CONCEPTOS BÁSICOS DE NÚMEROS

1.- NÚMEROS REALES

1.1.- NÚMEROS NATURALES

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

Operaciones internas (el resultado es un número natural)

- Suma y producto

Operaciones externas (el resultado puede no ser un número natural)

- Resta y división

1.2.- NÚMEROS ENTEROS

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Suma:

a) Si los dos números tienen el mismo signo se suman y se pone el signo común.

$$(+2) + (+3) = +5$$
$$(-2) + (-3) = -5$$

b) Si tienen distinto signo, se restan y se pone el signo "del mayor".

$$-2 + (+2) = 0$$
$$2 + (-3) = -1$$

Resta:

Se suma el primero con el opuesto[1] del segundo número.

$$(-2) - (+2) = -2 + (-2) = -4$$
$$-2 - (-3) = -2 + (+3) = 1$$

Multiplicación:

Primero se multiplican los signos (aplicando la regla de los signos) y después los números (como siempre).

Regla de los signos:

$$+ \cdot + = +$$
$$+ \cdot - = -$$
$$- \cdot + = -$$
$$- \cdot - = +$$

División:

Primero se dividen los signos (aplicando la regla de los signos) y después se dividen los números (como siempre).

Regla de los signos:

$$+ : + = +$$
$$+ : - = -$$
$$- : + = -$$
$$- : - = +$$

La suma, la resta y la multiplicación de números enteros son operaciones internas. Sin embargo la división no es una operación interna. (3 : 2 = 1.5 que no es un nº entero).

[1] Recuerda que el opuesto de un número se obtiene cambiándole el signo.

1.3.- NÚMEROS RACIONALES

Fracción: división de números enteros

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \leftarrow \text{numerador} \\ \leftarrow \text{denomínador} \end{array}$$

Numerador: partes que se toman
Denominador: partes en que se divide la "unidad"

Expresión decimal de una fracción: para hallarla basta con efectuar la división correspondiente.

Fracciones equivalentes: Dos fracciones son equivalentes cuando sus productos cruzados son iguales o cuando tienen el mismo valor decimal.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Fracción irreducible: Aquella que no se puede simplificar más, es decir, no podemos dividir numerador y denominador por un número distinto de 1.

Números racionales:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z},\ \ b \neq 0 \ \text{ y } \ m.c.d.(a,b) = 1 \right\}$$

Un número racional es una fracción y todas sus equivalentes. Generalmente se representa mediante su fracción irreducible.

Suma y resta:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(m:b)\cdot a}{m} \pm \frac{(m:d)\cdot c}{m} = \frac{(m:b)\cdot a \pm (m:d)\cdot c}{m}$$

donde $m = m.c.m.(b,d)$.

Multiplicación: (en línea; numerador por numerador y denominador por denominador)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

División: (en cruz)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Números decimales exactos y periódicos:

- Decimal Exacto: Tienen un número limitado de cifras decimales.
- Periódico: Se llama período a la cifra o grupo de cifras que se repiten a partir de un determinado lugar y de forma indefinida.
  - Puro: El período empieza justo después de la coma.
  - Mixto: Entre la coma y el período hay una o varias cifras que reciben el nombre de anteperíodo.

Fracción generatriz de un número decimal: es la fracción que representa a dicho número.

a) De un nº decimal exacto

Numerador: Nº sin coma
Denominador: Un uno (1) seguido de tantos ceros (0) como cifras decimales tenga el nº.

b) De un nº periódico puro

Numerador: (Número sin coma) – (Parte entera)
Denominador: Tantos nueves (9) como cifras tenga el período.

c) De un nº periódico mixto
Numerador: (Nº si coma) – (Nº que resulta de quitar la coma y el período)
Denominador: Tantos (9) como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros (0) como cifras tenga el anteperíodo.

Propiedad:

$$\mathbb{Q} = \{\text{números racionales}\} = \{\text{números decimales exactos o periódicos}\}$$

Esto quiere decir que "todo nº racional se expresa como un nº decimal exacto o periódico, y que todo número decimal exacto o periódico se puede expresar como un número racional (esto es, en forma de fracción)".

1.4.- NÚMEROS IRRACIONALES

Son los números decimales que no son ni exactos ni periódicos.

$$\mathbb{I} = \{\text{números irracionales}\} = \{\text{números decimales no periódicos}\}$$

Ejemplos: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, ...$

1.5.- NÚMEROS REALES

$$\mathbb{R} = \{\text{números reales}\} = \{\text{números racionales o irracionales}\} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Recuerda que hay números que no son reales: $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt[4]{-3}, ...$

2.- POTENCIAS

- De exponente natural: $x^n = x \cdot x \cdot \overset{n)}{\ldots} \cdot x$ con $n \in IN$

- De exponente cero: $x^0 = 1$

- De exponente negativo: $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

- De exponente fraccionario: $x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

Propiedades de las potencias:

(1) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

(2) $x^n : x^m = x^{n-m}$

(3) $\left(x^n\right)^m = x^{n\cdot m}$

(4) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

(5) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

3.- JERARQUÍA DE OPERACIONES

(1) Paréntesis (de dentro hacia fuera)

(2) Potencias y radicales

(3) Multiplicaciones y divisiones

(4) Sumas y restas

Las operaciones que están en el mismo nivel de la jerarquía tienen la misma importancia y por tanto se pueden realizar en el orden que más nos convenga.

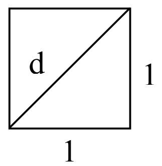
NÚMEROS REALES

1.- ALGUNOS NÚMEROS QUE NO SON RACIONALES

El número pi: π

$$L_{circunferencia} = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d \Rightarrow \pi = \frac{L}{d}$$

El número raíz de dos: $\sqrt{2}$



¿Cuál es la longitud de la diagonal?

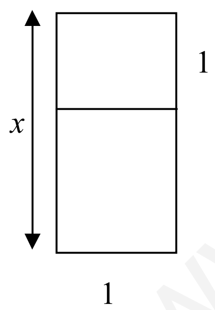
$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$:

Supongamos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ con a y b primos entre sí (es decir, la fracción es irreducible). Entonces:

$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2}$ es reducible !!, ya que si $\frac{a}{b}$ es irreducible, entonces $\frac{a^2}{b^2}$ tiene que ser también irreducible.

El número de oro: Φ



¿Cuál es la longitud de x para que los rectángulos sean semejantes?

Para que los rectángulos sean semejantes se tiene que verificar:

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Rightarrow x^2 - x = 1$$

de donde $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} := \Phi$

2.- LOS NÚMEROS REALES

- REALES
  - RACIONALES
    - ENTEROS
      - NATURALES
      - CERO
      - NEGATIVOS
    - FRACCIONARIOS
      - DECIMALES EXACTOS
      - PERIÓDICOS
        - PUROS
        - MIXTOS
  - IRRACIONALES (Decimales no periódicos)

Recuerda que hay números que no son reales:

$\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt[4]{-3}, \ldots$

3.- PROPIEDADES DE LA OPERACIONES CON REALES

SUMA:

(1) Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
(2) Conmutativa: $a + b = b + a$
(3) Existencia de elemento neutro (el cero): $a + 0 = 0$
(4) Existencia de elemento opuesto (designado por $-a$): $a + (-a) = 0$

Consecuencias que se obtienen:

(i) Resta: $a - b = a + (-b)$
(ii) $-(a + b) = -a - b$

PRODUCTO

(1) Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(2) Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$
(3) Existencia de elemento neutro (el uno): $a \cdot 1 = a$
(4) Existencia de elemento inverso (representado por $\frac{1}{a}$ ó a^{-1}): $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ siempre que $a \neq 0$.
(5) Distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Consecuencias:

(i) División: $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$
(ii) $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$

4.- LA RECTA REAL

Se le puede asignar una abscisa a cada número real, y recíprocamente, es decir, a todo punto de la recta graduada le corresponde un número real. De este modo, la recta real está completa, no se le pueden añadir más puntos ni más números, por ello se habla de la recta real y de su propiedad de completitud.

5.- EL ORDEN DE LOS NÚMEROS REALES

Algebraicamente el orden se expresa mediante el símbolo $<$:

$a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

$b > a \Leftrightarrow a < b$

Propiedades del orden:

(1) $a < b$ y $b < c \Rightarrow a < c$
(2) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
(3) $a < b \Rightarrow \begin{cases} a \cdot c < b \cdot c & \text{si } c > 0 \\ a \cdot c > b \cdot c & \text{si } c < 0 \end{cases}$

Intervalos y semirrectas:

- Intervalo abierto de extremos a y b:
  $(a,b)=\{x : a < x < b\}$
- Intervalo cerrado de extremos a y b:
  $[a,b]=\{x : a \le x \le b\}$
- Intervalos semiabiertos
  $(a,b]=\{x : a < x \le b\}$
  $[a,b)=\{x : a \le x < b\}$
- Semirrectas
  $(-\infty,a)=\{x : x < a\}$ $(-\infty,a]=\{x : x \le a\}$
  $(b,+\infty)=\{x : x > b\}$ $[b,+\infty)=\{x : x \ge b\}$
- Recta real
  $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

6.- LAS RAÍCES Y LAS POTENCIAS

Definición: $\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a$

Propiedad: $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Otras propiedades de las raíces:

(1) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot r]{a^{m\cdot r}}$ con $r\neq 0$

(2) $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

(3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(4) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$

(5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

Operaciones con raíces:

- Suma y resta:
  Se saca factor común el radical y se suman o se restan los coeficientes.
- Multiplicaciones y divisiones:
  Se pueden multiplicar y dividir raíces que tengan el mismo índice.

Racionalización de denominadores:
Es el proceso que se sigue para eliminar las raíces de las expresiones fraccionarias.

Estudiaremos dos casos:

1) En el denominador sólo hay un radical. En este caso, multiplicaremos numerador y denominador por un radical conveniente, de forma que al efectuar la multiplicación del denominador nos quede un número entero. (Recuerda que para poder multiplicar los radicales, éstos tienen que tener el mismo índice, y para que se pueda simplificar el radicando resultante, su exponente tiene que ser igual al índice)
2) En el denominador hay una suma o una resta, y uno de los sumandos es un radicando. En este caso, se multiplica numerador y denomminador por la expresión conjugada (se obtiene cambiado el signo que hay entre los sumandos) del denominador. (Recuerda que

en el denominador siempre queda suma por diferencia, y aplicamos la correspondiente fórmula)

7.- VALOR ABSOLUTO

Definición: $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Propiedades del valor absoluto:

(1) $|a| = |-a|$

(2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdad Triangular)

(4) $|a| < k \Rightarrow -k < a < k$

Distancia entre dos números reales: $d(a,b) = |b - a|$

8.- LOGARITMOS

El logaritmo en base $a(> 0 \text{ y } \neq 1)$ de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman decimales[1] y se representaban por log, y los logaritmos de base e se llaman naturales o neperianos y se representaban por $\ln$ o L.

Propiedades:

1) $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

3) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ siempre que $N \neq 0$

4) $\log_a N^m = m \log_a N \quad \forall m \in \mathbb{R}$

Transformación de logaritmos:

5) $\log_a N = \dfrac{\ln N}{\ln a}$

Otras propiedades:

6) Los logaritmos de un número en dos bases inversas a y $\dfrac{1}{a}$ son opuestos.

7) Conocidos los logaritmos en una base mayor que 1 se pueden hallar fácilmente en cualquier otra base.

9.- APROXIMACIÓN DE NÚMEROS

Cifras significativas: Son aquellas que no sólo sirven para situar el lugar de la coma.

[1] Actualmente esta notación está en desuso y se utiliza la notación $\log$ para representar el logaritmo neperiano.

- Redondeo:
  Consiste en prescindir de las cifras que siguen a una determinada, sumando una unidad a esta última si la primera eliminada es 5 o superior a 5.

- Error absoluto y error relativo:
  $\text{Error absoluto } = |\text{valor exacto } - \text{ valor aproximado}|$
  $$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor exacto}}$$

- Operaciones con redondeos:
  Regla 1: El resultado de una suma o resta de números redondeados (no exactos) ha de ser redondeado a la cifra que corresponda al mayor error absoluto de los datos.

  Regla 2: Si se multiplican o dividen números redondeados, el producto o cociente se redondeará al menor número de cifras significativas que posean los factores.

10.- NOTACIÓN CIENTÍFICA

Un número se dice que esta escrito en notación científica cuando está dado en la forma

$$a \cdot 10^b$$

donde a es un número decimal, con una única cifra en la parte entera (distinta de cero), y b es un número entero.

ARITMÉTICA MERCANTÍL

1.- AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES

En un aumento o disminución porcentual, el número por el que hay que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final se llama **índice de variación**.

- En un **aumento porcentual** del *r %,* el índice de variación es $1+\frac{r}{100}$.
- En una **disminución porcentual** del *r %,* el índice de variación es $1-\frac{r}{100}$.

Para calcular el valor final, en un aumento o en una disminución porcentual, se halla el índice de variación (que conviene expresarlo en forma decimal) y se multiplica por la cantidad inicial:

$$\boxed{C_{final}=C_{inicial}\cdot\left(1\pm\frac{r}{100}\right)}$$

De la expresión anterior podemos deducir el capital inicial conociendo la variación porcentual y la cantidad final:

$$\boxed{C_{inicial}=C_{final}:\left(1\pm\frac{r}{100}\right)=\frac{C_{final}}{\text{Índice de variación}}}$$

Para encadenar aumentos o disminuciones porcentuales, se calculan los índices de variación correspondientes a los distintos pasos y se multiplican. Se obtiene, así, el **índice de variación global**.

2.- INTERESES BANCARIOS

2.1.- INTERÉS SIMPLE

Lo que se gana por el dinero depositado en un banco son los **intereses**.

Es el que se obtiene cuando los intereses producidos durante el tiempo que dura una inversión se deben únicamente al capital inicial. Cuando se utiliza el interés simple, los intereses son función únicamente del interés principal, el número de periodos y la tasa de interés, esto es:

$$\boxed{C_{final}=C_{inicial}(1+i\cdot n)}$$

donde $i=\frac{r}{100}$ es el interés anual y n el número de años.

2.2.- INTERÉS COMPUESTO

Cuando los intereses que obtenemos al finalizar un período, se acumulan al capital para producir nuevos intereses en el período siguiente, hablamos de **intereses compuestos**.

- Pago anual de intereses

  El tanto por ciento anual que paga un banco por depositar en él un dinero se llama rédito.

$$\boxed{C_{final\ al\ cabo\ de\ n\ años}=C_{inicial}\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}}$$

- <u>Pago mensual de intereses</u>
  El tiempo que un banco deja transcurrir para que un capital produzca intereses se llama período de capitalización. Como un *r %* anual significa un $\frac{r}{12}\%$ mensual, se tiene:

$$\boxed{C_{final\ al\ cabo\ de\ m\ meses}=C_{inicial}\cdot\left(1+\frac{r}{1200}\right)^{m}}$$

- <u>Pago diario de intereses</u>
  Un *r %* anual significa un $\frac{r}{36\,500}\%$ diario y por tanto:

$$\boxed{C_{final\ al\ cabo\ de\ n\ días\ al\ \%\ anual}=C_{inicial}\cdot\left(1+\frac{r}{36\,500}\right)^{n}}$$

3.- <u>¿QUÉ ES LA "TASA ANUAL EQUIVALENTE" (T.A.E.)?</u>

En las cuentas de ahorro, cuando los períodos de capitalización son inferiores a un año, los intereses anuales producidos por un cierto capital son superiores al rédito que declara el banco. Se llama **tasa anual equivalente (T.A.E.)** al tanto por ciento de crecimiento total del capital durante un año.

En los préstamos bancarios, la T.A.E. es, también, superior al rédito declarado. Al calcularla se incluyen pagos fijos (comisiones y gastos) que cobra el banco para conceder el préstamo.

$$\boxed{TAE=\left[(1+i)^{n}-1\right]\cdot 100=\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}-1\right]\cdot 100}$$

donde $n=1$ si es anual, $n=2$ si es semestral, $n=3$ si es cuatrimestral, $n=4$ si es trimestral, $n=6$ si es bimestral y $n=12$ si es mensual.

