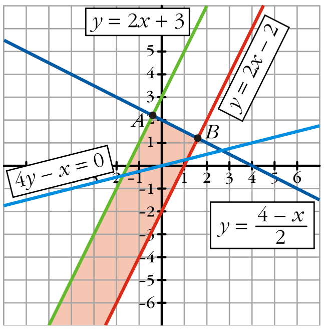
- Representamos las rectas $\begin{cases} -2x + y = 3 \rightarrow y = 2x + 3 \\ 2x - y = 2 \rightarrow y = 2x - 2 \\ x + 2y = 4 \rightarrow y = \dfrac{4 - x}{2} \end{cases}$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema.

- Los vértices del recinto son los puntos:

$$A\left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}\right) \quad \text{y} \quad B\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

- Representamos la dirección de las rectas $z = 4y - x$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas: $4y - x = 0$



El máximo se alcanza en el punto $A\left(\frac{-2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ y vale:

$$z = 4 \cdot \frac{11}{5} - \left(\frac{-2}{5}\right) = \frac{44}{5} + \frac{2}{5} = \frac{46}{5} = 9{,}2$$

Ejercicio nº 13.-

Halla el máximo y el mínimo de la función $z = x + y$, en la región determinada por:

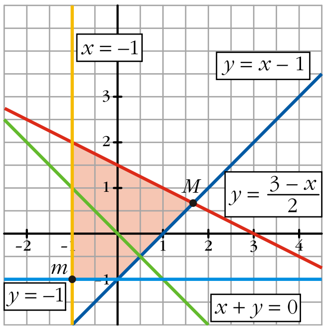
$$\begin{cases} x + 2y \le 3 \\ x - y \le 1 \\ x \ge -1 \\ y \ge -1 \end{cases}$$

Solución:

- Representamos las rectas $\begin{cases} x + 2y = 3 \;\rightarrow\; y = \dfrac{3-x}{2} \\ x - y = 1 \;\rightarrow\; y = x - 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

  y hallamos la región que cumple las condiciones del problema.

- Representamos la dirección de las rectas $z = x + y$, dibujando lo que pasa por el origen de coordenadas: $x + y = 0$



- El mínimo se alcanza en el punto $m(-1, -1)$ y vale $z = -1 - 1 = -2$.

- El máximo se alcanza en el punto M, intersección de las rectas $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$; es decir,

  en $M\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$; y vale $z=\dfrac{5}{3}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}$.

<u>Ejercicio nº 14.-</u>

Maximiza la función $z=x+y$, sujeta a las siguientes restricciones:

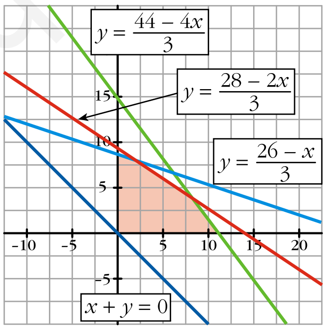
$$\begin{cases} \mathbf{x+3y \le 26} \\ \mathbf{4x+3y \le 44} \\ \mathbf{2x+3y \le 28} \\ \mathbf{x \ge 0} \\ \mathbf{y \ge 0} \end{cases}$$

Solución:

- Representamos las rectas $\begin{cases} x+3y=26 & \rightarrow & y=\dfrac{26-x}{3} \\ 4x+3y=44 & \rightarrow & y=\dfrac{44-4x}{3} \\ 2x+3y=28 & \rightarrow & y=\dfrac{28-2x}{3} \end{cases}$

  y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \ge 0$ e $y \ge 0$.

