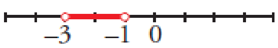
CUADERNILLO DE RECUPERACIÓN 1º BACHILLERATO

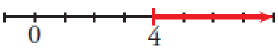
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: NÚMEROS REALES

3. **Representa los siguientes conjuntos:**

a) $(-3, -1)$ **b)** $[4, +\infty)$ **c)** $(3, 9]$ **d)** $(-\infty, 0)$

a) 

b) 

c) 

d) 

1. **Simplifica:**

a) $\sqrt[12]{x^9}$ **b)** $\sqrt[12]{x^8}$ **c)** $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$ **e)** $\sqrt[9]{64}$ **f)** $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$ b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$ d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[9]{64} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

5. **Reduce:**

a) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}$ **b)** $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{3}$ **c)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$ **d)** $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[15]{2^5}\cdot\sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3}\cdot\sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3\cdot(2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

10. **Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:**

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

c) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

b) $\dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{(x+y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y} = \dfrac{x\sqrt{x}-x\sqrt{y}+y\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$

c) $\dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \dfrac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(a-1)} = \sqrt{a}+1$

d) $\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} = \dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

4. **Sabiendo que $log_5 A = 1{,}8$ y $log_5 B = 2{,}4$, calcula:**

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}}$ b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $log_5 \sqrt[3]{\dfrac{A^2}{25B}} = \dfrac{1}{3}\,[2\,log_5 A - log_5 25 - log_5 B] = \dfrac{1}{3}\,[2 \cdot 1{,}8 - 2 - 2{,}4] = \dfrac{-0{,}8}{3} \approx -0{,}27$

b) $log_5 \dfrac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = log_5 5 + \dfrac{3}{2}\,log_5 A - 2\,log_5 B = 1 + \dfrac{3}{2} \cdot 1{,}8 - 2 \cdot 2{,}4 = 1 + 2{,}7 - 4{,}8 = -1{,}1$

Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$ b) $\dfrac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\dfrac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$ d) $\dfrac{a^{-3}\, b^{-4}\, c^7}{a^{-5}\, b^2\, c^{-1}}$

a) $\dfrac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \dfrac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \dfrac{80}{27}$

c) $\dfrac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \dfrac{1}{2^8 \cdot 3} = \dfrac{1}{768}$ d) $\dfrac{c^7\, a^5\, c}{a^3\, b^4\, b^2} = \dfrac{a^2\, c^8}{b^6}$

Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \dfrac{3}{2}\sqrt{80}$ b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \dfrac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$ d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

Expresa en forma de intervalo en cada caso:

a) $|x| \geq 8$
b) $|x - 4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$

b) $(-1, 9)$

Reduce:

$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$

$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7} + \sqrt{5^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

TEMA 2: POLINOMIOS

1. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios:

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 4) : (x + 1)$

b) $(5x^5 + 14x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x + 3)$

c) $(2x^3 - 15x - 8) : (x - 3)$

a)

	1	–3	2	4
–1		–1	4	–6
	1	–4	6	$\boxed{-2}$

Cociente: $x^2 - 4x + 6$

Resto: -2

b)

	5	14	–5	–4	5	–2
–3		–15	3	6	–6	3
	5	–1	–2	2	–1	$\boxed{1}$

Cociente: $5x^4 - x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

Resto: 1

c)

	2	0	–15	–8
3		6	18	9
	2	6	3	$\boxed{1}$

Cociente: $2x^2 + 6x + 3$

Resto: 1

1. Descompón en factores este polinomio: $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12$

	1	–4	7	–12	12
2		2	–4	6	–12
	1	–2	3	–6	$\boxed{0}$
2		2	0	6	
	1	0	3	$\boxed{0}$	

$$x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 12 = (x - 2)^2 (x^2 + 3)$$

1. Simplifica:

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x}$

b) $\dfrac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

c) $\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

d) $\dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2}$

a) $\dfrac{x^3 - 4x}{x^2 - 2x} = \dfrac{x(x^2 - 4)}{x(x - 2)} = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = x + 2$

b)

	1	–7	16	–12
3		3	–12	12
	1	–4	4	$\boxed{0}$

$$\frac{4x - 12}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} = \frac{4(x - 3)}{(x - 3)(x^2 - 4x + 4)} = \frac{4}{x^2 - 4x + 4}$$

c) $\dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$ $\begin{cases} \dfrac{-2 + 4}{2} = 1 \\ \dfrac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{x - 1}{x + 3}$$

d) $\dfrac{x^4}{x^3 + 3x^2} = \dfrac{x^2 \cdot x^2}{x^2(x + 3)} = \dfrac{x^2}{x + 3}$