4.- <u>AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS</u>

Para la **amortización de un préstamo** mediante varios pagos aplazados, se tiene en cuenta que:

- Cada pago salda los intereses que produce la deuda pendiente desde el pago anterior y, el resto, amortiza parte de esa deuda.
- El último pago salda los interese pendientes desde el pago anterior y amortiza la totalidad de la deuda pendiente.
- Lo habitual es que todos los pagos sean idénticos. El cálculo de esa cantidad fija (mensualidad, anualidad) que permite amortizar el total de la deuda en un número prefijado de plazos, se realiza mediante técnicas que aprenderemos a continuación.

5.- <u>PROGRESIONES GEOMÉTRICAS</u>

Una progresión geométrica es una sucesión de números $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ llamados términos de la progresión, en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número constante, r, llamado razón de la progresión:

$$a_2 = a_1 \cdot r, \quad a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2, \ldots, a_n = a_{n-1} \cdot r$$

Y en general:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

La suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

6.- CÁLCULO DE ANUALIDADES O MENSUALIDADES PARA AMORTIZAR DEUDAS

Las progresiones geométricas y la fórmula para sumar sus primeros términos nos permiten calcular con comodidad el valor de las mensualidades (o anualidades) con las que saldar una deuda en un cierto período.

La fórmula general de la anualidad para amortizar un préstamo es:

$$\boxed{a = C\frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1}}$$

donde $i = \frac{r}{100}$ (para pagos anuales) o $i = \frac{r}{1\,200}$ (para pagos mensuales).

POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.- POLINOMIOS

Polinomios en una indeterminada

La expresión algebraica $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ recibe el nombre de polinomio en la indeterminada x. Donde:

n es un número natural.

$a_n, ..., a_0$ son números reales, que se denominan coeficientes del polinomio.

a_0 es el coeficiente de grado cero o término independiente.

El exponente n de la mayor potencia de x que aparece en el polinomio se denomina grado del polinomio.

Cada uno de los términos de un polinomio se denomina monomio. Un polinomio formado por dos monomios es un binomio; si son tres los monomios, un trinomio, y si son más, de manera genérica se denomina polinomio.

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = a$, que representaremos por $P(a)$, es el número que resulta de sustituir la indeterminada x por el número a y efectuar las operaciones indicadas.

Igualdad de polinomios

Dos polinomios de la misma indeterminada son idénticos si tienen iguales los coeficientes del mismo grado.

Operaciones con polinomios

(1) Suma

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \\ Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0 \end{array}\right\}$$

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n) x^n + ... + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Propiedades:

a) Conmutativa: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$

b) Asociativa: $P(x) + [Q(x) + R(x)] = [P(x) + Q(x)] + R(x)$

c) Elemento neutro: $0(x) = 0 : P(x) + 0(x) = P(x)$

d) Elemento opuesto: $P(x) + [-P(x)] = 0(x)$, donde $-P(x)$ se obtiene al considerar los opuestos de todos y cada uno de sus términos.

(2) Resta

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

(3) Multiplicación

La multiplicación de dos polinomios es otro polinomio de grado igual a la suma de los grados de los factores. Se obtiene al multiplicar cada término de un factor por cada uno de los términos del otro.

Propiedades:

e) Conmutativa: $P(x)\cdot Q(x)=Q(x)\cdot P(x)$

f) Asociativa: $P(x)\cdot\left[Q(x)\cdot R(x)\right]=\left[P(x)\cdot Q(x)\right]\cdot R(x)$

g) Elemento neutro: $1(x)=1$ tal que $1(x)\cdot P(x)=P(x)$

h) Distributiva: $P(x)\cdot\left[Q(x)+R(x)\right]=P(x)\cdot Q(x)+P(x)\cdot R(x)$

(4) División de polinomios

Efectuar la división $D(x):d(x)$ es hallar dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que verifiquen:

$$\boxed{D(x)=d(x)\cdot C(x)+R(x)}$$

donde los polinomios $C(x)$ y $R(x)$ deben verificar:

$\deg C(x)=\deg D(x)-\deg d(x)$

$\deg R(x)<\deg d(x)$

(deg significa grado)

Regla de Ruffini

Si el divisor es un polinomio de primer grado del tipo $x-a$, la división se puede realizar de una manera más sencilla aplicando un algoritmo conocido como regla de Ruffini, que consiste en:

- Se escriben los coeficientes del dividendo.
- Se coloca el término independiente del divisor cambiado de signo.
- El primer coeficiente se coloca igual que el del dividendo.
- Los siguientes se hallan multiplicando el anterior por a y sumando el producto con el coeficiente correspondiente del dividendo.
- El último número obtenido es el resto de la división.
- Los números obtenidos antes son los coeficientes del cociente.

Teorema del resto

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ cuando $x=a$ coincide con el resto de la división de este polinomio por $x-a$.

Divisibilidad de polinomios

Si entre tres polinomios cualesquiera se verifica que $A(x)=B(x)\cdot C(x)$, diremos que:

- El polinomio $A(x)$ es múltiplo de $B(x)$ y $C(x)$. También se dice que $A(x)$ es divisible por cada uno de los polinomios $B(x)$ y $C(x)$.
- Los polinomios $B(x)$ y $C(x)$ son divisores del polinomio $A(x)$.

Criterio de divisibilidad de un polinomio por $x-a$: Teorema del factor

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $x-a$ si, y sólo si, $P(a)=0$.

Raíces de un polinomio

Diremos que a es una raíz de $P(x)$ sii $P(a)=0$.

■ Cálculo de las raíces de un polinomio

Determinar las raíces de un polinomio equivale a resolver la ecuación $P(x)=0$.

■ <u>Polinomios de primer y segundo grado</u>
Se trata de resolver las ecuaciones de primer y segundo grado correspondientes.

■ <u>Polinomios de grado ≥ 3</u>
Las raíces enteras de un polinomio, si existen, son divisores de su término independiente.

Factorización de polinomios

La factorización de un polinomio se consigue cuando es posible encontrar otros polinomios, los factores, de manera que su producto sea el polinomio dado.

Si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$ es un polinomio y $x_1,...,x_x$ son sus raíces, entonces, su descomposición es

$$P(x)=a_n(x-x_0)(x-x_{n-1})..(x-x_1)$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de polinomios

El máximo común divisor de dos o más polinomios es el polinomio de mayor grado que es divisor de todos ellos.

Si dos polinomios "no tienen ningún divisor común", su mcd es el polinomio $1(x)=1$.

Para calcular el mcd de dos o más polinomios, se descomponen los polinomios en factores "primos" y se toman los comunes de menor exponente.

El mínimo común múltiplo de dos o más polinomios es el polinomio de menor grado que es múltiplo de todos ellos.

Para calcular el mcm de dos o más polinomios, se descomponen los polinomios en factores "primos" y se toman los comunes y los no comunes de mayor exponente.

2.- FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición

Si $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios y $B(x)\neq 0$, la expresión $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ recibe el nombre de <u>fracción algebraica</u>.

Fracciones algebraicas equivalentes

Las <u>fracciones</u> $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ son <u>equivalentes</u> (y escribiremos $\dfrac{A(x)}{B(x)}=\dfrac{C(x)}{D(x)}$) cuando $A(x)D(x)=B(x)C(x)$.

El valor numérico de dos fracciones algebraicas equivalentes para un determinado valor de x es el mismo.

Propiedad fundamental

Si multiplicamos el numerador y el denominador de una fracción algebraica por un mismo polinomio (no nulo), el resultado es una fracción algebraica equivalente a la primera.

Operaciones con fracciones algebraicas

- Suma y resta

$$\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{[M(x):B(x)]A(x) \pm [M(x):D(x)]C(x)}{M(x)}$$

donde $M(x)$ es el mcm de los denominadores.

- Multiplicación

$$\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)C(x)}{B(x)D(x)}$$

- División

$$\frac{A(x)}{B(x)} : \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x)}{B(x)C(x)}$$

ECUACIONES E INECUACIONES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

ECUACIONES

1.- IGUALDADES Y ECUACIONES

Las expresiones compuestas de dos miembros enlazados por el signo = se llaman **igualdades**, y ponen de manifiesto la equivalencia entre distintos conceptos, descubriendo con ellas aspectos nuevos de una misma realidad.

Las igualdades en las que en sus miembros aparecen expresiones algebraicas que sólo se satisfacen para un conjunto de valores reales se llaman **ecuaciones**.

2.- ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$ax+b=0$$

(también llamadas lineales), donde x es la variable o incógnita y $a,b\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$.

Método general de resolución

1.- **Quitar los paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva (es decir, el número o expresión algebraica que está fuera del paréntesis, multiplica a todos los sumandos que hay dentro del paréntesis)

2.- **Eliminar los denominadores**. Para ello se reducen todas las fracciones a común denominador (calculando el m.c.m.), y una vez que todas las fracciones tienen igual denominador, se quita éste, teniendo cuidado con los signos que hay delante de las fracciones.

Es posible que haya que volver a **quitar paréntesis.** Para ello se aplica la propiedad distributiva como antes.

3.- **Agrupar.** Llevamos a uno de los dos miembros todos los términos que tienen "x" y al otro todos los números (cuando un término cambia de miembro, también cambia de signo).

4.- **Operar.** Realizamos las operaciones.

5.- **Despejar.** El coeficiente de "x" pasa dividiendo (con el signo que tenga) al otro miembro de la ecuación.

Ejemplo:

$$6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)=3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$$

Quitamos los paréntesis:

$$\frac{6\cdot(x+1)}{8}-\frac{6\cdot(2x-3)}{16}=\frac{3\cdot 3}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{3\cdot 3x}{8}+\frac{3\cdot 2}{8}$$

Conviene realizar las operaciones directamente.

$$\frac{6x+6}{8}-\frac{12x-18}{16}=\frac{9x}{4}-\frac{3}{4}-\frac{9x}{8}+\frac{6}{8}$$

Eliminamos los denominadores (calculando el mcm):

$$\frac{2(6x+6)}{16}-\frac{12x-18}{16}=\frac{4\cdot 9x}{16}-\frac{4\cdot 3}{16}-\frac{2\cdot 9x}{16}+\frac{2\cdot 6}{16}$$

Igual que antes conviene realizar las operaciones directamente, para que no se alarguen los pasos innecesariamente.

$$2\cdot(6x+6)-(12x-18)=36x-12-18x+12$$

Le he puesto paréntesis al numerador $12x-18$ para que no haya problemas con el signo menos que hay delante.

$$12x+12-12x+18=36x-12-18x+12$$

Agrupamos los términos que sean semejantes:

$$12x-12x-36x+18x=-12+12-12-18$$

Realizamos las operaciones:

$$-18x=-30$$

Resolvemos:

El -18 pasa dividiendo, con su signo.

$$x=\frac{-30}{-18}$$

Simplificamos:

$$x=\frac{5}{3}$$

3.- ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Son ecuaciones de la forma

$$ax^2+bx+c=0$$

(también llamadas cuadráticas), donde x es la incógnita y $a,b,c\in\mathbb{R}$ con $a\neq 0$.

Recuerda que cualquier ecuación de segundo grado (completa o incompleta) se puede transformar en una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ [1], cuyas soluciones vienen dadas por la fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Método general para resolver ecuaciones de 2º grado:

1º) Si la ecuación tiene **denominadores** o **paréntesis**, se procede como siempre (se quitan los paréntesis y después los denominadores)

2º) **Agrupar** todos los términos en uno de los dos miembros, de forma que la ecuación quede igualada a cero.

3º) **Operar** los términos que sean semejantes (los que tienen la misma parte literal), de forma que la ecuación se transforme en una de la forma [1].

4º) **Obtener los coeficientes** a,b y c.

5º) **Aplicar la fórmula** de Bhaskara.

Llamamos **discriminante** de la ecuación [1] a

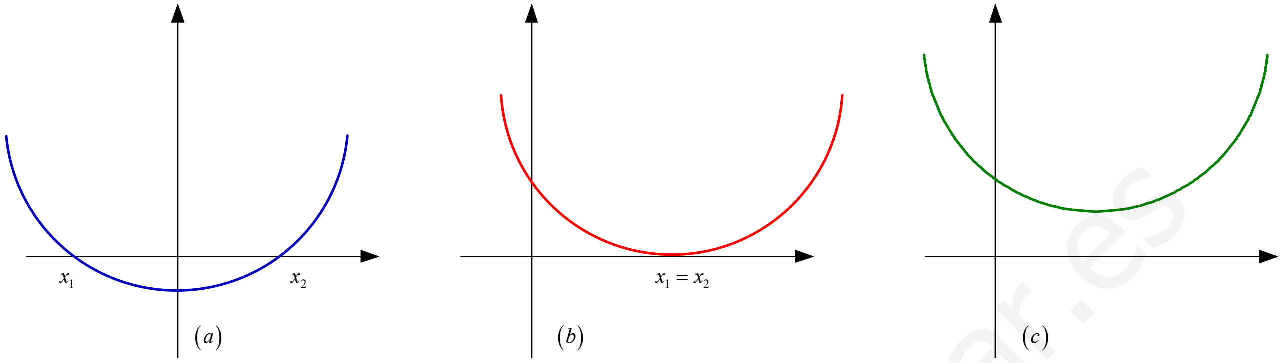
$$\Delta=b^2-4ac$$

y nos indica la naturaleza de las soluciones de una ecuación de segundo grado:

Si $\Delta>0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

Si $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene una raíz doble (esto es, las dos soluciones son iguales)
Si $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene raíces reales.

Interpretación geométrica de las soluciones
Los tres casos anteriores se corresponden con las siguientes situaciones geométricas de la parábola correspondiente a la ecuación de segundo grado.



Ejemplo:

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$

Quitamos los paréntesis:

$$\frac{4x^2-1}{3}+\frac{x^2+4-4x}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$

Conviene realizar las operaciones directamente.

Eliminamos los denominadores (calculando el mcm):

$$\frac{4\cdot(4x^2-1)}{12}+\frac{3\cdot(x^2+4-4x)}{12}=\frac{2\cdot(3x+4)}{12}+\frac{4x^2}{12}$$

Igual que antes conviene realizar las operaciones directamente, para que no se alarguen los pasos innecesariamente.

$$4\cdot(4x^2-1)+3\cdot(x^2+4-4x)=2\cdot(3x+4)+4x^2$$

Hay que volver a quitar paréntesis.

$$16x^2-4+3x^2+12-12x=6x+8+4x^2$$

Agrupamos todos los términos en un miembro:

$$16x^2-4+3x^2+12-12x-6x-8-4x^2=0$$

Para poder aplicar la fórmula, la ecuación tiene que estar igualada a cero.

Realizamos las operaciones:

$$15x^2-18x=0$$

Resolvemos:

$$x=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot 15\cdot 0}}{2\cdot 15}=\frac{18\pm 18}{30}=\begin{cases}\dfrac{36}{30}=\dfrac{6}{5}\\[2mm] \dfrac{0}{30}=0\end{cases}$$

En este caso no hay que aplicar la fórmula, pero de todas formas lo voy a hacer.

4.- ECUACONES QUE SE RELACIONAN CON LAS DE SEGUNDO GRADO

Ecuaciones bicuadradas
Son ecuaciones de cuarto grado sin términos de grado impar:

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad [2]$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

Método general de resolución:

Para llegar a una ecuación de la forma [2] puede que haya que quitar paréntesis y denominadores. Si es así, se procede como con las ecuaciones de primer y segundo grado.

1º) Se efectúa el cambio de variable $\boxed{x^2 = y}$ con lo que queda una ecuación de segundo grado en la incógnita y.

2º) Se resuelve la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ resultante del paso anterior.

3º) Las soluciones de la ecuación original son $x = \pm\sqrt{y}$ donde y son las soluciones de la ecuación del paso 2.

Ejemplo:

$$x^4 - 26x^2 = -25$$

$y^2 - 26y^2 = -25$ — Cambio de variable: $y = x^2$

$y^2 - 26y^2 + 25 = 0$ — Igualamos a cero, para poder aplicar la fórmula.

$$y = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \frac{26 \pm 24}{2} = \begin{cases} \dfrac{50}{2} = 25 \\ \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Resolvemos la ecuación en *y*.