- Representamos la dirección de las rectas $z=x+y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas: $x+y=$ 0



El punto M, intersección de $\begin{cases} 4x+3y=44 \\ 2x+3y=28 \end{cases}$ es decir, $M(8, 4)$, es el que proporciona

el máximo, que vale: $z=8+4=12$

Ejercicio nº 15.-

Maximiza la función $z = 150x + 100y$, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y \le 600 \\ 2x + y \le 480 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Solución:

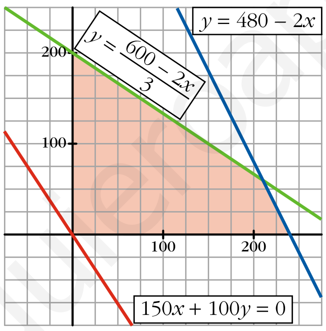
• Representamos las rectas $\begin{cases} 2x + 3y = 600 \;\rightarrow\; y = \dfrac{600 - 2x}{3} \\ 2x + y = 480 \;\rightarrow\; y = 480 - 2x \end{cases}$

y hallamos la región que cumple las condiciones del problema, teniendo en cuenta que $x \ge 0$ e $y \ge 0$.

Los vértices de dicha región son los puntos:

(0, 0); (0, 200); (240, 0) y (210, 60)

- Representamos la dirección de las rectas $z = 150x + 100y$, dibujando la que pasa por el origen de coordenadas: $150x + 100y = 0$



- El máximo se encuentra en el vértice (210, 60), en el que $z = 150 \cdot 210 + 100 \cdot 60 =$ $= 37\,500$.

Ejercicio nº 16.-

Cierto fabricante produce dos artículos, *A* y *B*, para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: sección de montaje y sección de pintura.
El artículo *A* requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos en la de pintura; y el artículo *B*, tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura.

La sección de montaje solo puede estar en funcionamiento nueve horas diarias, mientras que la de pintura solo ocho horas cada día. El beneficio que se obtiene produciendo el artículo *B* es de 40 euros y el de *A* es de 20 euros.

Calcula la producción diaria de los artículos *A* y *B* que maximiza el beneficio.

Solución:

Llamamos x a la producción diaria de artículos A e y a la de artículos B. Resumimos los datos en una tabla:

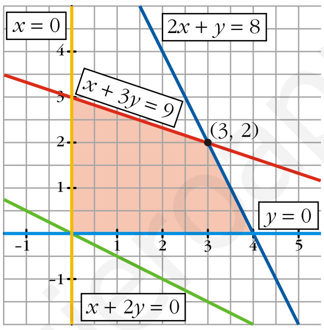
	CANTIDAD	MONTAJE	PINTURA	BENEFICIO
A	x	x horas	$2x$ horas	$20x$
B	y	$3y$ horas	y horas	$40y$
TOTAL		$x + 3y$	$2x + y$	$20x + 40y$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 9 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da el beneficio es $z = 20x + 40y = 20(x + 2y)$. Debemos obtener el máximo de esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $20(x + 2y) = 0 \rightarrow$ $x + 2y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 20x + 40y$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas $\left.\begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ 2x + y = 8 \end{array}\right\}$;

es decir, en $(3, 2)$.

Por tanto, deben producirse 3 unidades de A y 2 de B. En este caso, el beneficio será de $z = 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 140$ euros.

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo *A* precisan 1 g de oro y 1,5 g de plata, vendiéndolas a 40 euros cada una. Para la fabricación de las de tipo *B* emplea 1,5 g de oro y 1 g de plata, y las vende a 50 euros. El orfebre tiene solo en el taller 750 g de cada uno de los metales.

Calcula cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo.

Solución:

Llamamos x al número de joyas del tipo A e y al número de joyas del tipo B. Resumimos los datos en una tabla:

	CANTIDAD	ORO	PLATA	INGRESOS
TIPO A	x	x	$1{,}5x$	$40x$
TIPO B	y	$1{,}5y$	y	$50y$
TOTAL		$x + 1{,}5y$	$1{,}5x + y$	$40x + 50y$

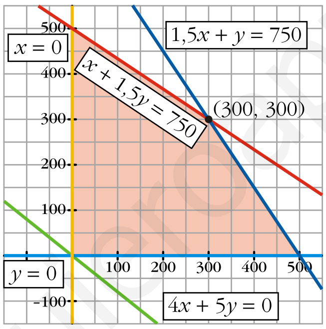
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + 1{,}5y \leq 750 \\ 1{,}5x + y \leq 750 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da los ingresos es $z = 40x + 50y = 10(4x + 5y)$.