TEMA 3 ECUACIONES E INECUACIONES

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

a) $x^2 = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \begin{cases} 4 \rightarrow x = \pm 2 \\ -3 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$ 2 y −2

b) $x^2 = \dfrac{8 \pm \sqrt{64+36}}{2} = \dfrac{8 \pm 10}{2} \begin{cases} 9 \rightarrow x = \pm 3 \\ -1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$ 3 y −3

3. Resuelve:

a) $-\sqrt{2x-3} + 1 = x$

b) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} = 4$

c) $2 + \sqrt{x} = x$

d) $2 - \sqrt{x} = x$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

a) $1 - x = \sqrt{2x-3}$

$1 + x^2 - 2x = 2x - 3;\ x^2 - 4x + 4 = 0;\ x = 2$ (no vale)

No tiene solución.

b) $2x - 3 = 16 + x + 7 + 8\sqrt{x+7}$

$x - 26 = 8\sqrt{x+7}$

$x^2 + 676 - 52x = 64(x+7)$

$x^2 + 676 - 52x = 64x + 448$

$x^2 - 116x + 228 = 0;\ x = \dfrac{116 \pm 112}{2} \begin{cases} 114 \\ 2 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 114$

c) $\sqrt{x} = x - 2;\ x = x^2 + 4 - 4x;\ 0 = x^2 - 5x + 4$

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \rightarrow \text{(no vale)} \end{cases}$

$x = 4$

d) $2 - x = \sqrt{x};\ 4 + x^2 - 4x = x;\ x^2 - 5x + 4 = 0$

$x = \begin{cases} 4 \rightarrow \text{(no vale)} \\ 1 \end{cases}$

$x = 1$

e) $\sqrt{3x+3} - 1 = \sqrt{8-2x}$

$3x + 3 = 1 + 8 - 2x + 2\sqrt{8-2x}$

$5x - 6 = 2\sqrt{8-2x}$

$25x^2 + 36 - 60x = 4(8 - 2x)$

$25x^2 - 52x + 4 = 0$

$x = \dfrac{52 \pm 48}{50} \begin{cases} x = 2 \\ x = 0{,}08 \rightarrow \text{no vale} \end{cases}$

Así, $x = 2$.

1. **Reconoce como escalonados y resuelve:**

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array} \right. \qquad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x = 7 \\ 2x - 3y = 8 \\ 3x + y - z = 12 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 7 \\ y = \dfrac{2x - 8}{3} = 2 \\ z = 3x + y - 12 = 21 + 2 - 12 = 11 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 7 \\ y = 2 \\ z = 11 \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 0 \\ 2y = -6 \\ 5x + y - z = 17 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y = \dfrac{-6}{2} = -3 \\ x = \dfrac{-4y}{3} = 4 \\ z = 5x + y - 17 = 20 - 3 - 17 = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 0 \end{array}$$

3. **Resuelve por el método de Gauss:**

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 6 \\ x - y - z = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a + 1.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2x + 2z = 8 \\ 2x = 2 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 4 - x = 3 \\ y = 2 - x - z = 2 - 1 - 3 = -2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{array}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 2x - y - z = 9 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 2.^a \end{array}} \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 3x - 3y = 6 \end{array} \right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a \\ 3.^a + 1.^a \end{array}} \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 14 \\ x - 2y + z = -3 \\ 5x = 20 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \dfrac{20}{5} = 4 \\ y = \dfrac{14 - 2x}{3} = 2 \\ z = -3 - x + 2y = -3 - 4 + 4 = -3 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{array}$$

4. **Resuelve:**

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{array} \right. \qquad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array} \right.$$

a) $\left.\begin{array}{l} 5x - 4y + 3z = 9 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a + 4 \cdot 2.^a \\ 2.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 2.^a \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} 13x - 5z = 13 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -2x + 10z = -2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 2 \cdot 1.^a + 3.^a \\ 2.^a \\ 3.^a : 2 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 24x = 24 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ -x + 5z = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ z = \dfrac{-1 + x}{5} = 0 \\ y = 1 - 2x + 2z = -1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{array}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 4x - 5y + 4z = 3 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a \end{array}$ $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 4z = -1 \\ 2x = 4 \\ 5x - 3z = 13 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ z = \dfrac{5x - 13}{3} = -1 \\ y = \dfrac{2x + 4z + 1}{5} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{5} \\ z = -1 \end{array}$