$x^2 = y = 25 \rightarrow x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

$x^2 = y = 1 \rightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Resolvemos la ecuación en *x*, deshaciendo el cambio de variable.

Ecuaciones con radicales

Son ecuaciones en las que la incógnita aparece bajo el signo radical (raíz cuadrada).

Método de resolución:

1º) Se deja uno de los radicales sólo en uno de los miembros.
2º) Se elevan al cuadrado los dos miembros de la ecuación.
3º) Si la ecuación contiene más radicales, se vuelven a repetir los pasos 1 y 2.
4º) Se resuelve la ecuación de primer o segundo grado que resulte.
5º) Se comprueban las soluciones en la ecuación original.

Ejemplo:

$$2\sqrt{x-3} - x + 3 = 0$$

$2\sqrt{x-3} = x - 3$ — Dejamos sólo el radical en uno de los miembros, trasponiendo el resto de los términos.

$\left(2\sqrt{x-3}\right)^2 = (x-3)^2$ — Elevamos al cuadrado los dos miembros.

$4 \cdot (x-3) = x^2 + 9 - 6x$ — Recuerda que el cuadrado de un producto es igual al producto de los cuadrados.

$4x - 12 = x^2 + 9 - 6x$ — Quitamos paréntesis.

$x^2+9-6x-4x+12=0$

$x^2-10x+21=0$

$x=\dfrac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 21}}{2\cdot 1}=\dfrac{10\pm\sqrt{16}}{2}=$

$=\dfrac{10\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{14}{2}=7\\ \dfrac{6}{2}=3\end{cases}$

$2\sqrt{7-3}-7+3=0\rightarrow 0=0$ Verdad, luego es solución

$2\sqrt{3-3}-3+3=0\rightarrow 0=0$ Verdad, luego es solución

Igualamos a cero, ya que se trata de una ecuación de segundo grado.

Resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado.

Hay que comprobar si los valores que nos han salido, son soluciones de la ecuación radical.

5.- LA FATORIZACIÓN COMO RECURSO PARA RESOLVER ECUACIONES

Siempre que podamos factorizar (fácilmente) la ecuación y ésta quede igualada a cero, este método ofrece buenos resultados.

Recuerda que para factorizar una ecuación se pueden aplicar los siguientes **procedimientos**:

a) **Sacar factor común** todo lo que se pueda.
b) Aplicar las **identidades notables**.
c) La regla de **Ruffini**

Para su resolución basta aplicar la siguiente ***propiedad***: "si un producto es igual a cero, es por que alguno de sus factores es cero".

Ejemplo:

$3x^3+6x^2-3x-6=0$

$3x^3+6x^2-3x-6=(x-1)(x+1)(3x+6)$ Aplicando Ruffini

$(x-1)(x+1)(3x+6)=0$ Esta es la ecuación que hay que resolver.

Un producto es igual a cero, cuando alguno de sus factores es cero.

$x-1=0\rightarrow x=1$

$x+1=0\rightarrow x=-1$

$3x+6=0\rightarrow x=\dfrac{-6}{3}=-2$

Las soluciones son: $1,\ -1$ y -2

INECUACIONES

6.- INECUACIONES CON UNA Y DOS INCÓGNITAS

Una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas.

Una solución de una inecuación es un valor de la variable que hace que se cumpla la desigualdad.

Resolver una inecuación consiste en encontrar todas sus soluciones. Habitualmente tiene infinitas, que se agrupan en intervalos o semirrectas de $\mathbb{R}$.

Inecuaciones lineales con una incógnita

Para resolver una inecuación lineal con una incógnita, se procede de forma similar a las ecuaciones, pero teniendo en cuenta las desigualdades y aplicando las propiedades de las mismas. Sus soluciones son todos los puntos de un intervalo o semirrecta.

Ejemplo:

$$6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right)<3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2)$$

Quitamos los paréntesis:

$$\frac{6\cdot(x+1)}{8}-\frac{6\cdot(2x-3)}{16}<\frac{3\cdot 3}{4}x-\frac{3}{4}-\frac{3\cdot 3x}{8}+\frac{3\cdot 2}{8}$$

$$\frac{6x+6}{8}-\frac{12x-18}{16}<\frac{9x}{4}-\frac{3}{4}-\frac{9x}{8}+\frac{6}{8}$$

Conviene realizar las operaciones directamente.

Eliminamos los denominadores (calculando el mcm):

$$\frac{2(6x+6)}{16}-\frac{12x-18}{16}<\frac{4\cdot 9x}{16}-\frac{4\cdot 3}{16}-\frac{2\cdot 9x}{16}+\frac{2\cdot 6}{16}$$

Igual que antes conviene realizar las operaciones directamente, para que no se alarguen los pasos innecesariamente.

$$2\cdot(6x+6)-(12x-18)<36x-12-18x+12$$

$$12x+12-12x+18<36x-12-18x+12$$

Le he puesto paréntesis al numerador $12x-18$ para que no haya problemas con el signo menos que hay delante.

Agrupamos los términos que sean semejantes:

$$12x-12x-36x+18x<-12+12-12-18$$

Realizamos las operaciones:

$$-18x<-30$$

Resolvemos:

$$x>\frac{-30}{-18}$$

El -18 pasa dividiendo, con su signo, y cambia el sentido de la desigualdad.

Soluciones:

$$x>\frac{5}{3}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$$

Inecuaciones cuadráticas con una incógnita

Las soluciones de las inecuaciones cuadráticas dependen de la posición de la parábola respecto del eje OX y del signo de desigualdad.

Para resolverlas:

1º) Se resuelve la correspondiente ecuación de segundo grado.
2º) Se representan en una recta las soluciones obtenidas.
3º) Se toman puntos a la izquierda de la solución más pequeña, entre las dos soluciones y a la derecha de la más grande.
4º) Los intervalos (semirrectas) que verifiquen la desigualdad, constituyen la solución de la inecuación.

Ejemplo:

$$\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}\le\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

Quitamos los paréntesis:

$$\frac{4x^2-1}{3}+\frac{x^2+4-4x}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$$

Conviene realizar las operaciones directamente.

Eliminamos los denominadores (calculando el mcm):

$$\frac{4\cdot(4x^2-1)}{12}+\frac{3\cdot(x^2+4-4x)}{12}=\frac{2\cdot(3x+4)}{12}+\frac{4x^2}{12}$$

Igual que antes conviene realizar las operaciones directamente, para que no se alarguen los pasos innecesariamente.

$$4\cdot(4x^2-1)+3\cdot(x^2+4-4x)=2\cdot(3x+4)+4x^2$$

Hay que volver a quitar paréntesis.

$$16x^2-4+3x^2+12-12x=6x+8+4x^2$$

Agrupamos todos los términos en un miembro:

$$16x^2-4+3x^2+12-12x-6x-8-4x^2=0$$

Para poder aplicar la fórmula, la ecuación tiene que estar igualada a cero.

Realizamos las operaciones:

$$15x^2-18x=0$$

Resolvemos:

$$x=\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4\cdot 15\cdot 0}}{2\cdot 15}=\frac{18\pm 18}{30}=\begin{cases}\dfrac{36}{30}=\dfrac{6}{5}\\[2mm]\dfrac{0}{30}=0\end{cases}$$

En este caso no hay que aplicar la fórmula, pero de todas formas lo voy a hacer.

Representamos los valores que nos han salido

0 $\qquad\qquad$ $\frac{6}{5}$

Tomamos un valor en cada uno de los intervalos/semirectas que nos han salido

$\boxed{-1}$ 0 $\boxed{1}$ $\frac{6}{5}$ $\boxed{2}$

Sustituimos dichos valores en la inecuación $15x^2-18x\le 0$ **que es equuivalente a** $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}\le\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$ **y comprobamos si son solución o no:**

$15(-1)^2-18\cdot(-1)\le 0\to 33\le 0$ Falsa

$15\cdot 1^2-18\cdot 1\le 0\to -3\le 0$ Verdadera

$15\cdot 2^2-18\cdot 2\le 0\to 24\le 0$ Falsa

No $\quad$ Si $\quad$ No

$\boxed{-1}$ 0 $\boxed{1}$ $\frac{6}{5}$ $\boxed{2}$

Las **soluciones** son: $x\in\left[0,\frac{6}{5}\right]$

Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos incógnitas adopta la forma

$$ax+by+c<0$$

donde el signo $<$ puede ser $\leq$, $>$ o $\geq$.

En cada caso, el conjunto de soluciones es el semiplano que está a uno de los lados de la recta $ax+by+c=0$.

Para resolverlas, lo que hay que hacer es representar la recta asociada: $ax+by+c=0$, tomar un par (x,y) en cada uno de los semiplanos (que no estén en la recta) y comprobar si cumplen la inecuación o no. Cuando en la desigualdad está incluido el signo igual ($\leq$ o $\geq$), los puntos de la recta son también soluciones.

Ejemplo:

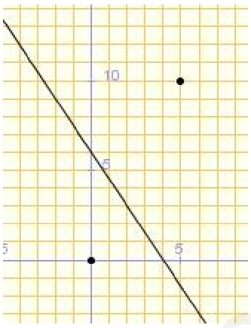
$$3x+2y\leq 12$$

$$3x+2y=12$$

x	y
$\boxed{0}$	6
4	$\boxed{0}$

Representamos gráficamente la ecuación asociada.

Recuerda que para representar una recta basta con dar dos valores para la x o para la y, y calcular el que falta (sustituyendo en la ecuación). Los que están recuadrados son los que yo he tomado.



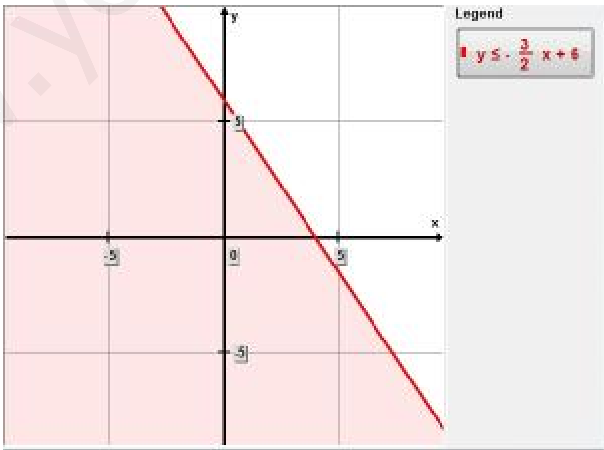
Además, tomamos dos puntos, que no estén en la recta.

Comprobamos si los puntos elegidos verifican la inecuación o no:

$(0,0)\to 3\cdot 0+2\cdot 0\leq 12\to 0\leq 12$ Verdadera

$(5,10)\to 3\cdot 5+2\cdot 10\leq 12\to 35\leq 12$ Falsa

Por tanto, el semiplano solución es el de abajo, es decir, el que incluye al punto $(0,0)$.



SISTEMAS DE ECUACIONES Y DE INECUACIONES

SISTEMAS DE ECUACIONES

1.- Sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Un sistema 2×2 (2 ecuaciones y 2 incógnitas) es un sistema de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ los términos independientes y x, y las variables o incógnitas.

- Una solución del sistema es una pareja de valores de las variables que satisfacen las dos ecuaciones al mismo tiempo.
- Dos sistemas son equivalentes cuando tienen la misma solución.
- Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones.

Resolución de sistemas lineales 2×2

- ***Método de sustitución***

Consiste en despejar una de las dos variables de cualquiera de las ecuaciones (conviene elegir la ecuación de forma que la variable tenga coeficiente ± 1, si ello es posible) y sustituir dicho valor en la otra ecuación. Se obtiene así una ecuación de primer grado.

- ***Método de igualación***

Despejar la misma variable de las dos ecuaciones e igualar sus expresiones. Al igual que en el caso anterior se obtiene una ecuación de primer grado.

- ***Método de reducción***

Consiste en eliminar una de las dos variables. Para ello sumaremos ambas ecuaciones, habiendo multiplicado previamente (si es necesario) una o las dos ecuaciones por números convenientes, de forma que los coeficientes de la variable que queremos eliminar sean opuestos.

Discusión de sistemas

- El sistema es **compatible** si tiene solución
    - Compatible **determinado** si tiene solución única
    - Compatible **indeterminado** si tiene infinitas soluciones
- El sistema es **incompatible** si no tiene solución

Interpretación geométrica de sistemas lineales 2×2

- Si el sistema es compatible determinado, la solución es un punto, que es el punto de corte de las rectas que representan dichas ecuaciones.
- Si el sistema es compatible indeterminado es por que las dos ecuaciones representan a la misma recta.

- Si el sistema es incompatible es porque las rectas son paralelas.

2.- Sistemas de ecuaciones lineales 3×3: Método de GAUSS

Son de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ y x, y, z son las incógnitas. Una solución del sistema es una terna (x, y, z) que transforma todas las ecuaciones en identidades.

Transformaciones elementales

1. Reordenar las ecuaciones y/o incógnitas $(F_i \leftrightarrow F_j)$.
2. Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero ($a \cdot F_i$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$).
3. Sumar a una ecuación otra (u otras) multiplicada previamente por un número $(aF_i + F_j)$.

Método de GAUSS

Consiste en utilizar las transformaciones elementales para triangular el sistema, es decir,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z = d_1 \\ \qquad c_{22}y + c_{23}z = d_2 \\ \qquad\qquad c_{33}z = d_3 \end{cases}$$

Para resolver el sistema triangular basta con resolver la tercera ecuación (obtenemos «*z*»), sustituir en la segunda y obtener el valor de «*y*», y sustituir ambos valores en la primera ecuación para obtener «*x*».

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + 5z = 10 \\ x + y - 4z = -9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[-F_1+F_3]{-2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & -16 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3:2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3}$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{-3F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 10 & 20 \end{array}\right) \begin{array}{c} [1] \\ [2] \\ [3] \end{array}$$

La ecuación [3] es: $10z = 20 \rightarrow z = 2$

Sustituimos en [2]: $y - 3z = -8 \rightarrow y - 3\cdot 2 = -8 \rightarrow y = -2$

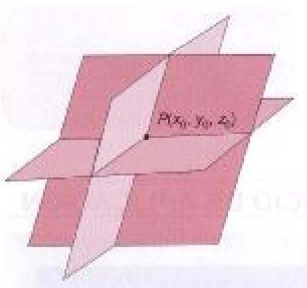
Sustituimos en [1]: $x - y + 2z = 7 \rightarrow x - (-2) + 2\cdot 2 = 7 \rightarrow x = 1$

Solución: $(x, y, z) = (1, -2, 2)$ (Sistema compatible determinado)

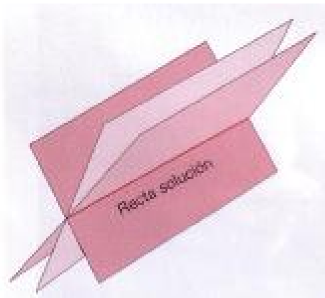
Interpretación geométrica de sistemas lineales 3×3

Cada una de las ecuaciones de un sistema 3×3 representa geométricamente un plano. Tenemos así la siguiente interpretación:

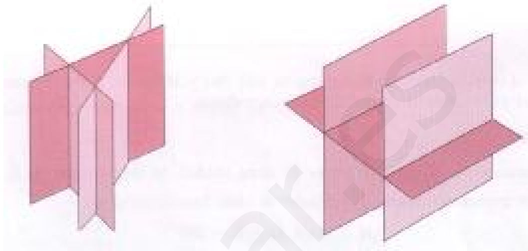
- Si el sistema es **compatible determinado**, la solución es un punto, que es el punto de corte de los tres planos que representan dichas ecuaciones.
- Si el sistema es **compatible indeterminado** es por que los tres planos se cortan en una recta.
- Si el sistema es **incompatible** es porque los tres planos no se cortan a la vez.



Compatible determinado



Compatible Indeterminado



Incompatible

3.- Sistemas de ecuaciones no lineales 2×2

Los que estudiaremos son sistemas en los que una de las dos ecuaciones es no lineal, es decir, aparecerán productos de las variables, una variable al cuadrado o la inversa de una variable y la otra ecuación será, en general, lineal.

Para su **resolución** utilizaremos los mismos métodos que para los sistemas de ecuaciones lineales (igualación, sustitución).