Debemos hacer máxima esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $10(4x + 5y) = 0 \;\rightarrow$
$4x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 10(4x + 5y)$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de la rectas: $\left.\begin{matrix} x + 1{,}5y = 750 \\ 1{,}5x + y = 750 \end{matrix}\right\}$;

es decir, en $(300,\ 300)$.

Por tanto, ha de fabricar 300 joyas del tipo A y 300 del tipo B para obtener el máximo beneficio. Los ingresos en este caso serían $z = 40 \cdot 300 + 50 \cdot 300 = 27\,000$ euros.

<u>Ejercicio nº 18.-</u>

Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello, lanzan dos ofertas, A y B: La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se venden a 30 euros; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 euros. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la B.

¿Cuántos lotes han de vender de cada tipo para maximizar la ganancia?

Solución:

Llamamos x al número de lotes de A e y al número de lotes de B.
Resumimos los datos en una tabla:

	Nº LOTES	CAMISAS	PANTALONES	INGRESOS
A	x	x	x	$30x$
B	y	$3y$	y	$50y$
TOTAL		$x + 3y$	$x + y$	$30x + 50y$

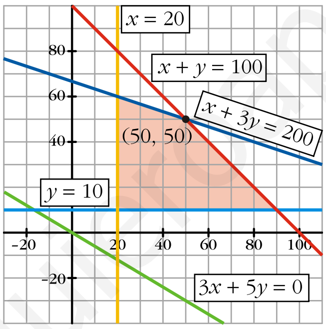
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 200 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 20 \\ y \geq 10 \end{cases}$$

Maximizar las ganancias equivale a maximizar los ingresos.

La función que nos da los ingresos es $z = 30x + 50y = 10(3x + 5y)$. Debemos obtener el máximo de esta función sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $30x + 50y = 10(3x + 5y) = 0 \;\rightarrow\; 3x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 30x + 50y$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 200 \\ x + y = 100 \end{array}\right\}$;

es decir, en $(50, 50)$.

Por tanto, se deben hacer 50 lotes de la oferta *A* y 50 de la *B*. Los ingresos en este caso serían de $z = 30 \cdot 50 + 50 \cdot 50 = 4000$ euros.

Ejercicio nº 19.-

En una granja de pollos se da una dieta "para engordar" con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia *A* y otras 15 de una sustancia *B*. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo I con una composición de una unidad de *A* y cinco de *B*, y el tipo II con una composición de cinco unidades de *A* y una de *B*. El precio del tipo I es de 10 euros y el del tipo II es de 30 euros. Se pregunta:
¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

Solución:

Llamamos x a las unidades que se compran de tipo I e y a las que se compran de tipo II. Resumamos los datos en una tabla:

	COMPRAN	UNIDADES DE SUSTANCIA A	UNIDADES DE SUSTANCIA B	PRECIO
TIPO I	x	x	x	$10x$
TIPO II	y	$5y$	y	$30y$
TOTAL		$x + 5y$	$5x + y$	$10x + 30y$

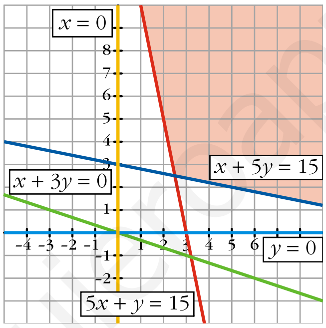
Las restricciones son:

$$\begin{cases} x+5y \geq 15 \\ 5x+y \geq 15 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es $z = 10x + 30y = 10(x + 3y)$.