1. Resuelve estas inecuaciones:

a) $3x - 2 \le 10$ **b)** $x - 2 > 1$

c) $2x + 5 \ge 6$ **d)** $3x + 1 \le 15$

a) $3x - 2 \le 10 \rightarrow 3x \le 12 \rightarrow x \le 4$

Soluciones: $\{x \mid x \le 4\} = (-\infty, 4]$

b) $x - 2 > 1 \rightarrow x > 3$

Soluciones: $\{x \mid x > 3\} = (3, +\infty)$

c) $2x + 5 \ge 6 \rightarrow 2x \ge 1 \rightarrow x \ge \dfrac{1}{2}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \ge \dfrac{1}{2}\right\} = \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

d) $3x + 1 \le 15 \rightarrow 3x \le 14 \rightarrow x \le \dfrac{14}{3}$

Soluciones: $\left\{x \mid x \le \dfrac{14}{3}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{14}{3}\right]$

69 **Las dos cifras de un número suman 12. Si se in-vierte el orden de las mis-mas, se obtiene un número 18 unidades mayor. Calcula dicho nú-mero.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 12 \\ 10y + x = 18 + 10x + y \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 7 \end{array}$$

Es el número 57.

65 **Para la calificación de un curso, se decide que la primera evaluación cuente un 25%, la segunda, un 35%, y la tercera, un 40%. Una alumna ha tenido un 5 en la primera y un 7 en la segunda. ¿Qué nota tiene que conseguir en la tercera para que su calificación final sea 7?**

$0{,}25 \cdot 5 + 0{,}35 \cdot 7 + 0{,}40 \cdot x = 7$

$0{,}40x = 3{,}3$

$x = 8{,}25$

Ha de conseguir un 8,25.

TEMA 4 : FUNCIONES ELEMENTALES

1. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - x^2$ **b)** $y = \dfrac{3x}{(2x-6)^2}$

c) $y = \sqrt{4-2x}$ **d)** $y = \sqrt{5x - x^2}$

a) Al ser una función polinómica, su dominio es todo $\mathbb{R}$.

b) Su dominio es todo $\mathbb{R}$, salvo los puntos que anulan el denominador.

$$(2x-6)^2 = 0 \;\rightarrow\; 2x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 3$$

Por tanto: $Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Su dominio son los puntos que hacen que el radicando no sea negativo.

$$4 - 2x \geq 0 \;\rightarrow\; 2x \leq 4 \;\rightarrow\; x \leq \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto: $Dom\ y = (-\infty, 2]$

d) Al igual que en el apartado anterior:

$$5x - x^2 \geq 0 \;\rightarrow\; x(5-x) \geq 0$$

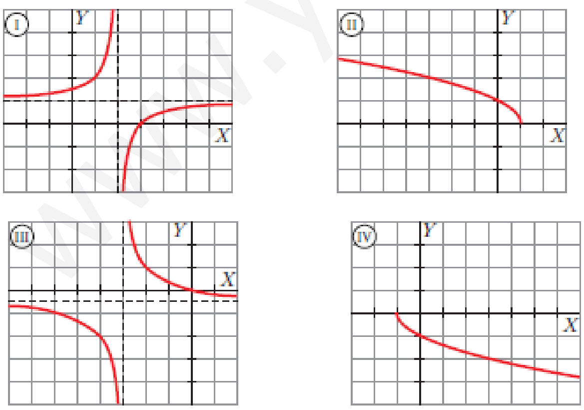
Esto ocurre si:

- $x \geq 0$ y $5 - x \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 0$ y $x \leq 5 \;\rightarrow\; x \in [0, 5]$
- $x \geq 0$ y $5 - x \leq 0 \;\rightarrow\; x \leq 0$ y $x \geq 5 \;\rightarrow$ Esto no es posible.

Por tanto: $Dom\ y = [0, 5]$

2. Asocia a cada una de las gráficas una de las siguientes expresiones:

a) $y = \sqrt{1-x}$ **b)** $y = \dfrac{-x}{2x+6}$ **c)** $y = -\sqrt{x+1}$ **d)** $y = \dfrac{x-3}{x-2}$



a) II

b) III

c) IV

d) I

TEMA 5: LÍMITES Y CONTINUIDAD

1. Calcula el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

a) $-\dfrac{3}{2}$

b) 0

2. Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$

b) -1

3. Calcula k para que la función $y = f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array}\right\} \quad 21 + k = 7 \ \to \ k = -14$$

1. Di el valor del límite cuando $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 0

e) 0

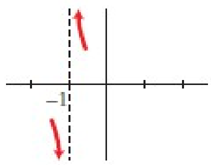
f) $-\infty$

1. Halla las asíntotas verticales y sitúa la curva respecto a ellas:

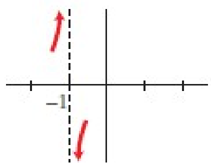
a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \ x = -1$ es asíntota vertical.



b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \ x = -1$ es asíntota vertical.