Ejemplo:

$$\begin{cases} y-x=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

Para resolver este sistema no lineal, despejamos y de la primera ecuación:

$$y=1+x$$

y sustituimos en la segunda ecuación:

$$x^2+(1+x)^2=5$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado:

$$x^2+1+x^2+2x=5\rightarrow 2x^2+2x-4=0$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2}=\frac{-2\pm 6}{4}=\begin{cases}\dfrac{4}{4}=1 \\ \dfrac{-8}{4}=-2\end{cases}$$

Ya tenemos los valores de x, pero nos faltan los de y. Para hallarlos, sustituimos en la ecuación $y=1+x$ que es la más sencilla de las dos:

$$y=1+x=\begin{cases}1+1=2 \\ 1+(-2)=-1\end{cases}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son: $(x,y)=\begin{cases}(1,2)\\(-2,-1)\end{cases}$

SISTEMAS DE INECUACIONES

4.- Sistemas de dos inecuaciones lineales con dos incógnitas

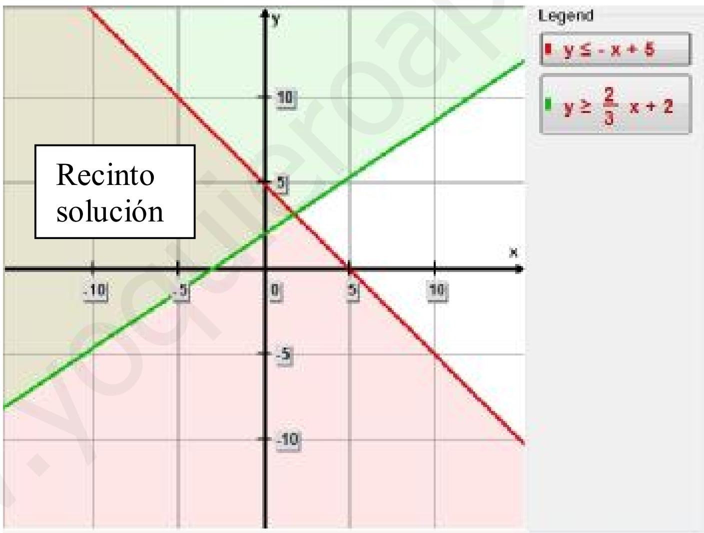
Varias inecuaciones forman un sistema cuando se buscan las soluciones comunes a todas ellas.

Como el **conjunto de soluciones** de una inecuación de primer grado con dos incógnitas es un semiplano, el conjunto de soluciones de un sistema de inecuaciones de este tipo es la intersección de varios semiplanos, es decir, un recinto poligonal o bien un recinto abierto.

Es posible que los semiplanos no tengan ningún punto en común. En tal caso el sistema no tiene solución y se dice que es incompatible.

Ejemplo:

$$\begin{cases}x+y\le 5\\-2x+3y\ge 6\end{cases}$$



5.- Sistemas de inecuaciones no lineales con una incógnita

Para resolver este tipo de sistemas de inecuaciones lo haremos analíticamente: Resolviendo cada una de las inecuaciones que forman el sistema, y estudiando la intersección, caso de existir.

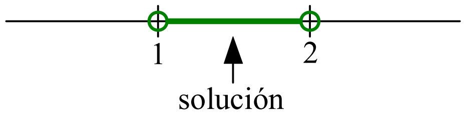
Ejemplo:

$$\begin{cases}x^2-4x+3<0\\2x-4<0\end{cases}$$

La solución de la primera inecuación es $x\in(1,3)$:

Y la solución de la segunda inecuación es $x \in (-\infty, 2)$:

Por tanto, la solución del sistema es la intersección de ambos conjuntos, esto es: $x \in (1, 2)$



LOGARITMOS Y APLICACIONES

1.- LOGARITMOS

El logaritmo en base $a(>0 \text{ y } \neq 1)$ de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman decimales[1] y se representaban por log, y los logaritmos de base el número e se llaman naturales o neperianos y se representaban por $\ln$ o L.

Propiedades elementales:

1) $\log_a a = 1$ y $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a a^x = x$

Otras propiedades:

3) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$
4) $\log_a \left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ siempre que $N \neq 0$
5) $\log_a N^m = m \log_a N \quad \forall m \in \mathbb{R}$

Transformación de logaritmos:

6) $\log_a N = \dfrac{\ln N}{\ln a}$ o mas generalmente $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

Otras propiedades:

7) Los logaritmos de un número en dos bases inversas a y $\dfrac{1}{a}$ son opuestos.
8) Conocidos los logaritmos en una base mayor que 1 se pueden hallar fácilmente en cualquier otra base.

2. ECUACIONES EXPONENCIALES

Una **ecuación** es **exponencial** cuando la incógnita aparece en el exponente.

Vamos a resolver los siguientes *tipos de ecuaciones exponenciales*:

1) Reducibles a una igualdad de potencias de la misma base
2) Resolubles por cambio de variable

2.1. Reducibles a una igualdad de potencias de la misma base

Para resolverlas, generalmente se descomponen en factores primos las bases, y se realizan las operaciones necesarias hasta conseguir una igualdad de potencias con la misma base.

[1] Actualmente esta notación está en desuso y se utiliza la notación $\log$ para representar el logaritmo neperiano.

Ejemplo 1:
Resolver la ecuación $4^{1-3x} = 2^{x-2}$

$(2^2)^{1-3x} = 2^{x-2}$ Descomponemos en factores la base 4

$2^{2(1-3x)} = 2^{x-2}$ Potencia de una potencia: se deja la base y se multiplican los exponentes

$2(1-3x) = x-2$ Igualamos los exponentes (ya que las potencias tienen la misma base)

$2-6x = x-2$ Quitamos paréntesis

$-6x - x = -2-2$ Agrupamos: las x a un miembro y los números al otro

$-7x = -4$ Operamos

$x = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$ Resolvemos: el coeficiente de x, pasa al otro miembro diviendo, pero con su signo.

Ejemplo 2:
Resolver la ecuación $3 \cdot 4^{3x} = 768$

$4^{3x} = \frac{768}{3}$ El 3 que está muliplicando, pasa dividiendo.

$4^{3x} = 256$ Efectuamos la división

$(2^2)^{3x} = 2^8$ Descomponemos en factores primos las bases.

$2^{6x} = 2^8$ Potencia de una potencia: se multiplican los exponentes.

$6x = 8$ Igualamos los exponentes.

$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ Resolvemos.

2.2. Resolubles por cambio de variable

Para resolver este tipo de ecuaciones, tenemos que conseguir (factorizando las bases, aplicando las propiedades de las potencias…) que todas las exponenciales que aparezcan sean la misma. Dicha exponencial nos da el cambio de variable que hay que hacer. Al realizar dicho cambio queda una ecuación de las que ya sabemos resolver (de primer grado, de segundo, bicuadradas...).

Ejemplo 3:
Resolver la ecuación $9^x - 8 \cdot 3^x - 5913 = 0$

$(3^2)^x - 8 \cdot 3^x - 5913 = 0$ Descomponemos 9 en factores primos.

$(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 5913 = 0$ Intercambiamos los exponentes.

$y^2 - 8y - 5913 = 0$ Hacemos el cambio de variable $3^x = y$.

$y = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5913)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{8+154}{2} = 81 \\ \frac{8-154}{2} = -73 \end{cases}$ Resolvemos la ecuación cuadrática.

$$3^x = \begin{cases} 81 \to 3^x = 3^4 \to x = 3 \\ -73 \to \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable y resolvemos la ecuación original.

3. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Un **sistema** de ecuaciones es **exponencial** cuando al menos una de sus ecuaciones lo es.

Para **resolver** dichos sistemas utilizaremos las técnicas vistas en el apartado anterior, y los transformaremos en sistemas lineales, que resolveremos por método que consideremos más adecuado.

Ejemplo 4:

Resolver el sistema exponencial $\begin{cases} 2^x \cdot 2^y = 256 \\ x - y = 4 \end{cases}$

$2^x \cdot 2^y = 2^8$ — Factorizamos 256 en la primera ecuación.

$2^{x+y} = 2^8$ — Multiplicamos potencias que tienen la misma base.

$x + y = 8$ — Igualamos los exponentes, ya que tienen la misma base.

$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$ — Este es el sistema lineal que tenemos que resolver.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$2x \quad = 12 \to x = \frac{12}{2} = 6 \to y = 8 - 6 = 2$$

Lo hemos resuelto por el método de reducción.

$(x, y) = (6, 2)$ — Es la solución del sistema.

Ejemplo 5:

Resolver el sistema exponencial $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ \frac{1}{2} \cdot 2^x + 5 \cdot 5^y = 9 \end{cases}$

$$u = 2^x$$
$$v = 5^x$$

Cambio de variable

$$\begin{cases} u + v = 9 \xrightarrow{\text{despejamos}} u = 9 - v \\ \frac{1}{2}u + 5v = 9 \end{cases} \searrow \frac{1}{2}(9 - v) + 5v = 9$$

Resolvemos el correspondiente sistema lineal.

$(u, v) = (8, 1)$ — Solución del sistema lineal.

$$2^x = 8 \to x = 3$$
$$5^y = 1 \to y = 0$$

Sustituimos en el cambio de variable y resolvemos el sistema original.

4. ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Son ecuaciones en las que la incógnita viene afectada por el logaritmo.

No existe un procedimiento general para resolver todas las ecuaciones logarítmicas, por lo que en cada caso concreto habrá que utilizar lo que sabemos:

1) Definición de logaritmo
2) Propiedades de los logaritmos
3) Igualdad de logaritmos

Ejemplo 6:

Resolver la siguiente ecuación: $\log 2 + \log\left(11 - x^2\right) = 2\log(5 - x)$

$\log\left[2 \cdot \left(11 - x^2\right)\right] = \log(5 - x)^2$ Aplicamos las propiedades de los logaritmos.

$2 \cdot \left(11 - x^2\right) = (5 - x)^2$ Igualamos las expresiones que hay dentro de los logaritmos.

$3x^2 - 10x + 3 = 0 \to x = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$ Resolvemos la ecuación de segundo grado correspondiente.

$11 - 3^2 > 0$ y $5 - 3 > 0$

$11 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 > 0$ y $5 - \frac{1}{3} > 0$

Hay que comprobar que las soluciones cumplen la ecuación logarítmica, es decir, que $11 - x^2 > 0$ y $5 - x > 0$, para las x obtenidas.

$x = 3$ y $x = \frac{1}{3}$ Soluciones de la ecución.

5. SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Un **sistema** de ecuaciones es **logarítmico** si, por lo menos, una de las ecuaciones que lo forman lo es.

Para resolver un sistema de ecuaciones logarítmicas se aplicarán los procedimientos vistos en el apartado anterior, para transformarlo en un sistema lineal o no lineal, que resolveremos por el método que consideremos más adecuado.

Ejemplo 7:

Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

$\log\frac{x}{y} = 1 = \log 10 \to \frac{x}{y} = 10 \to x = 10y$ Transformamos la segunda ecuación.

$(10y)^2 - y^2 = 11$ Sustituimos en la primera ecuación.

$99y^2 = 11 \to y = \pm\sqrt{\frac{11}{33}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ Resolvemos la correspondiente ecuación de segundo grado.

$x = \pm 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$ Hallamos los valores de x.

$(x,y)=\left(\frac{10}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ Solución. Los valores negativos no valen.

6. APLICACIONES

- Se utilizan para resolver las ecuaciones en que la incógnita está en el exponente. Por ejemplo, si nos piden el número de períodos *T* que hay que tener cierto capital *C*, para que el montante (capital existente en cada momento) *M*, sea el que nosotros queramos, hay de despejar *T* de la siguiente ecuación, aplicando logaritmos:

$$M=C\left(1+\frac{r}{n}\right)^{T}\rightarrow T=\frac{\log M-\log C}{\log\left(1+\frac{r}{n}\right)}$$

donde *M* = montante, *C* = capital, $r=\frac{R}{100}$ = tanto por uno (*R* = rédito), *n* = número de períodos por año y *T* = número de períodos total.

- Para medir la sensibilidad de una película.

- Para calcular números grandes.

- Escala Richter para los terremotos.

FUNCIONES POLINÓMICAS

1.- FUNCIONES AFINES

Las funciones afines son funciones de la forma

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=ax+b$$

donde a y b son números reales no nulos.

Si $b=0$ y $a\neq 0$, entonces la función

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=ax$$

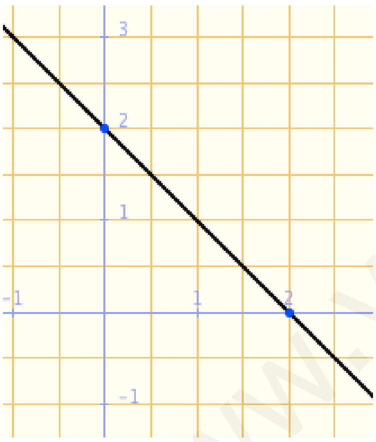
recibe el nombre de función lineal.

Por último, la función

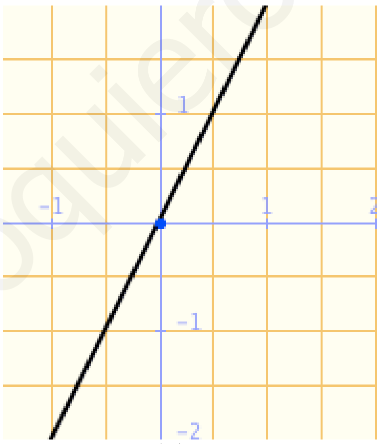
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=a$$

recibe el nombre de función constante.

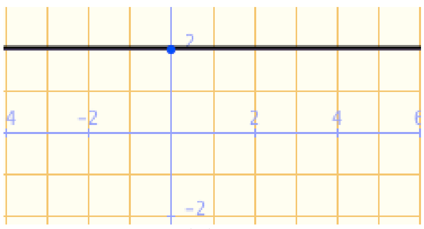
Geométricamente estos tres tipos de funciones representan rectas en el plano. Para dibujarlas, basta con construir una tabla de valores (con dos valores).



$f(x)=-x+2$



$f(x)=2x$



$f(x)=2$

Recuerda también que todas las funciones lineales pasan por el origen de coordenadas.

Algunas **propiedades** de las funciones afines, lineales y constantes son:

- Dominio: $(-\infty,+\infty)$
- Imagen o recorrido: $\begin{cases} -\text{ Afines y lineales: } (-\infty,+\infty) \\ -\text{ Constantes: } \{a\} \end{cases}$
- Monotonía: $\begin{cases} -\text{ Afines y lineales: } \nearrow\nearrow \text{ si } a>0 \text{ y } \searrow\searrow \text{ si } a<0 \\ -\text{ Constantes: Como su nombre indica son constantes} \end{cases}$
- Extremos relativos: No tienen

2.- FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son funciones de la forma

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

donde $a,c,b\in\mathbb{R}$ y $a\neq 0$.

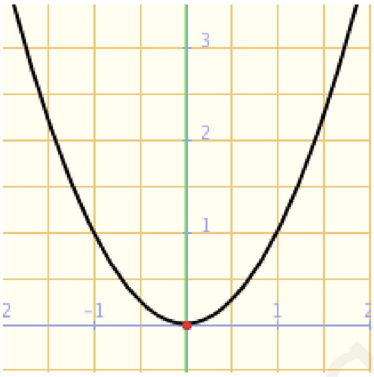
Geométricamente representan parábolas, para cuya representación seguiremos los siguientes pasos:

1) Se calcula el vértice: $V(x_v,y_v)$ donde $\begin{cases} x_v=\dfrac{-b}{2a} \\ y_v=f(x_v)= \text{ sustituir la } x \text{ anterior en la función} \end{cases}$

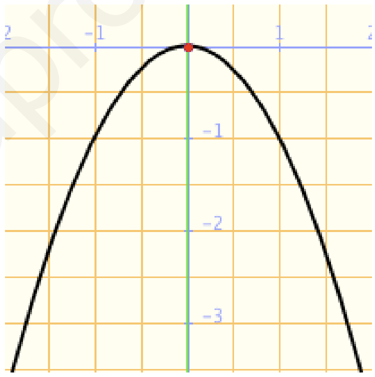
2) Se calculan los puntos de corte con el eje OX, si los hay, para lo que hay que resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

3) Sólo se aplica si no hemos podido usar 2). Se construye una tabla de valores con dos valores a la izquierda del vértice y otros dos a la derecha del mismo.

Recuerda que la parábola está abierta hacia arriba (es convexa) cuando $a>0$, y está abierta hacia abajo (es cóncava) cuando $a<0$.



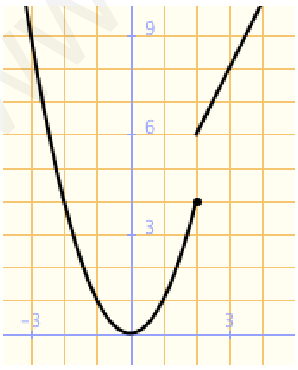
$y=x^2$



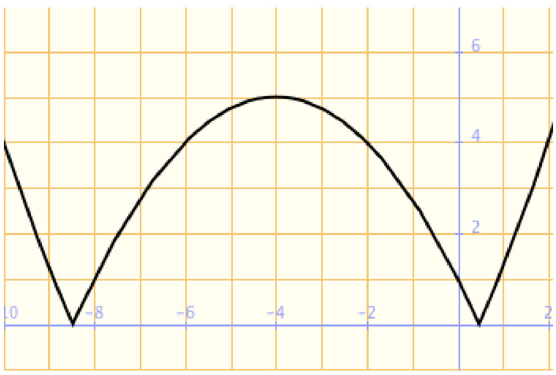
$y=-x^2$

3.- FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

Para su representación gráfica basta con hacer la correspondiente representación de cada uno de los trozos ("en su dominio").



$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ 2x+2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$



$$f(x)=\left|-\frac{1}{4}x^2-2x+1\right|$$

4.- APLICACIÓN: FUNCIONES DE OFERTA Y DEMANDA

La función o curva de demanda del mercado muestra la relación entre la cantidad demandada de un bien por todos los individuos y su precio, manteniendo constantes otros factores (gustos, renta, precio de bienes relacionados…)

La **función de demanda**, $f_d(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades de producto en función del precio, p, de cada unidad que los consumidores están dispuestos a comprar.

En su expresión matemática más simple la función de demanda puede ser:

- Lineal: $f_d(p) = mp + n$ con $m < 0$
- Cuadrática: $f_d(p) = ap^2 + bp + c$ con $a < 0$

La función o curva de oferta del mercado muestra la relación entre la cantidad ofrecida de un bien por todos los productos y su precio, manteniendo constante otros factores (tecnología, precio de factores productivos…).

La **función de oferta**, $f_o(p)$, para cualquier bien o producto, es la función que nos da el número de unidades que los fabricantes están dispuestos a producir en función del precio unitario del producto.

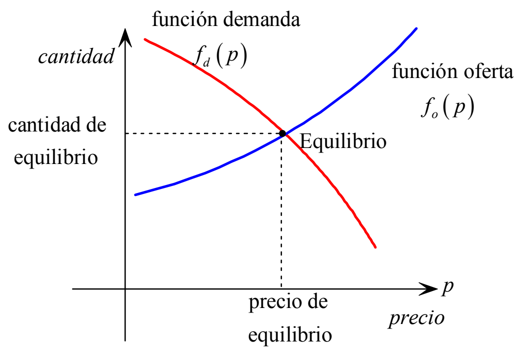
En su expresión matemática más simple la función de oferta puede ser:

- Lineal: $f_o(p) = mp + n$ con $m > 0$
- Cuadrática: $f_o(p) = ap^2 + bp + c$ con $a > 0$

Cuando se ponen en contacto consumidores y productores so sus respectivas funciones de demanda y oferta, podemos analizar cómo se lleva a cabo la coordinación de ambos tipos de agentes. Para ello debemos realizar un estudio conjunto de las gráficas de ambas funciones.

La **cantidad de equilibrio** es el número de unidades del producto que se debe fabricar para que la oferta y la demanda sean iguales.

El precio correspondiente a la cantidad de equilibrio, es decir, aquel precio en el que coinciden los planes de los demandantes o consumidores y de los ofertantes o productores se llama **precio de equilibrio**.



FUNCIONES RACIONALES Y FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO

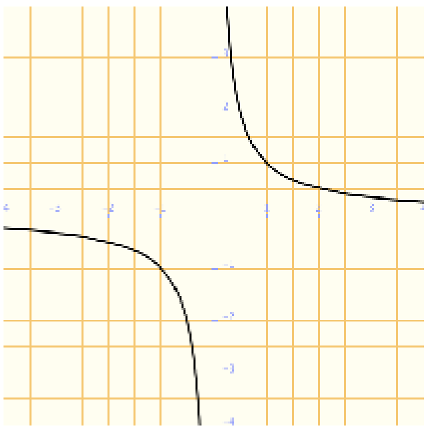
1.- FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

Son funciones de la forma

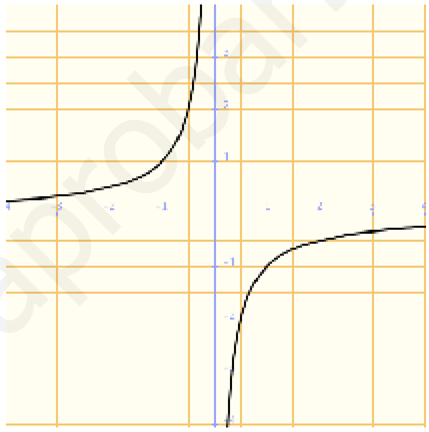
$$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{0\}$$
$$f(x)=\frac{k}{x}$$

donde k es un número real no nulo.

Geométricamente representan hipérbolas equiláteras cuyas asíntotas son los ejes coordenados.



$y=\frac{1}{x}$



$y=\frac{-1}{x}$

Algunas **propiedades** de las funciones de proporcionalidad inversa:

- Dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$
- Imagen o recorrido: $\mathbb{R}-\{0\}$
- Monotonía: $\begin{cases}\searrow\searrow & \text{si } k>0\\ \nearrow\nearrow & \text{si } k<0\end{cases}$
- Extremos relativos: No tienen
- Acotación: No están acotadas ni superior ni inferiormente
- Simetrías: Son funciones impares
- Asíntotas: Los ejes coordenados
- Continuidad: Continuas en su dominio de definición

Para su **representación gráfica** basta con construir una tabla de valores.

2.- FUNCIONES DE LA FORMA $y=\frac{ax+b}{cx+d}$

Para su **representación gráfica** (que es una hipérbola) construiremos una tabla de valores y a partir de ella deduciremos sus **propiedades**.

Estas gráficas poseen las siguientes asíntotas:

* Asíntota horizontal: $y=\dfrac{a}{c}$

* Asíntota vertical: $cx+d=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{d}{c}$

3.- FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO DE UNA FUNCIÓN

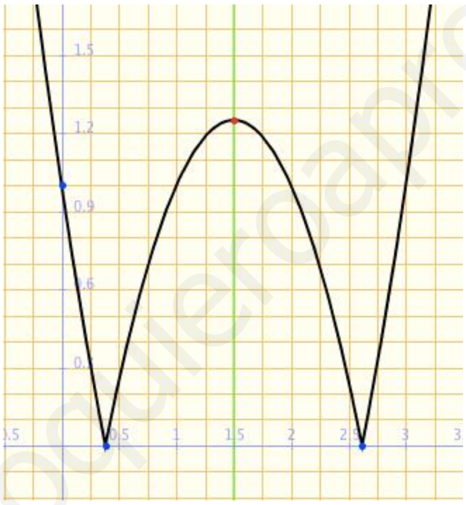
La **función valor absoluto** de una función $f(x)$, se define por:

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x) & \text{si } \ f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{si } \ f(x)<0 \end{cases}$$

Para su **representación gráfica** usaremos cualquiera de los siguientes dos procedimientos:

(1) Representar $f(x)$ y los trozos de curva que estén en la parte negativa del eje OY ponerlos positivos (mediante sus simétricos)

(2) Escribir la función $y=|f(x)|$ como una función definida a trozos, y representar cada uno de los trozos correspondientes.



4.- TRASLACIONES DE FUNCIONES

Este es un procedimiento para representar de forma rápida muchas funciones, conociendo la gráfica de algunas funciones básicas ($y=x,\ y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x},...$)

Seguiremos los siguientes **pasos**:

(1º) Se representa la función básica ($y=x,\ y=x^2,\ y=\dfrac{1}{x},...$) que notaremos por $f(x)$

(2º) Traslaciones verticales:

Nuestra función será de la forma $f(x+h)$. Pues bien, si

$$\begin{cases} h>0 \rightarrow \text{ trasladamos } h \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia arriba} \\ h<0 \rightarrow \text{ trasladamos } h \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia abajo} \end{cases}$$

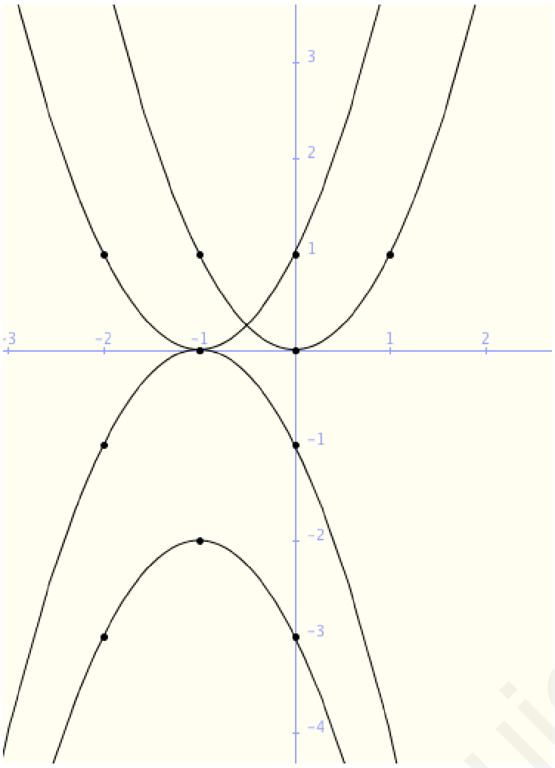
(3º) Traslaciones horizontales:

Nuestra función será de la forma $f(x)+k$. Pues bien, si

$$\begin{cases} k>0 \rightarrow \text{ trasladamos } k \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia la izquierda} \\ k<0 \rightarrow \text{ trasladamos } k \text{ unidades la gráfica de } f(x) \text{ hacia la derecha} \end{cases}$$

(4º) Si nuestra función es de la forma $f(x+h)+k$, seguiremos los pasos anteriores, en ese orden

Ejemplo: Representar $y=-(x+1)^2-2$



Pasos:

1º) $y=x^2$

2º) $y=(x+1)^2$

3º) $y=-(x+1)^2$

4º) $y=-(x+1)^2-2$

FUNCIONES LOGARÍTMICAS, EXPONENCIALES Y TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

■ **Logaritmo de base a**

El logaritmo en base $a(>0 \text{ y } \neq 1)$ de un número N es el exponente al que hay que elevar la base para que dé dicho número:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Los logaritmos de base 10 se llaman decimales[1] y se representaban por log, y los logaritmos de base e se llaman neperianos o naturales y se representaban por ln o L.

Propiedades:

1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$
2) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ siempre que $N \neq 0$
3) $\log_a N^m = m\log_a N \quad \forall m \in \mathbb{R}$

Transformación de logaritmos:

4) $\log_a N = \dfrac{\ln N}{\ln a}$

Otras propiedades:

5) Los logaritmos de un número en dos bases inversas a y $\dfrac{1}{a}$ son opuestos.
6) Conocidos los logaritmos en una base mayor que 1 se pueden hallar fácilmente en cualquier otra base.

■ **Función logaritmo de base $a(>0 \text{ y } \neq 1)$**

$$\begin{aligned} \log_a : (0,+\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

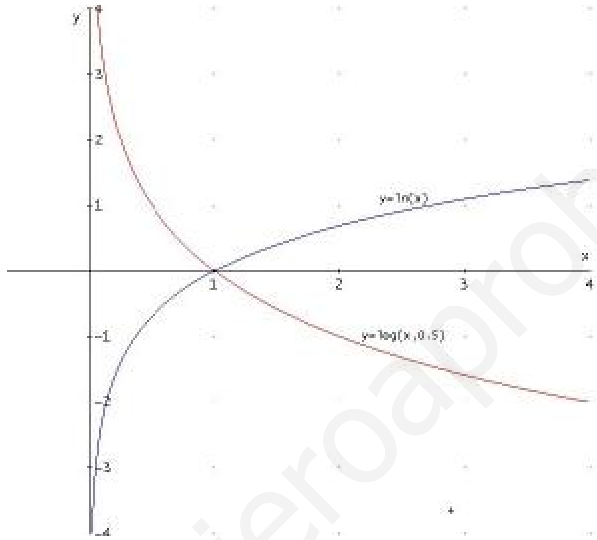
Propiedades:

1) $\mathrm{Dom}(\log_a) = (0,+\infty)$
2) $\mathrm{Img}(\log_a) = \mathbb{R}$
3) Continua y estrictamente monótona (creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$)
4) Biyectiva, luego tiene inversa que es la función exponencial de base a.

[1] Actualmente esta notación está en desuso y se utiliza la notación log para representar el logaritmo neperiano.

5)
$$\text{Si } a>1 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \end{cases}$$
$$\text{Si } a<1 \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0+} \log_a x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \end{cases}$$

6) Curvatura:
$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e \\ f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}\log_a e \to f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa si } a<e \\ \text{cóncava si } a \ge e \end{cases} \end{cases}$$

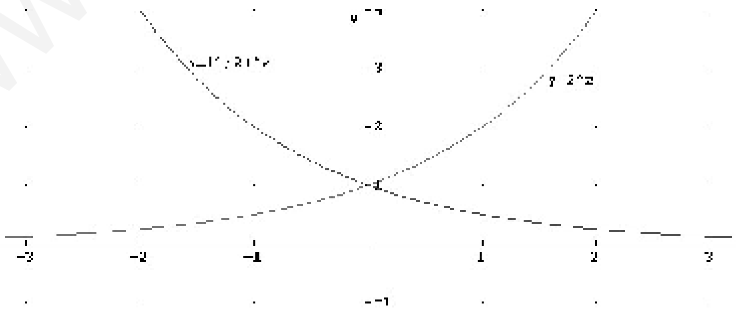


FUNCIONES EXPONENCIALES

■ **Dos funciones exponenciales**

$f(x) = 2^x$

$g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



Propiedades:

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2) $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^+$

3) f está acotada inferiormente, pero no superiormente

1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

2) $\text{Img}(f) = \mathbb{R}^+$

3) f está acotada inferiormente pero no superiormente

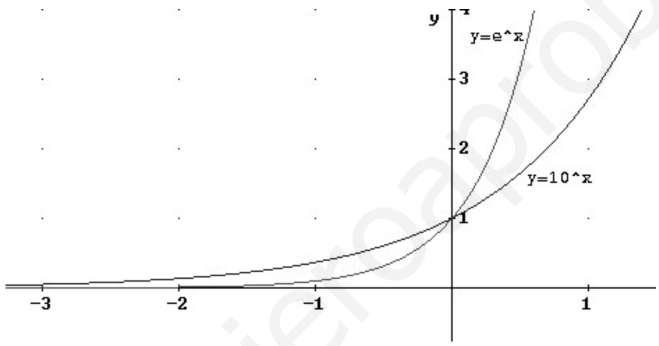
4) f no es par ni impar
5) f es continua
6) f es estrictamente creciente y por tanto inyectiva (luego tiene inversa)
7) f no tiene extremos relativos
8) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
9) $f^{-1}(x)=\log_2(x)$
10) f es sobreyectiva y como consecuencia, es biyectiva

4) f no es par ni impar
5) f es continua
6) f es estrictamente decreciente y por tanto inyectiva (luego tiene inversa)
7) f no tiene extremos relativos
8) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$
9) $f^{-1}(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x)$
10) f es sobreyectiva y como consecuencia, es biyectiva

■ **Dos funciones exponenciales especiales**

$f(x)=e^x$ (donde $\ln^{-1}=f: e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$)

$g(x)=10^x$



Propiedades:

1) $\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}$
2) $\mathrm{Img}(f)=\mathrm{Img}(g)=\mathbb{R}^+$
3) f y g son estrictamente crecientes y como consecuencia inyectivas
4) f y g están acotadas inferiormente pero no superiormente
5) f y g son continuas
6) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$
7) f y g son sobreyectivas y por tanto, biyectivas
8) $f^{-1}(x)=\ln x$ y $g^{-1}(x)=\log x$

■ **Función Exponencial**

$f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$

$f(x)=a^x:=e^{x\ln a}$ con $a>0$ y $a\neq 1$

Propiedades:

1) $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$
2) $\mathrm{Img}(f)=\mathbb{R}^+$
3) $f(0)=1$ y $f(1)=a$

4) $f(x+y)=f(x)f(y) \Leftrightarrow a^{x+y}=a^x a^y$
5) f es continua
6) f es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente si } a>1 \\ \text{decreciente si } 0<a<1 \end{cases}$
7) $\begin{cases} \text{Para } 0<a<1 \text{ se tiene que } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases} \\ \text{Para } a>1 \text{ se tiene que } \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \end{cases} \end{cases}$
8) Curvatura: $\begin{cases} f'(x)=a^x \ln a \\ f''(x)=a^{2x}\ln^2 a>0 \to f(x) \text{ es convexa} \end{cases}$

$$\begin{cases} f'(x)=3x^2 \\ f''(x)=6x \to f(x) \text{ es } \begin{cases} \text{convexa si } x>0 \\ \text{cóncava si } x<0 \end{cases} \end{cases}$$

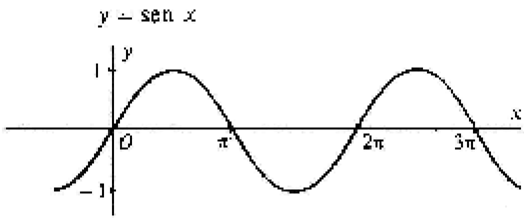
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

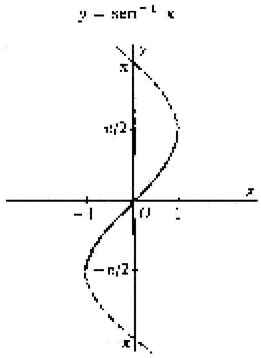
■ **Función seno**

$$\text{sen}:\mathbb{R}\to[-1,1]$$
$$x\mapsto \text{sen } x$$

Propiedades:

1) La función seno es impar: $\text{sen}(-x)=-\text{sen } x$
2) Es continua
3) $|\text{sen } x|\le 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es $2\pi-$periódica: $\text{sen}(x+2\pi)=\text{sen } x$
5) sen es estrictamente $\begin{cases} \text{creciente en } \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right] \\ \text{decreciente en } \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\end{cases}$
6) Tiene un máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$.
7) $\text{sen}:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ biyectiva $\Rightarrow \exists \text{sen}^{-1}=\text{arcsen}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}(\text{arcsen } x)=x=\text{arcsen}(\text{sen } x)$





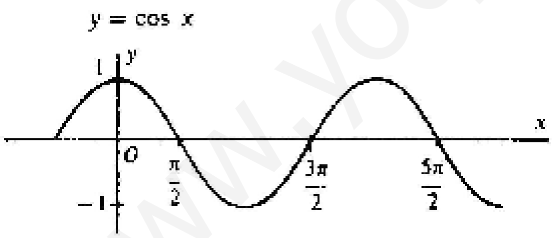
■ **<u>Función coseno</u>**

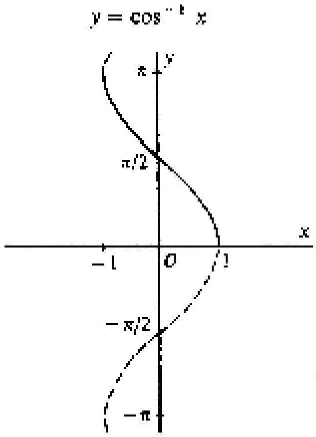
$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$x \mapsto \cos x$$

<u>Propiedades:</u>

1) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos\ x$
2) Es continua
3) $|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, es decir, está acotada
4) Es 2π – periódica: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
5) cos es estrictamente creciente en $]\pi, 2\pi[$ y decreciente en $]0, \pi[$.
6) Tiene un máximo relativo en $(0,1)$ y un mínimo relativo en $(\pi, -1)$.
7) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ biyectiva $\Rightarrow \exists \cos^{-1} = \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ tal que

$$\cos(\arccos x) = x = \arccos(\cos x)$$





■ **<u>Función tangente</u>**

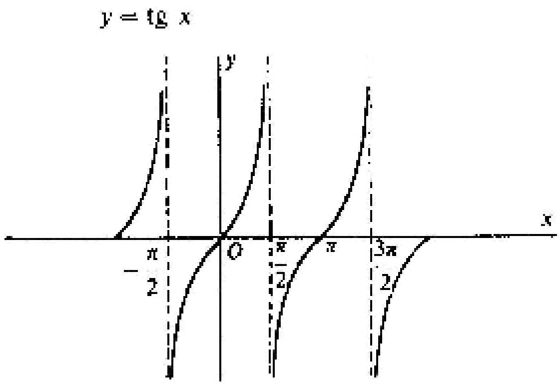
$$\text{tg} : \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \text{tg}\ x$$

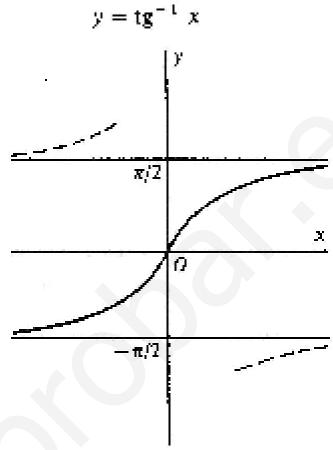
<u>Propiedades:</u>

1) La función tangente es impar: $\text{tg}(-x) = -\text{tg}\ x$
2) Es continua

3) No está acotada ni superior ni inferiormente
4) Es π – periódica: $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$
5) tg es estrictamente creciente
6) No tiene extremos relativos
7) $\operatorname{tg} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ biyectiva $\Rightarrow \exists \operatorname{tg}^{-1} = \operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$





LÍMITES

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Diremos que $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de D, y escribiremos $a \in D'$, cuando exista una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de D tal que $\{x_n\} \to a$.

Siempre que exista un intervalo abierto de centro a contenido en D se tendrá que $a \in D'$.

Definición: Sea $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, $a \in D'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ es *L*, y escribiremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, sii para valores de *x* cada vez más próximos a *a* (distintos de *a*), los valores de las imágenes $f(x)$ están cada vez más próximos a *L*.

Límites laterales:

El límite por la izquierda es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo menor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$$

El límite por la derecha es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la variable *x* se aproxima a *a* siendo mayor que *a*. Se denota por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{ó} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$$

Esto da lugar a la siguiente **caracterización**:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x), \ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \end{cases}$$

En cuyo caso $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Propiedades de los límites:

1) $\lim_{x \to a} k = k$

2) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

3) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

4) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

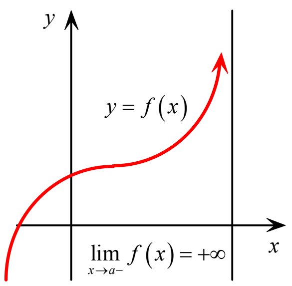
4) $\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim_{x \to a} g(x)}$ siempre que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

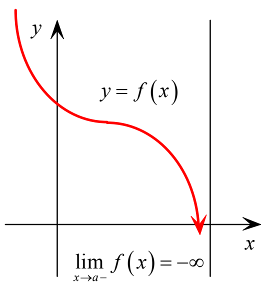
LÍMITES INFINITOS: ASÍNTOTAS VERTICALES

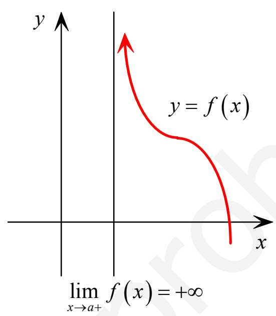
Decir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores mayores que cualquier número real *k*.
Análogamente, decir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ significa que cuando *x* tiende a *a*, con $x < a$, $f(x)$ toma valores cada vez más pequeños.

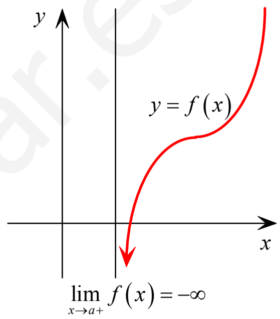
Llamamos asíntotas de una función a las rectas que se aproxima la función en el infinito.

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$





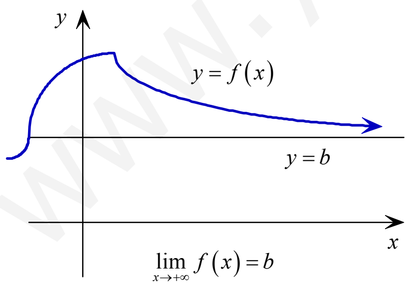


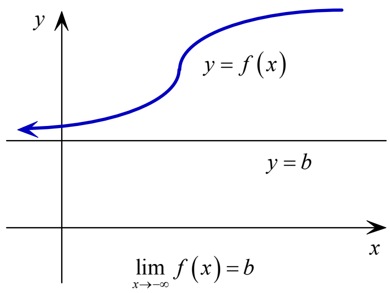


LÍMITES EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Decir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ significa que cuando *x* se hace tan grande como queramos, la función $f(x)$ toma valores muy próximos un número fijo *b*.
De igual modo, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ significa que $f(x)$ se aproxima a *b* cuando *x* se hace cada vez más pequeño.

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = k$ ó $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = k$



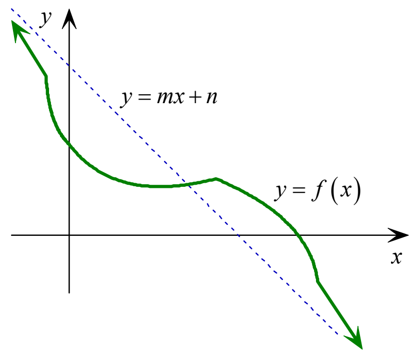


LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO: ASÍNTOTAS OBLICUAS

También puede suceder que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, lo que significa que *x* y $f(x)$ se hacen infinitamente grandes a la vez. Por tanto: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow f(x) > k$ para todo $x > p$, siendo *k* y *p* números arbitrariamente grandes.

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una <u>asíntota oblicua</u> de $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - mx - n) = 0$ $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx - n) = 0$

en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$



ASÍNTOTAS

ASÍNTOTAS VERTICALES

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = \pm\infty$$

Observaciones:

(1) Una función *puede tener infinitas asíntotas verticales*.

(2) En las funciones racionales las asíntotas verticales se hallan en los valores x que anulan al denominador.

(3) La gráfica ele *la función no puede cortar a las asíntotas verticales*.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de la función $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene *como máximo dos asíntotas horizontales*.

(2) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas horizontales*.

(3) Para *funciones racionales*:

- Si en una función racional el grado del numerador es menor que el grado del denominador la recta $y = 0$ (el eje OX) es una asíntota horizontal.
- Si en una función racional el grado del numerador y el del denominador son iguales la recta $y = b$ será una asíntota horizontal (b indica el cociente entre los coeficientes líderes del numerador y del denominador).
- Si en una función racional el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador la función presenta una asíntota oblicua y no hay asíntotas horizontales.
- Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador hay asíntota horizontal.

ASÍNTOTAS OBLICUAS

La recta $y = mx + n,\ m \neq 0$, es una asíntota oblicua de la función $f(x)$ sii existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(f(x) - mx - n\right) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} \left(f(x) - mx - n\right) = 0$$

en cuyo caso $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx\right)$

Observaciones:

(1) Una función puede tener *como máximo dos asíntotas oblicuas*.

(2) *Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente*.

(3) La gráfica de *la función puede cortar a las asíntotas oblicuas* en uno o varios puntos.

(4) Si en una función racional el grado del numerador es dos o más unidades mayor que el del denominador, no hay asíntota oblicua.

RESOLUCIÓN DE INDETERMINACIONES

Cuando al calcular el límite de una suma, un producto, un cociente o una potencia de funciones no se pueden aplicar las propiedades de los límites, es decir, hay que hacer un estudio particular de cada caso, suele decirse que estos límites son una indeterminación.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{k}{0}$ CON $k \neq 0$

Se calculan los límites laterales: $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to a-} f(x)$

Si existen ambos límites y coincide su valor, entonces:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x)$$

Si no existe alguno de los límites laterales o no coincide su valor, entonces, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{0}{0}$

a) Para funciones racionales

Se descomponen numerador y denominador en factores y se simplifica.

b) Para funciones irracionales

Si se trata de una función con raíces cuadradas en el numerador (o en el denominador), multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador (o del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\frac{\infty}{\infty}$

Se divide numerador y denominador por la mayor potencia de x que aparezca en la función (basta con dividir por la mayor potencia de x del denominador).

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $\infty - \infty$

a) La función es diferencia de dos funciones racionales

Se efectúa dicha operación.

b) La función es diferencia de funciones irracionales

Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada de la función.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO $0 \cdot \infty$

Transformar esta indeterminación en una de las anteriores, generalmente efectuando las operaciones.

INDETERMINACIÓN DEL TIPO 1^{∞}

Se resuelve empleando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)[f(x)-1]}$$

donde $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ y sabemos que

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

DERIVADAS. APLICACIONES

Definición:

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto interior de D. Diremos que

$$f \text{ derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

en cuyo caso dicho límite se representa por $f'(a)$.

Derivadas laterales:

$$f \text{ derivable por la izquierda en } x = a \Leftrightarrow \exists\, f'(a-) = \lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f \text{ derivable por la derecha en } x = a \Leftrightarrow \exists\, f'(a+) = \lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Caracterización:

$$f \text{ derivable en } x = a \Leftrightarrow \exists f'(a-), f'(a+) \text{ y } f'(a-) = f'(a+)$$

Derivabilidad y continuidad:

Si una función es derivable en un punto es continua en dicho punto.

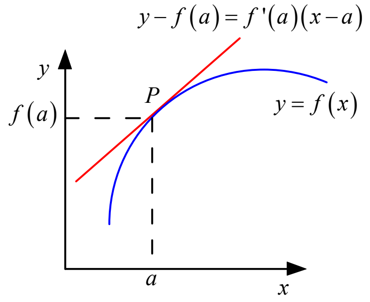
Propiedades fundamentales:

- Derivada de una suma de funciones: $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
- Derivada de una constante por una función: $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$
- Derivada de un producto de funciones: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- Derivada de un cociente de funciones: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- Derivada de una función compuesta: $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$
- Derivada de la función inversa: $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Ecuación de la recta tangente:

La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ es

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$



Interpretación geométrica de la derivada:

La derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto, es decir,

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(a)$$

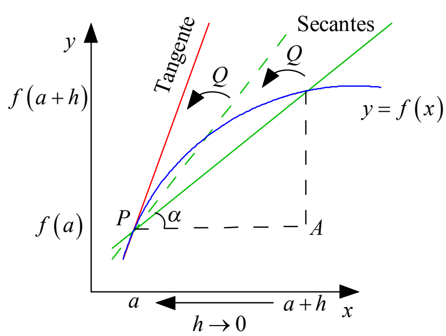


Tabla de derivadas

Simples		**Compuestas**	
Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y = c$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1} f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = a^x$ con $a > 0$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$ con $a > 0$	$y' = f'(x) a^{f(x)} \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) e^{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x} \log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = f'(x) \cos f(x)$
$y = \cos x$	$y = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos f(x)$	$y = -f'(x) \operatorname{sen} f(x)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = f'(x)[1 + \operatorname{tg}^2 f(x)]$
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \operatorname{arcsen} f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para representar gráficamente una función seguiremos los siguientes pasos:

1º) DOMINIO Y RECORRIDO

$Dom\ (f) = \{$números x para los que $f(x)$ tiene sentido$\}$

$Img\ (f) = \{y : \exists x$ de forma que $y = f(x)\}$

2º) SIMETRÍAS

a) **Función par**: $f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del eje OY

b) **Función impar**: $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x)$ es simétrica respecto del origen, es decir, si giramos 180º la gráfica obtenemos la misma función.

3º) PERIODICIDAD

$y = f(x)$ es periódica de período $T \Leftrightarrow f(x+T) = f(T)$ y T es el menor de los números que cumplen dicha condición.

4º) PUNTOS DE CORTE CON LOS EJES

a) **Corte(s) con el eje *OX*:** $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ → Ninguno, uno o más puntos

b) **Corte con el eje OY:** $x = 0 \Rightarrow f(0) = y$ → Ninguno o un punto

5º) REGIONES DE EXISTENCIA

a) Intervalos de positividad

$f(x) > 0 \Rightarrow$ gráfica por encima del eje OX

b) Intervalos de negatividad

$f(x) < 0 \Rightarrow$ gráfica por debajo del eje OX

Para determinar las regiones de existencia de la función $y = f(x)$ hay que estudiar el signo de $f(x)$.

6º) ASÍNTOTAS

a) Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to a-} f(x) = \pm\infty$$

Observaciones:

(1) Una función puede tener infinitas asíntotas verticales.

(2) La gráfica ele la función no puede cortar a las asíntotas verticales.

b) Asíntotas horizontales

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

Observaciones:

(1) Una función tiene corno máximo dos asíntotas horizontales.
(2) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas horizontales.

c) Asíntotas oblicuas

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de $f(x)$ si existe alguno de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx-n\right)=0$$

en cuyo caso $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$

Observaciones:
(1) Una función puede tener como máximo dos asíntotas oblicuas.
(2) Si una función tiene asíntota oblicua no tiene asíntota horizontal y recíprocamente.
(3) La gráfica de la función puede cortar a las asíntotas oblicuas en uno o varios puntos.

7º) PUNTOS DE DISCONTINUIDAD

$f(x)$ es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, y por tanto la función $y = f(x)$ presenta discontinuidad en un punto cuando o no existe el límite de la función en dicho punto o cuando ese límite no coincide con el valor que toma la función en él.

8º) MONOTONÍA

a) **Intervalos de crecimiento**: $f'(x) > 0$ para todos los x del intervalo
b) **Intervalos de decrecimiento**: $f'(x) < 0$ para todos los x del intervalo
c) **Puntos críticos**:

$x = a$ es un posible máximo o mínimo de $f(x)$ si $f'(a) = 0$

Si $f''(a) > 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un mínimo
Si $f''(a) < 0$, entonces $f(x)$ tiene en $x = a$ un máximo

Para determinar la monotonía de la función hay que estudiar el signo de $f'(x)$.

9º) CURVATURA

a) **Intervalos de convexidad**: $f''(x) > 0$ para todos los x del intervalo
b) **Intervalos de concavidad**: $f''(x) < 0$ para todos los x del intervalo
c) **Puntos de inflexión**:

$x = a$ es un posible punto de inflexión de $f(x)$ si $f''(a) = 0$

Si $f'''(a) > 0$, entonces *f(x)* tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo
Si $f'''(a) < 0$, entonces *f(x)* tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo

Para determinar la curvatura de la función hay que estudiar el signo de $f''(x)$.

FORMULARIO DE ESTADÍSTICA

Conceptos básicos

Población: conjunto de todos los elementos objeto de nuestro estudio

Muestra: subconjunto, extraído de la población,(mediante técnicas de muestreo) cuyo estudio sirve para inferir características de toda la población

Individuo: cada uno de los elementos que forman la población o la muestra

Variable estadística: característica objeto de estudio

- Discreta: Es la variable que presenta separaciones o interrupciones en la escala de valores que puede tomar
- Continua: Es la variable que puede adquirir cualquier valor dentro de un intervalo especificado de valores

Notaciones y frecuencias:

- *Variables discretas*
  $X: x_1, \dots, x_k$ con frecuencias $f_1, \dots, f_k$
  $f_i =$ número de veces que aparece el dato $x_i \equiv$ frecuencia absoluta de x_i
  $N =$ número total de datos
  $F_i = \sum_{j \le i} f_j \equiv$ frecuencia absoluta acumulada de x_i
  $h_i = \frac{f_i}{N} \equiv$ frecuencia relativa de x_i
  $H_i = \sum_{j \le i} h_j \equiv$ frecuencia relativa acumulada de x_i

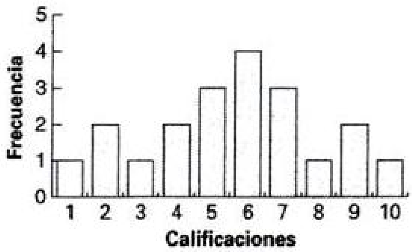
- *Variables continuas*
  $X: I_1, \dots, I_k$ (intervalos)
  $x_i =$ punto medio del intervalo $I_i \equiv$ marca de clase de I_i

Tablas de frecuencias:

x_i	f_i	F_i	h_i	H_i	…

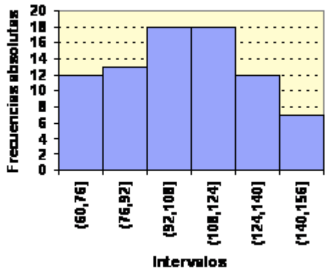
Gráficos estadísticos

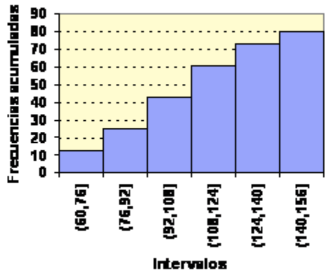
- Diagrama de barras o columnas



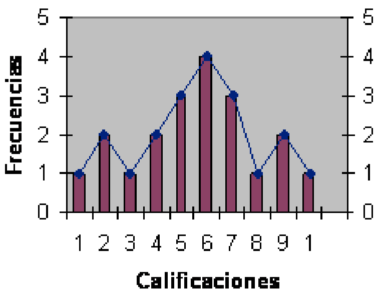
- Diagrama de sectores

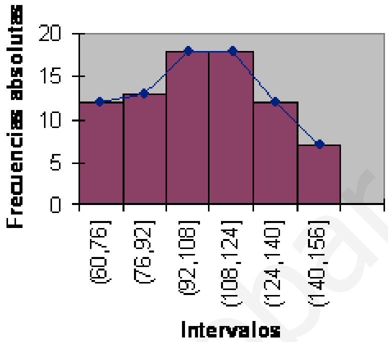
- Histogramas



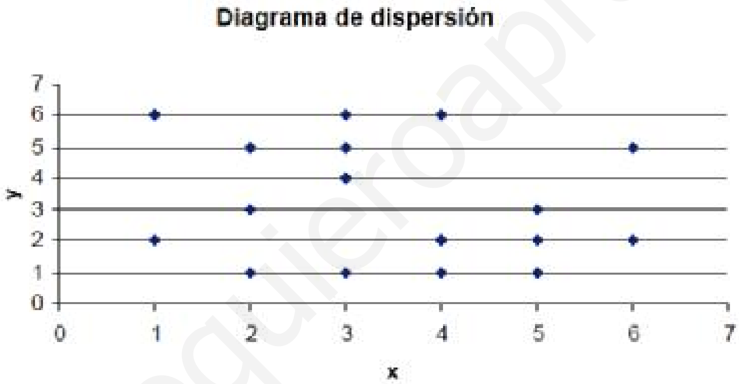


- Polígonos de frecuencias





- Diagrama de dispersión



Medidas de tendencia central:

Media (aritmética):

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$$

Mediana:

Se ordenan los datos. Si hay un número par de datos la mediana es la media de los dos datos centrales; si el número de datos es impar, la mediana es justamente el dato central.

Cálculo:

Datos sin agrupar:

$$F_{j-1} = \frac{n}{2} < F_j \Rightarrow Me = \frac{x_{j-1} + x_j}{2}$$

$$F_{j-1} < \frac{n}{2} < F_j \Rightarrow Me = x_j$$

Datos agrupados:

$$F_j = \frac{n}{2} \Rightarrow Me = x_j$$

$$F_{j-1} < \frac{n}{2} < F_j \Rightarrow Me = x_{j-1} + \frac{\frac{n}{2} - F_{j-1}}{f_j}(x_j - x_{j-1})$$

Moda:

Valor más frecuente de la variable.

Interpretación: análisis de los datos

Supongamos que estamos estudiando el número de vuelos semanales que realizan 10 pilotos. Los datos obtenidos son los siguientes:

Nº de vuelos	0	1	2	3
Frecuencia absoluta	2	4	3	1

La media es 1,3, y nos indica, que por término medio, el número de vuelos es de 1,3, es decir, que *por término medio estos pilotos vuelan entre 1 y 2 veces por semana*.

La moda es 1, lo que nos indica que lo más frecuente es que vuelen 2 veces por semana.

Y por último, la mediana es 1, lo que nos dice que *hay tantos pilotos que vuelan 1 o más veces, como pilotos que lo hacen 1 vez o menos*.

Medidas de posición no central:

Cuantiles:

El cuantil $p_{r/k}$, $r = 1,\ldots,k-1$, se define como aquel valor de la variable que divide la distribución de frecuencias, previamente ordenada de forma creciente, en dos partes, estando el $100\frac{r}{k}\%$ de ésta formado por valores menores que $p_{r/k}$.

Si $k=4$ los (tres) cuantiles reciben el nombre de **cuartiles**. Si $k=10$ los (nueve) cuantiles reciben, en este caso, el nombre de **deciles**. Por último, si $k=100$ los (noventa y nueve) cuantiles reciben el nombre de **centiles**.

Cálculo:

Datos sin agrupar:

$$F_{j-1} = \frac{r}{k}n < F_j \Rightarrow p_{r/k} = \frac{x_{j-1}+x_j}{2}$$

$$F_{j-1} < \frac{r}{k}n < F_j \Rightarrow p_{r/k} = x_j$$

Datos agrupados:

$$F_j = \frac{r}{k}n \Rightarrow p_{r/k} = x_j$$

$$F_{j-1} < \frac{r}{k}n < F_j \Rightarrow p_{r/k} = x_{j-1} + \frac{\frac{r}{k}n - F_{j-1}}{f_j}(x_j - x_{j-1})$$

Interpretación: análisis de los datos

Para comprar zapatillas a los miembros de una peña de bolos, se les he preguntado por la talla de calzado que usan y los resultados son los siguientes:

Nº de calzado	35	36	37	38	39	40	41	42
Frecuencia absoluta	7	13	20	37	42	50	23	8

El primer cuartil es $Q_1 = 38$ y lo que nos dice es que el 25 % de los miembros de la peña utilizan una talla de calzado menor o igual que 38.

El segundo cuartil es $Q_2 = 39$ (que coincide con la mediana) y lo que nos dice es que el 50 % de miembros usa una talla de calzado menor o igual que 39 y el otro 50 % mayor o igual.

El tercer cuartil es $Q_3 = 40$ que nos dice que el 75 % de los miembros del club de bolos usa una talla de calzado menor o igual que 40.

Medidas de dispersión:

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n} \longrightarrow \sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Desviación típica:

$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ (Raíz cuadrada positiva de la varianza)

Interpretación: análisis de los datos

Supongamos que estamos estudiando el número de aciertos de 100 alumnos en una prueba de 30 preguntas. Los resultados obtenidos se recogen en la siguiente tabla:

Aciertos	x_i	f_i
$[0,5)$	2,5	3
$[5,10)$	7,5	10
$[10,15)$	12,5	25
$[15,20)$	17,5	38
$[20,25)$	22,5	16
$[25,30]$	27,5	8
Total		100

En este caso el rango es 30, y por tanto, no nos proporciona ninguna información.
La varianza es $\sigma^2 = 33,79$ y la desviación típica es $\sigma = 5,81$, que son relativamente grandes, lo que nos dice que los datos presentan una agrupación relativamente pequeña respecto de la media.

Coeficiente de variación: (Se utiliza para comparar distribuciones)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

Si $CV_X < CV_Y$ entonces la distribución de X es más homogénea que la de Y

Si $CV = 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \bar{x}$ tiene máxima representatividad

Si $\bar{x} < \sigma \Rightarrow \bar{x}$ no tiene representatividad alguna

Interpretación: análisis de los datos

Vamos a comparar las siguientes distribuciones de datos:

7	3	2	4	5
3	2	4	9	8
2	5	6	5	4
8	6	3	4	0
0	2	1	5	6

1	8	6	1	5
1	0	2	4	1
7	1	3	0	5
9	2	5	7	4
4	3	5	2	3

Al calcular los coeficientes de variación obtenemos:

$$CV_1 = 0,57 \quad \text{y} \quad CV_2 = 0,70$$

Esto lo que nos dice es que la primera distribución de datos está menos dispersa que la segunda.

Covarianza: (Es una medida de dispersión conjunta de las variables *X* e *Y*)

$$\sigma_{(X,Y)} = \frac{\sum f_{ij} x_i y_j}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Rectas de regresión:

Determina la estructura de dependencia (en nuestro caso una recta) que mejor expresa el tipo de relación entre las variables.

1) **de** Y/X : $y - \overline{y} = \frac{\sigma_{(X,Y)}}{\sigma^2_X}(x - \overline{x})$

2) **de** X/Y : $x - \overline{x} = \frac{\sigma_{(X,Y)}}{\sigma^2_Y}(y - \overline{y})$

Índices de correlación:

Es frecuente que estudiemos sobre una misma población los valores de dos variables estadísticas distintas, con el fin de ver si existe alguna relación entre ellas, es decir, si los cambios en una de ellas influyen en los valores de la otra. Si ocurre esto decimos que las variables están correlacionadas o bien que hay correlación entre ellas.

1) **Razón de correlación**: $r^2 = \frac{\sigma^2_{(X,Y)}}{\sigma^2_X \cdot \sigma^2_Y}$

2) **Coeficiente de correlación lineal de Pearson**: $r = \frac{\sigma_{(X,Y)}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

El coeficiente de correlación lineal es un número real comprendido entre -1 y 1: $-1 \le r \le 1$

Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a -1 la correlación es fuerte e inversa, y será tanto más fuerte cuanto más se aproxime r a -1.

Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a 1 la correlación es fuerte y directa, y será tanto más fuerte cuanto más se aproxime r a 1.

Si el coeficiente de correlación lineal toma valores cercanos a 0, la correlación es débil.

Si $r = 1$ ó -1, los puntos de la nube están sobre la recta creciente o decreciente. Entre ambas variables hay dependencia funcional.

Ejemplo:

Una compañía de seguros considera que el número de vehículos (Y) que circulan por una determinada autopista a más de 120 km/h, puede ponerse en función del número de accidentes (X) que ocurren en ella.

Durante 5 días obtuvo los siguientes resultados:

X	5	7	2	1	9
Y	15	18	10	8	20

a) Calcula el coeficiente de correlación lineal.
b) Si ayer se produjeron 6 accidentes, ¿cuántos vehículos podemos suponer que circulaban por la autopista a más de 120 kms/h?
c) ¿Es buena la predicción?

Solución:
Disponemos los cálculos de la siguiente forma:

(Accidentes) x_i	Vehículos y_i	x_i^2	y_i^2	x_iy_i
5	15	25	225	75
7	18	49	324	126
2	10	4	100	20
1	8	1	64	8
9	20	81	400	180
24	71	160	1113	409

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{24}{5} = 4{,}8 \,; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{71}{5} = 14{,}2 \,; \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{160}{5} - 4{,}8^2 = 8{,}96$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{1113}{5} - 14{,}2^2 = 20{,}96 \,; \quad \sigma_{xy} = \frac{\sum x_i y_i}{N} - \bar{x}.\bar{y} = \frac{409}{5} - 4{,}8.14{,}2 = 13{,}64$$

a) Coeficiente de correlación lineal de Pearson: $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{13{,}64}{\sqrt{8{,}96}.\sqrt{20{,}96}} = 0{,}996$

b) Recta de regresión de ***y*** sobre ***x***: $y - \bar{y} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$

$$y - 14{,}2 = \frac{13{,}64}{8{,}96}(x - 4{,}8) \,; \quad y - 14{,}2 = 1{,}53(x - 4{,}8)$$

Para $x = 6$, $y - 14{,}2 = 1{,}53(6 - 4{,}8)$, es decir, y = 16,04. Podemos suponer que ayer circulaban 16 vehículos por la autopista a más de 120 kms/h.

c) La predicción hecha es buena ya que el coeficiente de correlación está muy próximo a 1.

TEMA 13: PROBABILIDAD

Índice de contenidos:

0.- *INTRODUCCIÓN* 1
1.- *EXPERIMENTOS* 1
2.- *ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS. ESPACIO DE SUCESOS* 2
3.- *CONCEPTO DE PROBABILIDAD SEGÚN LAPLACE: DEFINICIÓN CLÁSICA* 4
4.- *PROBABILIDAD CONDICIONADA* 6

0.- *INTRODUCCIÓN*

La Teoría de la Probabilidad se interesa por el análisis de la noción intuitiva de "azar" o "aleatoriedad", la cual como todas las nociones se origina en la experiencia. La idea cuantitativa de azar tomó forma primero con las tablas de juegos y comenzó con Pascal y Fermat (1645) como teoría de los juegos de azar. Desde entonces, la palabra probabilidad aparece en nuestro lenguaje ordinario en multitud de ocasiones. Así, afirmaciones del tipo de que la probabilidad de obtener dos seises al lanzar dos dados no cargados es uno entre 36, de que hay una probabilidad ligeramente inferior a un medio de que un bebé recién nacido sea varón y de que en los próximos dos años la probabilidad de que se pueda curar el cáncer es pequeña, puede decirse que expresan juicios de probabilidad. Sin embargo, cada uno de los ejemplos anteriores se refiere a un tipo diferente de juicio de probabilidad. El primero se refiere a un juicio de probabilidad que podríamos denominar clásico, en el que los posibles resultados son equiprobables (todos tienen la misma probabilidad de ocurrir). El segundo es una afirmación de tipo frecuentista y se refiere a la frecuencia relativa con la que cierta propiedad aparece entre los miembros de una clase determinada, y el tercero constituye un ejemplo de lo que podríamos llamar un juicio de credibilidad y es una medida del grado de confianza que tenemos en la verdad de una cierta proposición o en el acaecimiento de un suceso determinado.
El matemático francés Henri Poincaré (1854-1917) decía: "El azar es la medida de nuestra ignorancia". ¿Qué quería decir? Sencillamente, que en los fenómenos en que interviene el azar no podemos predecir su resultado de antemano.

1.- *EXPERIMENTOS*

En general, llamaremos **experimento** a cualquier procedimiento especificado o conjunto de operaciones que proporcionan unos determinados resultados.

Llamaremos **experimento determinista** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) se sabe con certeza el resultado que se va a obtener al repetir la experiencia en condiciones prefijadas, quedando el fenómeno determinado por ellas.

Ejemplos:

1. Tirar una piedra desde un edificio (sabemos que se va hacia abajo).
2. Calentar un cazo de agua (sabemos que la temperatura sube).
3. Medir la longitud de una circunferencia de radio dado.
4. Golpear una pelota (sabemos que se va a mover, e incluso conociendo las fuerzas que actúan, podemos conocer precisamente dónde caerá)

Llamaremos **experimento aleatorio, probabilista o estocástico** a aquel en el que se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) se conocen todos los posibles resultados de la experiencia.
b) repetido en igualdad de condiciones puede presentar resultados distintos en cada experiencia particular y al repetir la experiencia en condiciones fijadas no puede predecirse el resultado que se va a obtener.

Ejemplos:

1. Imaginemos que lanzamos un dado al aire (normal, de 6 caras y no trucado). ¿Podemos predecir el resultado que vamos a obtener? Evidentemente no.
2. Tirar una moneda al aire y observar qué cara cae hacia arriba.
3. Rellenar una quiniela de fútbol.
4. Extraer una carta de una baraja.
5. Jugar una partida de póker y, en general, cualquier juego en el que intervenga el azar.

2.- *ESPACIO MUESTRAL. SUCESOS. ESPACIO DE SUCESOS*

Definiciones:

Se llama **suceso elemental** a cada uno de los posibles resultados *indescomponibles* que pueden obtenerse al realizar un experimento aleatorio.

Denominamos **espacio muestral** al conjunto de resultados posibles que se obtienen al realizar un experimento aleatorio y lo denotaremos por Ω (aunque también se suele denotar por E).

Llamaremos **suceso** a cualquier subconjunto del espacio muestral, es decir, un suceso es un conjunto de puntos muestrales con alguna propiedad.
Denominamos **espacio de sucesos** al conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio, y se designa por $\wp(\Omega)$, donde Ω es el espacio muestral asociado al experimento aleatorio.

En todo experimento aleatorio siempre hay, al menos, dos sucesos:
Llamamos **suceso imposible** al suceso que no contiene ningún suceso y lo representaremos por $\varnothing \in \wp(\Omega)$, y llamamos **suceso seguro** al suceso $\Omega \in \wp(\Omega)$, ya que contiene a todos los sucesos elementales del experimento.

EJERCICIOS

1. *Obtener el espacio muestral de los puntos obtenidos al tirar un dado.*
2. *¿Y en el caso del lanzamiento de una moneda?*

3. *Describir el espacio muestral del experimento consistente en extraer una bola de una bolsa en la que hay 3 rojas (R), 2 blancas (B) y 4 verdes (V).*

4. *Escribir el espacio muestral asociado al experimento de sacar una carta de entre las diez del palo de copas de una baraja española.*

5. *Con ayuda de un diagrama de árbol, calcula el espacio muestral asociado al experimento aleatorio que consiste en lanzar tres monedas.*

Operaciones con sucesos:

Definimos la **unión** de los sucesos A y B, $A \cup B$, como el suceso formado por los sucesos elementales que pertenecen a alguno de los sucesos A ó B. Este suceso ocurre cuando ocurre A o cuando ocurre B.

Definimos el suceso **intersección** de los sucesos A y B, $A \cap B$, como el suceso que ocurre siempre que ocurren A y B, es decir, está formado por los sucesos elementales que pertenecen a A y a B.

Diremos que los sucesos A y B son:

a) **Compatibles** cuando $A \cap B \neq \varnothing$

b) **Incompatibles** cuando $A \cap B = \varnothing$.

Definimos el suceso **complementario** de A, $\overline{A} = A^c = A*$, como el suceso formado por los sucesos elementales que están en Ω y que no están en A, es decir, si A no se realiza se realiza siempre $\overline{A}$.

Definimos la **diferencia** de los sucesos A y B, $A - B$, como el suceso que se presenta cuando lo hace A pero no B, esto es: $A - B = A \cap \overline{B}$.

EJERCICIOS:

6. *¿Cómo son un suceso y su contrario?*

7. *Al extraer una carta de una baraja española, expresa los siguientes sucesos en forma de uniones o intersecciones:*

   A = salir figura de copas
   B = salir una sota o bastos

8. *Consideremos el experimento aleatorio consistente en el lanzamiento de un dado, cuyo espacio muestral es*

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

   Calcular la unión, la intersección, el complementario y la diferencia de los siguientes sucesos:

   a) $A = \{1, 2, 5\}$ y $B = \{2, 3, 5\}$

   b) $A =$ ser par y $B =$ ser impar

   c) $A = \{1, 3\}$ y $B = \{1, 3, 6\}$

d) $A=\{1,2,5\}$ y $B=$ ser primo

9. En el experimento consistente en la extracción de una carta de una baraja española, consideramos los siguientes sucesos:
A = salir oro
B = salir as
C = salir rey de copas o as de espadas
Interpretar los siguientes sucesos:
$$A\cup B,\ A\cup C,\ B\cup C,\ A\cap B,\ A\cap C,\ B\cap C$$

10. En el experimento de lanzar tres monedas, encuentra dos sucesos compatibles y otros dos incompatibles.

Propiedades de las operaciones con sucesos

1) Leyes de De Morgan
$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$$
2) $\overline{\overline{A}}=A$

EJERCICIOS:

11. Aplicando las leyes de De Morgan, expresar el suceso $(H\cup C)^c$, donde H es el suceso ser hombre y C estar casado.

12. Lanzamos un dado de seis caras, y consideramos los sucesos
A = número par y B = múltiplo de 3
Comprobar las leyes de De Morgan.

13. Consideremos los sucesos del experimento de lanzar dos monedas:
A = {sacar una cara y una cruz}
B = {al menos una cruz}
Calcular: $A\cup B$, $A\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ y $A-B$.

3.- CONCEPTO DE PROBABILIDAD SEGÚN LAPLACE: DEFINICIÓN CLÁSICA

Está basado en el concepto de resultados igualmente verosímiles y motivado por el *Principio de la razón insuficiente*, el cual postula que si no existe un fundamento para preferir una entre varias posibilidades, todas deben ser consideradas equiprobables.

Ejemplos

1) Así, en el lanzamiento de una moneda perfecta la probabilidad de cara debe ser igual a la de cruz y, por tanto, ambas iguales a ½.
2) De la misma manera, la probabilidad de cada uno de los seis sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado debe ser igual a 1/6.

Regla de LAPLACE

Si los sucesos elementales del espacio muestral son equiprobables (es decir, tienen la misma probabilidad), entonces la probabilidad de un suceso cualquiera A viene dada por el cociente entre el número de casos favorables de que ocurra A y el número de casos posibles, esto es:

$$P(A)=\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$$

<u>Propiedades</u> de la probabilidad:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) La suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales de un experimento aleatorio es igual a 1.

3) La probabilidad de un suceso es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos elementales que lo componen.

4) $P(\Omega)=1$ y $P(\varnothing)=0$

5) Si A y B son sucesos incompatibles, entonces:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

6) Si A y B son sucesos compatibles, entonces:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

7) La suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es igual a 1, es decir,

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

<u>PROBLEMAS</u>

14. *Se ha encargado la impresión de una encuesta. El impresor informa que cada millar de folios la máquina estropea 12 folios. Hallar la probabilidad de que elegido al azar un folio de la encuesta:*
    a) Esté mal impreso
    b) Esté correctamente impreso

15. *En el experimento que consiste en lanzar un dado cúbico y anotar el resultado de la cara superior, calcular la probabilidad de:*
    (a) Salir par
    (b) Salir múltiplo de 3
    (c) Salir número primo
    (d) Salir múltiplo de 5

16. *Una urna tiene ocho bolas rojas, cinco amarillas y siete verdes. Se extrae una al azar. Determinar la probabilidad de que:*
    (a) Sea roja
    (b) Sea verde
    (c) Sea amarilla
    (d) No sea roja
    (e) No sea amarilla

17. *Se extrae una carta de una baraja española. ¿Qué es más probable?:*
    (a) Que salga la sota de bastos o el rey de espadas
    (b) Que salga un oro o una figura
    (c) Que salga un oro o un no oro
    (d) Que salga una figura o que no salga una figura

18. *Hallar la probabilidad de que al lanzar tres monedas se obtenga al menos una cara.*

19. *Se lanzan dos dados cúbicos. Hallar la probabilidad de que los resultados de cada dado sean distintos.*

20. *Se lanzan dos monedas. Hallar las siguientes probabilidades:*
    (a) Obtener dos caras
    (b) Obtener dos cruces
    (c) Obtener al menos una cara

21. *Extraemos una carta de una baraja española. Hallar las siguientes probabilidades:*
    (a) Que sea un rey o un as
    (b) Que sea un rey o una copa
    (c) Que sea un rey y una copa

22. *Se lanzan al aire tres monedas. Determinar la probabilidad de que se obtengan al menos dos cruces.*

23. *Se lanzan simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Hallar la probabilidad de que la suma de los puntos obtenidos sea menor que siete.*

24. *Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0,5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?*

4.- PROBABILIDAD CONDICIONADA

Sea A un suceso con $P(A)>0$. Para cualquier otro suceso B se define la **probabilidad de B condicionada a A** por:

$$P\left(B/A\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

Como consecuencia:

$$P(A\cap B)=P(A)P\left(B/A\right)$$

Otra propiedad de la probabilidad condicionada es:

$$P\left(\overline{B}/A\right)=1-P\left(B/A\right)$$

PROBLEMAS

25. *En una clase infantil hay 6 niñas y 10 niños. Si se escoge a 3 alumnos al azar, halla la probabilidad de:*
    a) Seleccionar tres niños.
    b) Seleccionar 2 niños y una niña.
    c) Seleccionar, al menos, un niño.

26. *Se juntan 3 clases, A, B y C con el mismo número de alumnos en el salón de actos de un instituto. Se sabe que el 10 % de los alumnos en la clase A son zurdos, en la clase B el 8 % son zurdos y en la clase C el 88 % no son zurdos. Si elegimos al azar un alumno del salón de actos, ¿con qué probabilidad el alumno no será zurdo?*

27. *En una población se ha determinado que de cada 100 aficionados al fútbol, 25 son abonados del equipo A, 45 son abonados del equipo B y el resto son abonados del equipo C. Sabiendo que el 30 % de los abonados de A, el 40 % de los abonados de B y el 50 % de los abonados de C, tienen menos de 30 años, determinar la probabilidad de que seleccionado al azar un aficionado al fútbol en esa población, sea menor de 30 años.*

28. *En un mercado de valores cotizan un total de 60 empresas, de las que 15 son del sector bancario, 35 son industriales y 10 son del sector tecnológico. La probabilidad de que un banco de los que cotizan en el mercado se declare en quiebra es 0,01, la probabilidad de que se declare en quiebra una empresa industrial es 0,02 y de que lo haga una empresa tecnológica es 0,1.*
    a) *¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una quiebra en una empresa del citado mercado de valores?*
    b) *Habiéndose producido una quiebra, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una empresa tecnológica?*

29. *Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras y otra urna B contiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.*
    a) *Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea negra.*
    b) *Suponiendo que la bola extraída es blanca, calcula la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A.*

30. *En una cierta facultad se sabe que el 25 % de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15 % suspenden química y el 10 % suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.*
    a) *Calcula la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.*
    b) *Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?*

31. *En una mesa del comedor universitario están sentados 12 estudiantes, de los cuales 8 son de economía y 4 de ingeniería. Entre los 8 de economía, hay 4 varones y 3 entre los de ingeniería. Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? Suponiendo que el estudiante elegido ha resultado ser varón, ¿de cuál de las dos titulaciones es más probable que sea?*

32. *Una determinada multinacional tiene un 40 % de sus empleados que son hombres y un 60 % que son mujeres. De los empleados de esta multinacional, tienen estudios superiores un 30 % de los hombres y un 20 % de las mujeres.*
    a) *Calcular el porcentaje de empleados de esta multinacional que no tienen estudios superiores.*
    b) *Calcular la probabilidad de que un empleado de esta multinacional elegido al azar entre los que tienen estudios superiores sea mujer.*

33. *En una ciudad existen dos institutos el Alfa y el Beta. Se sabe que el 70 % de los estudiantes de la ciudad van al Alfa y el resto al Beta. En una encuesta se ha detectado que al 60 % de los alumnos de Alfa le gustan las Matemáticas, mientras que sólo al 35 % de los estudiantes de Beta le gustan las Matemáticas.*
    a) *Calcula la probabilidad de que a un alumno elegido al azar le gusten las Matemáticas.*
    b) *Sabiendo que a un alumno, elegido al azar, le gustan las Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que sea del instituto Alfa?*
    c) *Sabiendo que a un alumno, elegido al azar, no le gustan las Matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que sea del instituto Beta?*

34. *Los gerentes de unos grandes almacenes han comprobado que el 40 % de los clientes paga sus compras con tarjeta de crédito y el 60 % restante lo hace en efectivo. Ahora bien, si el importe de la compra es superior a 100 euros, la probabilidad de pagar con tarjeta pasa a ser 0,6. Si además sabemos que en el 30 % de las compras el importe es superior a 100 euros, calcular:*
    a) *La probabilidad de que un importe sea superior 100 euros y sea abonado con tarjeta.*
    b) *La probabilidad de que un importe sea superior a 100 euros, sabiendo que fue abonado en efectivo.*