Debemos hacer mínima esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones, y la recta $10(x + 3y) = 0 \rightarrow$ $x + 3y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 10(x + 3y)$.



El mínimo se alcanza en el punto de intersección de $\begin{cases} x+5y=15 \\ 5x+y=15 \end{cases}$; es decir, en (2,5; 2,5).

Por tanto, hay que comprar 2,5 de tipo I y 2,5 de tipo II.

El precio en este caso será de $z = 10(2{,}5 + 3 \cdot 2{,}5) = 100$ euros.

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

Una fábrica produce neveras utilitarias y de lujo. La fábrica esta dividida en dos secciones: montaje y acabado. Los requerimientos de trabajo vienen dados por la siguiente tabla:

	MONTAJE	ACABADO
UTILITARIA	**3 horas**	**3 horas**
LUJO	**3 horas**	**6 horas**

El máximo número de horas de trabajo disponibles diariamente es de 120 en montaje y 180 en acabado, debido a las limitaciones de operarios.
Si el beneficio es de 300 euros por cada nevera utilitaria y de 400 euros por cada nevera de lujo, ¿cuántas deben fabricarse diariamente de cada una para obtener el máximo beneficio?

Solución:

Llamamos x al nº de neveras utilitarias e y al nº de neveras de lujo. Resumimos los datos en una tabla:

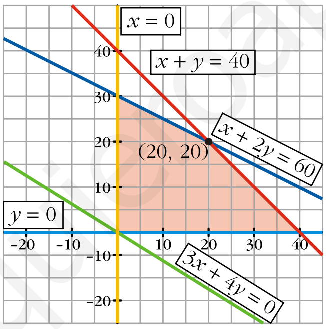
	FABRICAN	MONTAJE	ACABADO	BENEFICIO
UTILITARIA	x	$3x$	$3x$	$300x$
LUJO	y	$3y$	$6y$	$400y$
TOTAL		$3x + 3y$	$3x + 6y$	$300x + 400y$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 3x + 3y \leq 120 & \rightarrow \quad x + y \leq 40 \\ 3x + 6y \leq 180 & \rightarrow \quad x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da el beneficio es $z = 300x + 400y = 100(3x + 4y)$. Debemos obtener el máximo de esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $100(3x + 4y) = 0 \rightarrow$ $3x + 4y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 300x + 400y$:



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas: $\left.\begin{array}{r} x + y = 40 \\ x + 2y = 60 \end{array}\right\}$;

es decir, en (20, 20).

Por tanto, deben fabricarse 20 neveras de cada uno de los dos tipos. El beneficio será

$z = 300 \cdot 20 + 400 \cdot 20 = 14\,000$ euros.

<u>Ejercicio nº 21.-</u>

Un quiosco vende bolígrafos a 20 céntimos de euro y cuadernos a 30 céntimos de euro. Llevamos 120 céntimos de euro y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos, por lo menos. ¿Cuál será el número máximo de piezas que podemos comprar?

Solución:

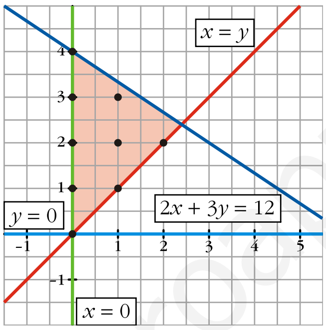
Llamamos x al número de bolígrafos e y al número de cuadernos.
Tenemos que:

	PIEZAS	PRECIO
BOLÍGRAFOS	x	$20x$
CUADERNOS	y	$30y$
TOTAL	$x + y$	$20x + 30y$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 20x + 30y \le 120 \quad \rightarrow \quad 2x + 3y \le 12 \\ x \le y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x,\ y \ \text{enteros} \end{cases}$$

Dibujamos el recinto correspondiente. Las posibles soluciones son los puntos que aparecen señalados:



Debemos hacer máximo el número de piezas, es decir, debemos maximizar $z = x + y$. Vemos que hay tres puntos que hacen máxima esta suma: (0, 4), (1, 3) y (2, 2). El número máximo de piezas que podemos comprar es 4.

Ejercicio nº 22.-

En una pequeña empresa se fabrican diariamente solo dos tipos de aparatos, *A* y *B*. Como máximo pueden fabricarse 3 aparatos de cada tipo y, obligatoriamente, al menos un artículo del tipo *B*. Indica todas las posibilidades de fabricación si se quieren obtener unas ventas superiores a 60 euros, teniendo en cuenta que los precios de los artículos *A* y *B* son de 30 y 10 euros, respectivamente.

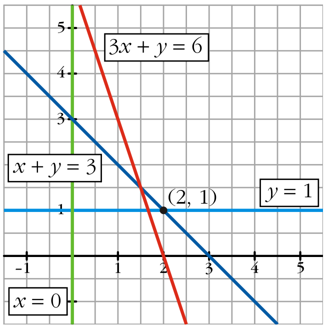
Solución:

Llamamos x al número de aparatos de tipo A e y al número de aparatos de tipo B que podemos fabricar.

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 3 \\ x \ge 0 \\ y \ge 1 \\ 30x + 10y \ge 60 \quad \rightarrow \quad 3x + y \ge 6 \\ x \ \text{e} \ y \ \text{enteros(naturales)} \end{cases}$$

Representamos el conjunto de restricciones:



Observamos que la única solución posible es fabricar 2 aparatos de tipo A y 1 de tipo B. La venta es entonces de $2 \cdot 30 + 1 \cdot 10 = 70$ euros.

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

La casa X fabrica helados A y B, hasta un máximo diario de 1 000 kilos. La fabricación de un kilo de A cuesta 1,8 euros y uno de B, 1,5 euros. Calcula cuántos kilos de A y B deben fabricarse, sabiendo que la casa dispone de 2 700 euros /día y que un kilo de A deja un margen igual al 90% del que deja un kilo de B.

Solución:

Llamamos x a los kilos de A e y a los de B. Sea m el margen de B; entonces el de A es $0{,}9m$.

Resumimos los datos en una tabla:

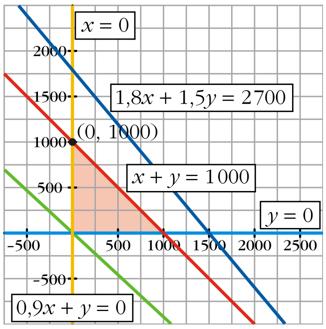
	CANTIDAD	COSTE	MARGEN
A	x	$1{,}8x$	$0{,}9mx$
B	y	$1{,}5y$	my
TOTAL	$x + y$	$1{,}8x + 1{,}5y$	$0{,}9mx + my$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 1000 \\ 1{,}8x + 1{,}5y \le 2700 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

El margen total es $z = 0{,}9mx + mx = m(0{,}9x + y)$. Esta es la función que debemos maximizar, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $m(0{,}9x + y) = 0 \;\rightarrow$ $0{,}9x + y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = m(0{,}9x + y)$.



Observamos que $1{,}8x + 1{,}5y \leq 2700$ no impone ninguna restricción nueva. El máximo se alcanza en el punto M (0, 1000).

Por tanto, deben fabricarse 1000 kilos de helado de tipo B y nada de tipo A.

Ejercicio nº 24.-

Disponemos de 210000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A que rinden el 10% y las de tipo B que rinde el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130000 euros en las de tipo A y, como mínimo, 6000 euros en las de tipo B. además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B.

¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener máximo interés anual?

Solución:

Llamamos x al dinero que invertimos en acciones de tipo A e y al que invertimos en las de tipo B.

Resumimos los datos en una tabla:

	INVERSIÓN	RENDIMIENTO
A	x	$0{,}1x$
B	y	$0{,}08y$
TOTAL	$x + y$	$0{,}1x + 0{,}08y$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \leq 210000 \\ x \leq 130000 \\ y \geq 6000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

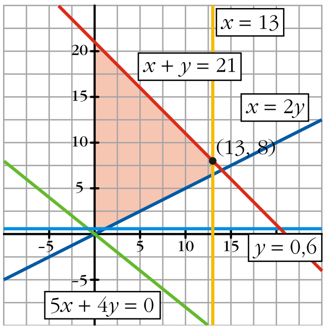
La función que nos da el rendimiento total es:

$$z = 0{,}1x + 0{,}08y = \frac{1}{100}(10x + 8y) = \frac{2}{100}(5x + 4y) = \frac{1}{50}(5x + 4y).$$

Debemos maximizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones (la unidad es 10000) y la recta $\frac{1}{50}(5x+4y)=0 \quad \rightarrow \quad 5x+4y=0,$ que nos da la dirección de las rectas

$z=\frac{1}{50}(5x+4y).$



El máximo se alcanza en el punto (13, 8).

Por tanto, debemos invertir 130 000 euros en acciones del tipo *A* y 80 000 euros en las de tipo *B*. En este caso, el beneficio anual será de

$$z=\frac{1}{50}(5\cdot 130000+4\cdot 80000)=19\,400 \text{ euros}.$$

Ejercicio nº25.-

Se desea obtener tres elementos químicos a partir de las sustancias *A* y *B*. Un kilo de *A* contiene 8 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero; un kilo de *B* tiene 4 gramos del primer elemento, 1 gramo del segundo y 2 del tercero. Se desea obtener al menos 16 gramos del primer elemento y las cantidades del segundo y del tercero han de ser como mucho 5 y 20 gramos, respectivamente; y la cantidad de *A* es como mucho el doble que la de B.

Calcula los kilos de *A* y los de *B* que han de tomarse para que el coste sea mínimo si un kilo de *A* vale 2 euros y uno de *B* 10 euros.
¿Puede eliminarse alguna restricción?

Solución:

Llamamos *x* a los kilos de *A* e *y* a los de *B*.

Resumimos los datos en una tabla:

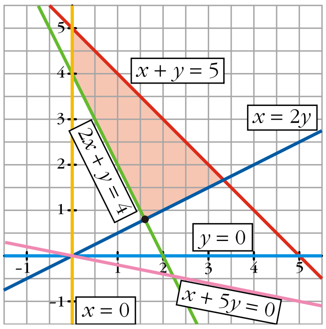
	KILOS	1er ELEMENTO	2º ELEMENTO	3er ELEMENTO	COSTE
A	*x*	8*x* gramos	*x* horas	2*x* gramos	2*x*
B	*y*	4*y* gramos	*y* horas	2*y* gramos	10*y*
TOTAL		8*x* – 4*y*	*x* + *y*	2*x* + 2*y*	2*x* + 10*y*

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 8x+4y \geq 16 \quad \rightarrow \quad 2x+y \geq 4 \\ x+y \leq 5 \\ 2x+2y \leq 20 \quad \rightarrow \quad x+y \leq 10 \quad \text{(Esta se puede eliminar pues, si } x+y \leq 5, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{necesariamente, } x+y \leq 10) \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da el coste es $z = 2x + 10y = 2(x + 5y)$. Debemos minimizar esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $2(x + 5y) = 0 \rightarrow x + 5y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 2x + 10y$.



El mínimo se alcanza en el punto de intersección de las rectas $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ x = 2y \end{array}\right\}$;

es decir, en $(1{,}6;\ 0{,}8)$.

Por tanto, han de comprarse 1,6 kilos de A y 0,8 de B. El coste en este caso será de $z = 2 \cdot 1{,}6 + 10 \cdot 0{,}8 = 11{,}2$ euros.