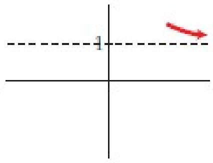


4. **Halla las ramas infinitas, $x \to +\infty$, de estas funciones. Sitúa la curva respecto a sus asíntotas, si las hay:**

a) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

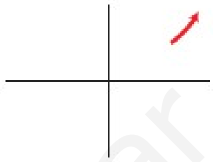
b) $y = \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \;\to\; y = 1$ es asíntota horizontal.



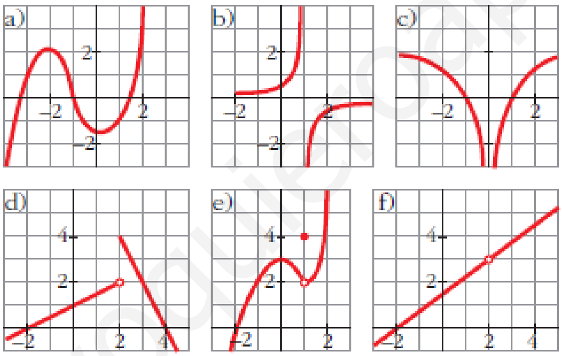
b) *grado de* P – *grado de* $Q \geq 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;\to$ rama parabólica hacia arriba.



1 **a) ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función continua?**

b) Señala, en cada una de las otras cinco, la razón de su discontinuidad.



a) Solo la a).

b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).

c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).

d) Salto en $x = 2$.

e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

f) No está definida en $x = 2$.

6 **Comprueba si la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **es continua en** $x = 0$.

☛ ***Recuerda que para que*** f ***sea continua en*** $x = 0$, ***debe verificarse que:***

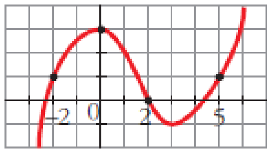
$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1 = f(0)$

Es continua en $x = 0$.

TEMA 6: DERIVADAS

1 **Calcula la tasa de variación media de esta función en los intervalos:**



a) [–2, 0] **b) [0, 2]** **c) [2, 5]**

a) T.V.M. $[-2, 0] = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \dfrac{3 - 1}{2} = 1$

b) T.V.M. $[0, 2] = \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \dfrac{0 - 3}{2} = -\dfrac{3}{2}$

c) T.V.M. $[2, 5] = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{1 - 0}{3} = \dfrac{1}{3}$

Reglas de derivación

Halla la función derivada de estas funciones y calcula su valor en los puntos que se indican:

15 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6; \quad x = 1$

$f'(x) = 6x^2 + 6x; \quad f'(1) = 12$

16 $f(x) = \dfrac{x}{3} + \sqrt{2}; \quad x = -\dfrac{17}{3}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}; \quad f'\left(-\dfrac{17}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

17 $f(x) = \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{x}{2}; \quad x = 2$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + 3x - \dfrac{1}{2}; \quad f'(2) = 6 + 6 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{2}$

18 $f(x) = \dfrac{1}{7x + 1}; \quad x = 0$

$f'(x) = \dfrac{-7}{(7x + 1)^2}; \quad f'(0) = -7$

19 $f(x) = \dfrac{2x}{x + 3}; \quad x = -1$

$f'(x) = \dfrac{6}{(x + 3)^2} \rightarrow f'(-1) = \dfrac{3}{2}$

20 $f(x) = \ln(3x - 1); \quad x = 3$

$f'(x) = \dfrac{3}{3x - 1} \rightarrow f'(3) = \dfrac{3}{8}$

21 $f(x) = sen\ 2x + cos\ 2x;\ \ x = \pi$

$f'(x) = 2cos\ x - 2sen\ 2x\ \rightarrow\ f'(\pi) = 2$

22 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}};\ \ x = 8$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}}\ \rightarrow\ f'(8) = \dfrac{-1}{16}$

23 $f(x) = x \cdot 2^{x+1};\ \ x = -1$

$f'(x) = 2^{x+1}\ ln\ (2)x + 2^{x+1}\ \rightarrow\ f'(-1) = -ln\ 2 + 1$

24 $f(x) = (5x-2)^3;\ \ x = \dfrac{1}{5}$

$f'(x) = 15(5x-2)^2\ \rightarrow\ f'\left(\dfrac{1}{5}\right) = 15$

25 $f(x) = \dfrac{x+5}{x-5};\ \ x = 3$

$f'(x) = \dfrac{-10}{(x-5)^2}\ \rightarrow\ f'(3) = \dfrac{-5}{2}$

26 $f(x) = x^2 + log\ x;\ \ x = \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = 2x + \dfrac{1}{x\ ln\ 10}\ \rightarrow\ f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \dfrac{2}{ln\ 10}$

27 $f(x) = e^{2x} \cdot ln\ (x^2+1);\ \ x = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}\left[ln\ (x^2+1) + \dfrac{x}{x^2+1}\right]\ \rightarrow\ f'(1) = 2e^2\left(ln\ 2 + \dfrac{1}{2}\right)$

Recta tangente

43 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$f'(x) = 2x - 5;\quad m = f'(2) = -1,\ f(2) = 0$

La recta es $y = -(x-2) = 2 - x$

44 **Escribe la ecuación de la recta tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.**

$f'(x) = -2x + 2;\quad m = f'(-1) = 4,\ f(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x+1) + 2 = 4x + 6$

60 **Comprueba que la función $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$:**

- **Tiene derivada nula en (0, 0).**
- **La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.**
- **Posición de la curva respecto a la asíntota:**

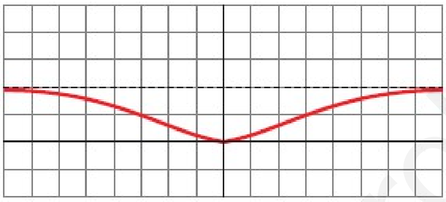
  Si $x \to -\infty$, $y < 2$. Si $x \to +\infty$, $y < 2$.

Represéntala.

- $f'(x) = \dfrac{4x(x^2+1) - 2x(2x^2)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $f'(0) = 0;\ f(0) = 0$

- $\displaystyle \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$



75 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

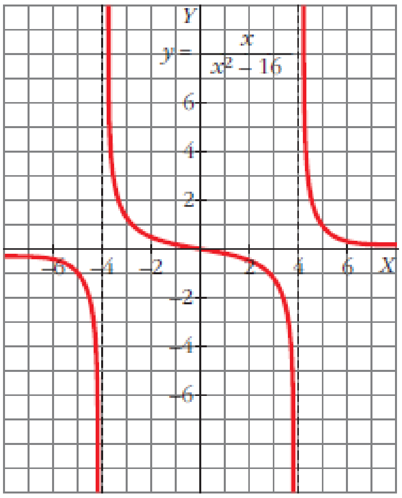
a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

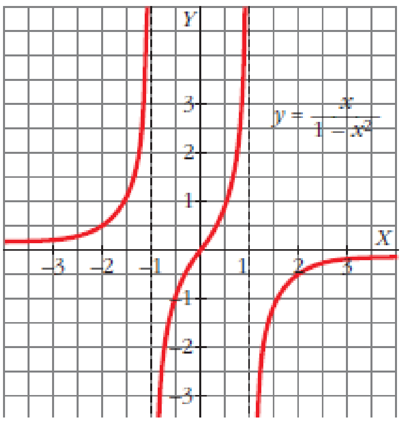


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntotas horizontales: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



7. **Representa la función** $y = x^3 - 12x + 16$**.**

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

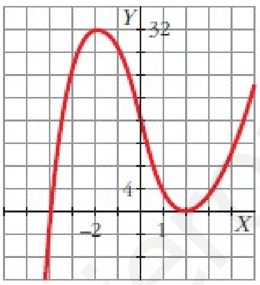
$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \rightarrow (2, 0)$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \rightarrow (-2, 32)$

Los puntos singulares son (2, 0) y (–2, 32).

Esta es su gráfica:



8. **Estudia y representa** $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$**.**

$f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

- El dominio de esta función es $\mathbb{R}$.
- Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Cuando $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 0 \rightarrow$ la curva está por encima de la asíntota.

Cuando $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < 0 \rightarrow$ la curva está por debajo de la asíntota.

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0$$

La función corta a los ejes en el punto (0, 0).

- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Así, observando la asíntota y el corte con el eje X, $(1, 2)$ es un máximo relativo, y $(-1, -2)$, un mínimo relativo.

La gráfica es: