8 Límites y continuidad

ACTIVIDADES INICIALES

8.I. Simplifica las expresiones siguientes.

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$

b) $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

d) $\dfrac{(x - 2)(x + 3)(2x - 1)}{x^2 - 4}$

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9} = \dfrac{(x - 3)(x - 4)}{x - 3)(x + 3)} = \dfrac{x - 4}{x + 3}$

b) $\dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \dfrac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

c) $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5} = \dfrac{x(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)(x - 5)} = \dfrac{x(x + 1)}{x - 5}$

d) $\dfrac{(x - 2)(x + 3)(2x - 1)}{x^2 - 4} = \dfrac{(x - 2)(x + 3)(2x - 1)}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{(x + 3)(2x - 1)}{x + 2}$

8.II. Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ b) $\dfrac{4x(x - 1)}{\sqrt{x^2 - x}}$ c) $\dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x}$

a) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \sqrt{x} + 1$

b) $\dfrac{4x(x - 1)}{\sqrt{x^2 - x}} = \dfrac{4x(x - 1)}{\sqrt{x^2 - x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x^2 - x}} = \dfrac{4x(x - 1)\sqrt{x^2 - x}}{x(x - 1)} = 4\sqrt{x^2 - x}$

c) $\dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 2x + 4} + x} = \dfrac{x^2 + 2x + 4 + x}{2}$

8.III. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

b) $Q(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 9x$

a) $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

b) $Q(x) = x(x + 1)(x - 3)^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

8.1. Calcula, operando en las expresiones originales y formando una tabla de valores, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 5x^2 + x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt[3]{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} (x + 1)^{x-2}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

a) 1

b) 2

c) 2

d) 1

e) 1

f) 1

8.2. Calcula, si existen, los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ para $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) No existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Aunque sí los límites laterales $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$

c) No existe $\lim_{x\to 0} f(x)$. Aunque sí los límites laterales y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$

8.3. Sabiendo que $\lim_{x\to a} f(x) = -3$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, calcula los siguientes límites cuando $x \to a$ de las siguientes funciones.

a) $2f - 3g$

b) $(3f)^2$

c) $\dfrac{g}{f}$

d) $(f \cdot g)^2$

e) $(f + g)^2$

f) $\dfrac{f}{g + 1}$

g) f^g

h) $(1 + g)^f$

i) g^{1-f}

a) -6

b) 81

c) 0

d) 0

e) 9

f) -3

g) 1

h) 1

i) 0

8.4. Se sabe que las funciones f y g tienen límite en el punto $x = a$. Además $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = -1$. Di si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

a) $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

b) Si $\lim_{x\to a} g(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x\to 1} (f(x))^{g(x)} = 4$.

c) $\lim_{x\to a} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ es un cuadrado perfecto.

a) Falsa, sería imposible que el producto valiera -1.

b) Verdadera, porque entonces el límite de f valdría $\dfrac{1}{2}$.

c) Verdadera, porque como $\lim_{x\to a} f(x) = \dfrac{-1}{\lim_{x\to a} g(x)}$, siempre al sustituir obtenemos el cuadrado del límite de una función.

8.5. Calcula, haciendo una tabla, los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{-4x + 4}{x - 1}$

b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}$

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 3}$

d) $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x^2 + x - 1}{2x^2 + 1}$

a) -4

b) 0

c) No existe, pues $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 3} \neq \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x - 3}$

d) $\dfrac{3}{2}$

8.6*. Calcula, operando en las expresiones originales:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x^2 + x}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2} \right)$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 3x^2}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2(2x - 3)}{x(x + 1)} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 12} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 3)(x - 4)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2} \right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x - 2}{(x - 1)(x - 2)} = \dfrac{-1}{0} = \infty$. Hacemos, por tanto, los límites laterales.

$\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2} \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{4x^2 - x^3 - 3x}{x^2 - 3x + 2} \right) = +\infty$

8.7. Halla el valor de los límites siguientes.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 90}{x^3 - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 - x}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{\sqrt{x + 12} - 3}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + x - 90}{x^3 - 3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{90}{x^3}}{1 - \dfrac{3}{x^3}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{0 + 0 - 0}{1 - 0} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 - x} = \dfrac{2 - \sqrt{2}}{0} = \infty$. Hacemos, por tanto, los límites laterales:

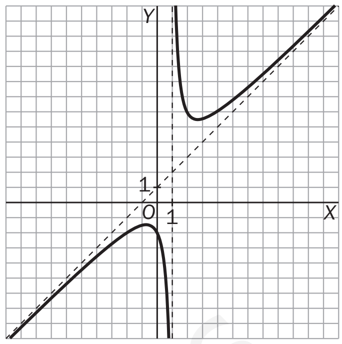
$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 - x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{2 - x} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{\sqrt{x + 12} - 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{\sqrt{x + 12} - 3} \cdot \dfrac{\sqrt{x + 12} + 3}{\sqrt{x + 12} + 3} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)(\sqrt{x + 12} + 3)}{x + 3} = 6$

8.8. Halla todas las asíntotas de $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x - 1}$ y $g(x) = \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 5x}$ y esboza sus gráficas.

Empecemos con $f(x)$.

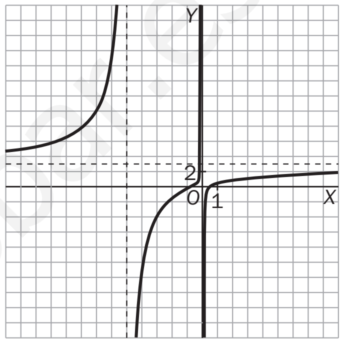


Límites infinitos: asíntota vertical $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 2}{x - 1} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 2}{x - 1} = -\infty$

Como $\dfrac{x^2 + 2}{x - 1} = (x + 1) + \dfrac{3}{x - 1}$, la función tiene una asíntota oblicua de ecuación $y = x + 1$.

Continuemos con $g(x)$.



Límites infinitos: asíntota vertical $x = 0$ y $x = -5$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 5x} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 5x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 5x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 5x} = -\infty$

Límites en el infinito: asíntota horizontal $y = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 5x} = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2 + x - 1}{x^2 + 5x} = 3$

Como tiene asíntotas horizontales, la función carece de asíntotas oblicuas.

8.9. ¿Puede tener una curva dada por un cociente de polinomios asíntotas horizontales y oblicuas?

No, porque para que haya asíntotas horizontales, el grado del numerador debe ser menor o igual que el del denominador. En cambio, para que haya asíntotas oblicuas, el grado del numerador debe ser mayor en una unidad que el del denominador.

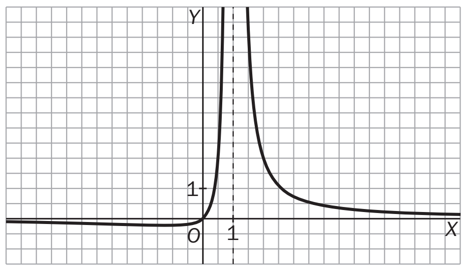
8.10. Calcula la asíntota oblicua de $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$. ¿Tiene asíntotas verticales esta función?

Efectuando la división obtenemos que $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1} = x + \dfrac{1 - x}{x^2 + x + 1}$.

Luego la asíntota oblicua tiene ecuación $y = x$.

La función no tiene asíntotas verticales, pues el denominador no se anula nunca.

8.11. Esboza la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x(x - 1)^2}$.



Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x(x - 1)^2} = 0$, $x = 0$ no es asíntota.

Como $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2}{x(x - 1)^2} = +\infty$, $x = 1$ es asíntota vertical.

Horizontal $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x(x - 1)^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x(x - 1)^2} = 0$; así pues, asíntota horizontal de ecuación $y = 0$.

8.12. ¿Son continuas en todo $\mathbb{R}$ las siguientes funciones?

a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x^4 + 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12}$

d) $f(v) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

a) Sí, pues el denominador no se anula.

b) No, es continua en $\mathbf{R} - \{1\}$, porque la función no está definida en el 1 aunque los límites laterales coinciden.

c) No, es continua en $\mathbf{R} - \{-4, 3\}$ por anularse el denominador.

d) No, es continua en $\mathbf{R} - \{1, 2\}$.

8.13. ¿Dónde es discontinua $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 3x + 2}$?

En $x = 2$ y $x = 1$, ya que en esos puntos se anula el denominador.

8.14. ¿Es continua $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 8x + 7}$ en $x = 1$?

No, porque $f(1)$ no existe.

8.15. Decide si la función $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leqslant 3 \\ 2x - 4 & \text{si } 3 < x \end{cases}$

es continua en $x = 0$. ¿Y en $x = 3$?

Si nos acercamos al cero por la izquierda, el valor de la función se aproxima a 1, que es el valor de f en 0. Si nos aproximamos al cero por la derecha, los valores de la función se aproximan a -1; así pues, la función no es continua en $x = 0$.

Tanto si nos acercamos por la izquierda como por la derecha al 3, la función se aproxima a 2, que es el valor de $f(3)$, luego la función es continua en $x = 3$.

8.16. Determina cuánto debe valer a para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbf{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + a & x \leqslant 1 \\ x^2 - a & 1 < x \end{cases}$$

f es continua en $\mathbf{R} - \{1\}$ por tratarse de polinomios. En $x = 1$ debemos estudiar los límites laterales y deben coincidir.

$\lim\limits_{x \to 1^-} (x^3 + a) = 1 + a$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - a) = 1 - a$. Por tanto, $1 + a = 1 - a$, es decir, $a = 0$.

8.17. El número de individuos de una población en un instante t viene dado por la función:

$$N(t) = 300te^{rt} \text{ si } t > 0$$

donde r es una constante.

Estudia el comportamiento a largo plazo de la población en los casos: $r > 0$, $r < 0$ y $r = 0$.

Caso $r > 0$: $\lim\limits_{t \to +\infty} 300te^{rt} = +\infty$; es decir, la población crece indefinidamente.

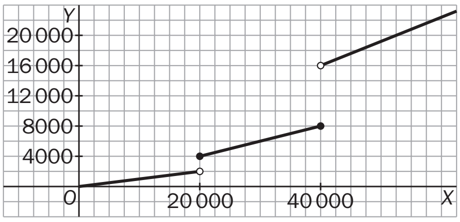
Caso $r < 0$: $\lim\limits_{t \to +\infty} 300te^{rt} = 0$; es decir, la población tiende a 0.

Caso $r = 0$: $\lim\limits_{t \to +\infty} 300te^{rt} = +\infty$; es decir, la población crece indefinidamente.

8.18. El tipo impositivo del impuesto sobre la renta de un país está estructurado en función de la renta anual de la siguiente forma:

– Renta anual inferior a 20 000 euros: 10%.
– Renta entre 20 000 y 40 000 euros: 20%.
– Renta superior a 40 000 euros: 40%.

Representa gráficamente esta función y estudia su continuidad.



$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1x \text{ si } x \leqslant 20\,000 \\ 0{,}2x \text{ si } 20\,000 < x \leqslant 40\,000 \\ 0{,}4x \text{ si } 40\,000 < x \end{cases}$$

No es continua ni en $x = 20\ 000$ ni en $x = 40\ 000$.

EJERCICIOS

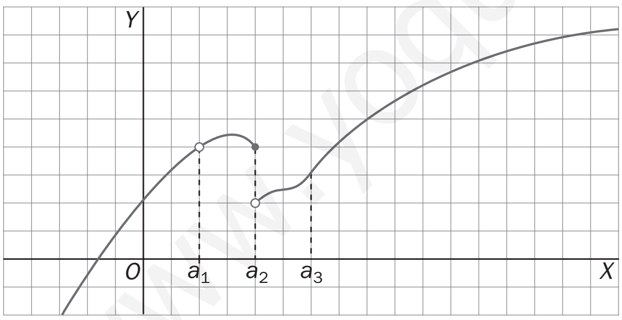
Límites de funciones

8.19. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x + 1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -x + 13 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

Calcula, si existen, los siguientes números: $f(2)$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, $f(4)$, $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, $f(5)$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

$f(2) = 4$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe; $f(4)$ no está definida; $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 9$; $f(5) = 8$ y $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = 8$.

8.20. La gráfica de $f(x)$ es la de la figura.



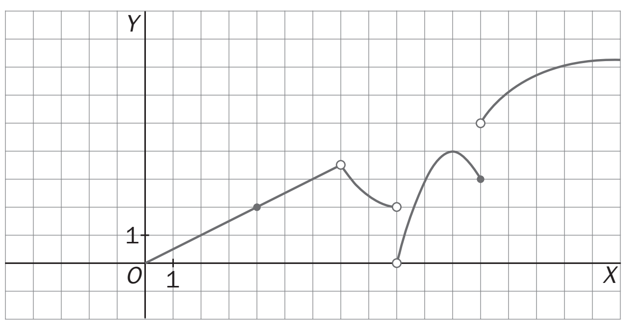
¿Existen $\lim\limits_{x \to a_1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a_2} f(x)$, y $\lim\limits_{x \to a_3} f(x)$?

$\lim\limits_{x \to a_1} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a_3} f(x)$ sí existen.

$\lim\limits_{x \to a_2} f(x)$ no existe ya que no valen lo mismo los límites laterales.

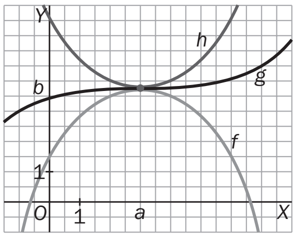
8.21. A partir de la gráfica de f dada en la figura, calcula, si existe, $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 7} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 12} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 12} f(x)$ no existen, al ser distintos los límites laterales.



8.22. Haz un esquema para ilustrar que:

"Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = b = \lim_{x \to a} h(x)$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = b$".



8.23. (TIC) Con ayuda de tu calculadora, obtén los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 2^+} (-\ln(x - 2))^{x-2}$

b) $\lim_{x \to 0^+} x^x$

a) 1

b) 1

8.24. Razona por qué no existen los límites:

a) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x - 2}$

b) $\lim_{x \to -3} \dfrac{2x}{x^2 - 9}$

a) Porque el denominador vale 0 en el límite y los límites laterales del cociente dan $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha.

b) Porque el denominador vale 0 en el límite y los límites laterales del cociente dan $+\infty$ por la derecha y $-\infty$ por la izquierda.

8.25. Calcula, si existen:

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -x + 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

c) $\lim_{x \to 2} f(x)$ para $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ x + 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

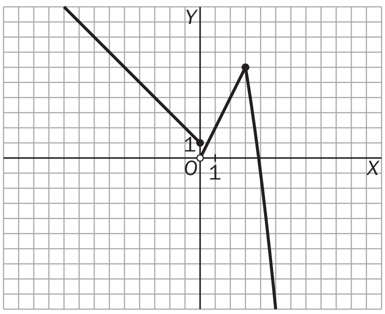
a) Existe y vale 0.

b) Existe y vale 1.

c) No existe porque los límites laterales son distintos.

8.26. Dibuja la gráfica de la función $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x \leqslant a \\ -x^2 + 15 & \text{si } a < x \end{cases}$

y determina para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

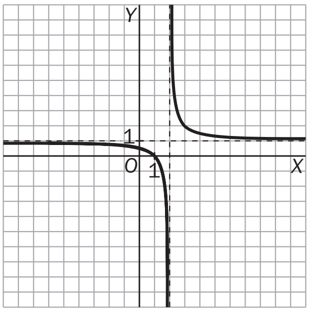


$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (2x) = 2a$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} (-x^2 + 15) = -a^2 + 15$

Por lo que $-a^2 + 15 = 2a$, es decir, $a = -5$ o $a = 3$.

8.27. Si la función $f(x)$ verifica que $3x + 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2 + 4x - 1$ para todo número x, haz un bosquejo de la gráfica $f(x)$ en las cercanías de $x = 1$ y calcula $\lim_{x\to 1} f(x)$.



Como $4 = \lim_{x\to 1}(3x + 1) \leqslant \lim_{x\to 1} f(x) \leqslant \lim_{x\to 1}(x^2 + 4x - 1) = 4$, entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$

Propiedades de los límites

8.28. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, calcula:

a) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{3} + 2g(x)\right)$

b) $\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot \sqrt{g(x)}\right)$

c) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))^2$

d) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x) + 1}\right)$

a) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{3} + 2g(x)\right) = \dfrac{b}{3} + 2c$

b) $\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot \sqrt{g(x)}\right) = b\sqrt{c}$. Si $c \geqslant 0$, y no existe si $c < 0$

c) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))^2 = (b + c)^2$

d) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x) + 1}\right) = \dfrac{b}{c + 1}$ si $c \neq -1$. Si $c = -1$ y $b \neq 0$, vale ∞, y si $c = -1$ y $b = 0$, es una indeterminación.

8.29. Si $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, ¿hay algún valor de b o c para el que no existan los siguientes límites?

a) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x) - 1}\right)$

b) $\lim_{x\to a}\left(f(x) \cdot \sqrt{g(x)}\right)$

c) $\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}$

d) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))^2$

e) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{(g(x))^2 + 1}\right)$

f) $\lim_{x\to a}\left(\dfrac{f(x) - b}{g(x) - c}\right)$

a) Si $c = 1$ y $b \neq 0$, vale ∞, y si $c = 1$ y $b = 0$, es una indeterminación.

b) Si $c < 0$

c) Si $b = c = 0$, es una indeterminación.

d) Existe siempre.

e) Existe siempre.

f) Siempre es una indeterminación.

8.30. Si $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = b$ y $\lim_{x\to a} f(x) = c$, calcula $\lim_{x\to a} 2g(x)$.

Como $\lim_{x\to a} g(x) = b - c$, entonces $\lim_{x\to a} 2g(x) = 2(b - c)$

8.31. Si $\lim_{x \to a} f(x) = b$ y $g(x)$ coincide con $f(x)$ excepto en $x = a$, ¿qué puedes decir sobre $\lim_{x \to a} g(x)$?

Que $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = b$

8.32. Si no existe $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$, ¿no existe necesariamente $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$?

Puede existir. Si, por ejemplo, $f(x) = \frac{x - 1}{x}$, $g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$, entonces $f(x) + g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$ y tenemos que no existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ ni $\lim_{x \to 0} g(x)$ y, sin embargo, sí existe $\lim_{x \to 0} f(x) + g(x) = 2$.

Cálculo de límites e indeterminaciones

8.33. Utiliza las propiedades de los límites para determinar el valor de los siguientes:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x + 3}{x - 1}$ c) $\lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{2x + 4}{x^2 + 1}}$ e) $\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 5}$ g) $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x + 4}}{2x - 7}$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{2x - 1}$ d) $\lim_{x \to -1} (x + 3)^{2x+1}$ f) $\lim_{x \to -2} \frac{2}{x^2 + 4}$ h) $\lim_{x \to 3} (x + 5)^{x-3}$

a) 5 c) 2 e) $\frac{25}{20} = \frac{7}{4}$ g) $\frac{3}{3} = 1$

b) 0 d) $2^{-1} = \frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{4}$ h) 1

8.34. Halla los siguientes límites indeterminados.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ c) $\lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{4 - x^2}$ e) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{3x}$ g) $\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 25}$ d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5}}{x}$ f) $\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 10x + 9}$ h) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

a) $\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$

b) $\lim_{x \to 5} \frac{(x - 2)(x - 5)}{(x + 5)(x - 5)} = \frac{3}{10}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{2x(2 - x)(2 + x)} = \frac{1}{16}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5}}{x} \cdot \frac{\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}}{\sqrt{5 - x} + \sqrt{5}} = \lim_{x \to 0} \frac{-x}{x(\sqrt{5 - x} + \sqrt{5})} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{10}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{x(x + 1)}{3x} = \frac{1}{3}$

f) $\lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 1)(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 9}{(x - 1)(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{48}$

g) $\lim_{h \to 0} \frac{h(6 + h)}{h} = 6$

h) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}} \cdot \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x} + x^2}{\sqrt{x} + x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(1 + \sqrt{x})x(1 - x)(x^2 + x + 1)}{(\sqrt{x} + x^2)(1 - x)} = 3$

8.35. Calcula $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ con $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x^2 + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x + 7) = 13$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + 9) = 13$, luego $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 13$

8.36. Calcula los siguientes límites en el infinito.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - x}{x^2 + x + 1}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1}\right)$

d) $\lim\limits_{v \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^3 + x + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3x} - \dfrac{3}{2x + 1}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 1}{2x - 4}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x - 2}}{\sqrt{x} + 5}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 - 1} = \dfrac{1}{3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - x}{x^2 + x + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + x} = 1$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^3 + x + 1} = 2$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2}{3x} - \dfrac{3}{2x + 1}\right) = 0$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 1}{2x - 4} = 0$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x - 2}}{\sqrt{x} + 5} = 2$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x + 1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}} = 0$

8.37. Halla $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ para $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x + 1}$.

Como $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x + 1} = \begin{cases} \dfrac{-x + 2}{x + 1} & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{x - 2}{x + 1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

se tiene que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 2}{x + 1} = 1$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x + 2}{x + 1} = -1$.

8.38. (TIC) Utiliza la calculadora para conjeturar el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x} - 1}$ y comprueba posteriormente si tu conjetura es correcta.

x	1	0,1	0,01	0,001
$\dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x} - 1}$	1,36603	1,04772	1,00498	1,0005

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 + 2x} - 1} \cdot \dfrac{\sqrt{1 + 2x} + 1}{\sqrt{1 + 2x} + 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(\sqrt{1 + 2x} + 1)}{2x} = 1$

8.39. (TIC) Utiliza la calculadora para hallar $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{2^x}$.

Haciendo una tabla para algunos valores

x	10	50	100
$\dfrac{x^3}{2^x}$	0,9766	$1{,}1 \cdot 10^{-10}$	$7{,}8 \cdot 10^{-25}$

vemos claramente que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{2^x} = 0$.

8.40*. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{2x}{x - 1} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} \left(\dfrac{3}{x^2 - 1} + \dfrac{2x}{x + 1} \right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{2x}{x - 1} \right)$

d) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\dfrac{x}{x^2 - 25} - \dfrac{1}{x - 5} \right)$

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{2x}{x - 1} \right) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2 - 2x(x + 1)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2 - 2x^2 - 2x}{x^2 - 1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} \left(\dfrac{3}{x^2 - 1} + \dfrac{2x}{x + 1} \right) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3 + 2x(x - 1)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3 + 2x^2 - 2x}{x^2 - 1} = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{2}{x^2 - 1} - \dfrac{2x}{x - 1} \right) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2 - 2x(x + 1)}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2 - 2x^2 - 2x}{x^2 - 1} = -\infty$

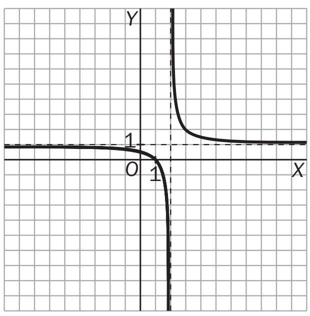
d) $\lim\limits_{x \to 5} \left(\dfrac{x}{x^2 - 25} - \dfrac{1}{x - 5} \right) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - (x + 5)}{x^2 - 25} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-5}{x^2 - 25} = \infty$

Estudiamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{-5}{x^2 - 25} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{-5}{x^2 - 25} = -\infty$

Por tanto, no existe el límite.

Asíntotas

8.41. Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$ y esboza la gráfica de ésta.



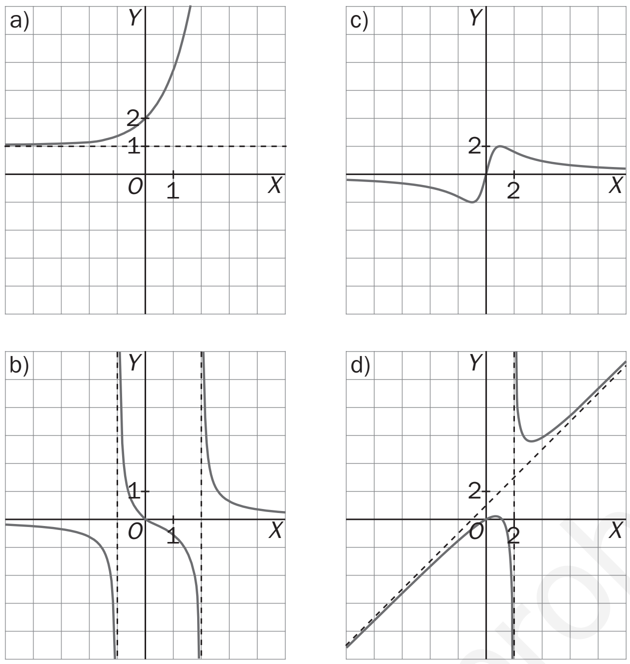
Vertical $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Horizontal $y = 1$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

8.42. ¿Tiene asíntotas verticales la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{1 + x^2}$?

No, pues su denominador no se anula nunca.

8.43. Di de qué tipo son las asíntotas de cada una de las funciones dadas por las siguientes gráficas, y da su ecuación si ésta resulta evidente.



a) Asíntota horizontal $y = 1$

b) Asíntota horizontal $y = 0$, asíntotas verticales en $x = -1$, $x = 2$

c) Asíntota horizontal $y = 0$

d) Asíntota vertical $x = 2$, asíntota oblicua $y = x + 1$

8.44. De una cierta función f sabemos que $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$. Escribe una posible fórmula para $f(x)$.

En $x = 2$ y en $x = 3$ hay asíntotas verticales, luego debe anularse el denominador. Éste puede ser, por ejemplo, $(x - 2)(x - 3)$.

El numerador se elige para que el signo sea el adecuado.

Escribiendo la función como $f(x) = \dfrac{2x - 5}{(x - 2)(x - 3)}$ comprobamos que se verifican las condiciones.

8.45. Obtén las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 2}$

d) $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$

a) Como $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \dfrac{2}{x - 1}$, la asíntota es $y = x + 1$.

b) Como $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = x - 2 + \dfrac{1}{x}$, la asíntota es $y = x - 2$.

c) Como $f(x) = \dfrac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 2} = 2x + \dfrac{-5x + 1}{x^2 + 2}$, la asíntota es $y = 2x$.

d) Como $f(x) = x + 3 + \dfrac{1}{x}$, la asíntota es $y = x + 3$.

8.46. Encuentra, sin operar, la asíntota oblicua de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x + 4 + \dfrac{1}{x}$

b) $f(x) = x + 2 + \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = 3x - \dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{x + 2}$

d) $f(x) = -x + 1 - \dfrac{3}{x - 2}$

a) $y = x + 4$

b) $y = x + 2$

c) $y = 3x - \dfrac{1}{2}$

d) $y = -x + 1$

8.47. Considera la función $f(x) = a + \dfrac{b}{x + c}$ siendo a, b y c números reales. Calcúlalos sabiendo que:

- La gráfica de f presenta en $-\infty$ una asíntota horizontal de ecuación $y = 2$.
- La gráfica de f presenta en $x = 1$ una asíntota vertical.
- El punto (6, 3) pertenece a la gráfica de f.

Como $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$, debe ser $a = 2$. $1 + c = 0$, luego $c = -1$. $f(6) = 2 + \dfrac{b}{6 - 1} = 3$, luego debe ser $b = 5$.

Así pues, la función es $f(x) = 2 + \dfrac{5}{x - 1}$.

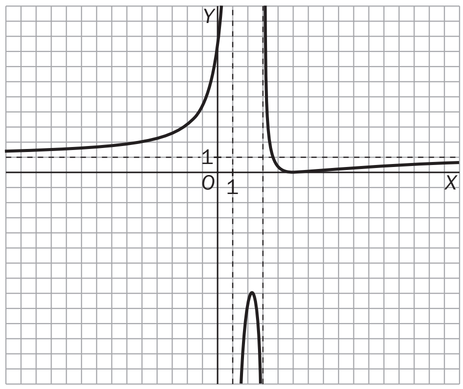
8.48. Obtén las asíntotas horizontales y verticales de la función $f(x) = \dfrac{(x - 5)^2}{(x - 1)(x - 3)}$ y esboza la gráfica de f.

Asíntotas verticales

$x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

$x = 3$, pues $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$

Horizontal $y = 1$, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$



8.49. Si $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x + 2}$, demuestra que $f(x)$ se puede escribir como $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{9}{x + 2}$. ¿Tiene alguna asíntota horizontal $f(x)$? ¿Y vertical? ¿Y oblicua?

Al dividir $2x^2 - x - 1$ entre $x + 2$ obtenemos de cociente $2x - 5$ y de resto 9, luego

$f(x) = 2x - 5 + \dfrac{9}{x + 2}$.

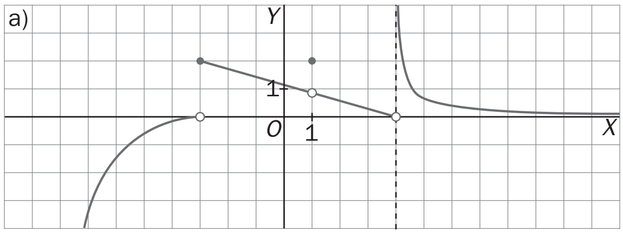
$f(x)$ no tiene asíntotas horizontales, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

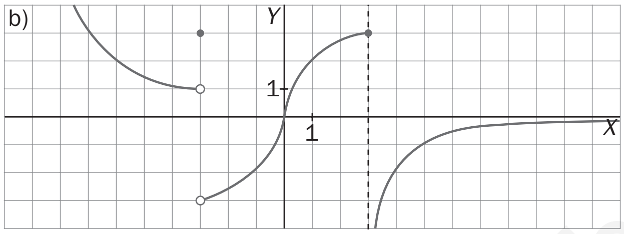
Tiene una asíntota vertical en $x = -2$, pues $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$.

$y = 2x - 5$ es asíntota oblicua, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (2x - 5)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{9}{x + 2} = 0$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x - 5)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{9}{x + 2} = 0$.

8.50. Señala los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y di de qué tipo son.





a) $x = -3$ de salto finito, $x = 1$ evitable y $x = 4$ de salto infinito

b) $x = -3$ de salto finito y $x = 3$ de salto infinito

8.51. Calcula, si los hay, los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos.

a) $f(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

a) $x = 1$. De salto infinito

b) $x = 2$. Evitable

c) Es continua siempre

d) $x = 2$. Evitable

8.52. Si f y g son funciones continuas con $f(2) = 7$ y $\lim\limits_{x \to 2} (3f(x) - 2g(x)) = 1$, calcula $g(2)$.

$\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 10$, y como g es continua en $x = 2$, entonces $g(2) = 10$.

8.53. Explica por qué las funciones dadas son discontinuas en el punto cuya abscisa se señala:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ en $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ en $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-2|}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x = 2$

a) Porque no existe $f(2)$.

b) Porque no coincide $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$ con $f(1) = 0$.

c) Porque no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, ya que $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$.

8.54. **Halla el valor de a para el que la función $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ sea continua en todos los puntos.**

Se debe verificar que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a -1 exista, por lo que los límites laterales deben coincidir:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -a + 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = a - 2 \end{array}\right\}$$

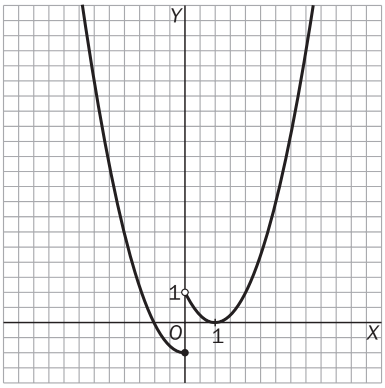
Por tanto, $-a + 2 = a - 2$. Resolviendo la ecuación, se tiene que $a = 2$.

Para $a = 2$, la función queda así: $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Para $a = 2$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$, al igual que $f(-1)$, por lo que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ y la función es continua.

8.55. **(PAU) Representa la siguiente función y estudia su continuidad en el punto $x = 0$.**

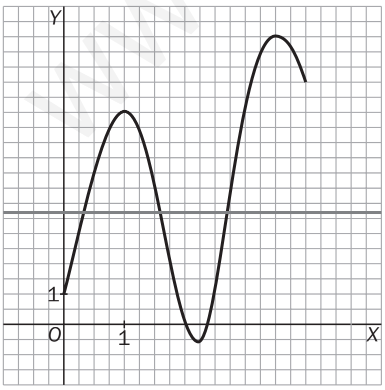
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (x - 1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



No es continua en $x = 0$ al presentar una discontinuidad de salto finito.

8.56. **Dibuja una posible gráfica de una función continua f tal que $f(0) = 1$ y $f(4) = 8$, y comprueba si existe algún número c entre 0 y 4 tal que $f(c) = 3$.**

¿Crees que la ecuación $x^5 - 2x + 1 = 7$ tiene alguna solución comprendida entre 1 y 2?



El problema es equivalente a preguntar si la ecuación $x^5 - 2x - 6 = 0$ tiene alguna solución comprendida entre 1 y 2. La respuesta es sí, porque si consideramos la función $f(x) = x^5 - 2x - 6$ vemos que es una función continua y que $f(1) = -7$ y $f(2) = 22$, luego su gráfica corta al eje de abscisas entre 1 y 2.

Límites en situaciones concretas

8.57. Antes de comenzar la producción en serie, una empresa aeronáutica ha fabricado 3 aparatos para venderlos, después de calcular los gastos de fabricación, realizar el estudio de mercado, etc., por un total de 9 millones de euros. Una vez efectuado este trabajo, comienza la producción en serie, siendo entonces de 0,3 millones de euros el coste de fabricación de cada avión. Se representa por x el número de aviones fabricados en serie y por $f(x)$ el precio total de un avión para x aviones construidos.

a) Explica por qué $f(x) = \dfrac{0{,}3x + 9}{x + 3}$ para $x \geqslant 0$.

b) Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y explica en términos económicos el valor obtenido.

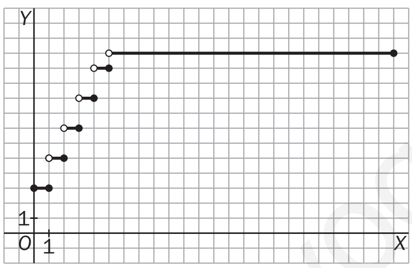
a) Para fabricar x aviones en serie, primero fabricaron 3 con un coste de 3 millones cada uno, y después, x aviones a 0,3 millones cada uno, luego el precio total de los $x + 3$ aviones ha sido de $0{,}3x + 3 \cdot 3 = 0{,}3x + 9$ millones de euros. Así pues, el precio medio por unidad construida en serie es de $f(x) = \dfrac{0{,}3x + 9}{x + 3}$ con $x \geqslant 0$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{0{,}3x + 9}{x + 3} = 0{,}3$. El gasto inicial para la fabricación de los tres prototipos no encarece el producto si posteriormente se fabrica una gran cantidad de aparatos en serie.

8.58. En un aparcamiento público se cobran 3 euros por la primera hora o fracción y 2 por cada hora o fracción siguiente, hasta llegar a un máximo de 12 euros por un día.

a) Dibuja una gráfica que refleje el precio de dejar el coche en ese aparcamiento, como función del tiempo que permanece allí.

b) Estudia los puntos de discontinuidad de esta función y su significado para alguien que deje su coche en ese aparcamiento.



La función es discontinua en los puntos de abscisa $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$. Esto significa que diferencias de pocos minutos pueden hacerte pagar un euro más si la estancia ha sido próxima a un número entero de horas.

8.59. Las conclusiones de un estudio demográfico establecen que el número de habitantes de una población vendrá dado en los próximos años por la función $f(t) = \dfrac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$ siendo t el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es el tamaño actual de la población?

b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población?

a) $f(0) = 5000$ individuos.

b) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2} = 7500$. Sí, se estabilizaría en 7500 individuos.

8.60. El rendimiento (medido de 0 a 100) de cierto producto en función del tiempo de uso (x, en años) viene dado por la siguiente expresión: $f(x) = 8{,}5 + \dfrac{3x}{1 + x^2}$, $x \geqslant 0$.

Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al que el producto tenía cuando era nuevo?

No, pues $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(8{,}5 + \dfrac{3x}{1 + x^2}\right) = 8{,}5$, luego se mantendrá al menos como a $x = 0$ años.

PROBLEMAS

8.61. El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función $f(t) = \dfrac{18 + t^2}{(t + 3)^2}$ donde t es el tiempo medido en años desde $t = 0$. Calcula la población inicial y el tamaño de la población a largo plazo cuando el tiempo tiende a infinito.

Población inicial $= f(0) = 9$ millones de habitantes

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} \left(\dfrac{18 + t^2}{(t + 3)^2}\right) = 1$ millón de habitantes a largo plazo

8.62. (PAU) Se ha investigado el tiempo T, en minutos, que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento x, en días, obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x + 30} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 30 \\ \dfrac{1125}{(x - 15)(x - 5)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función T es continua en todo su dominio.

b) ¿Se puede afirmar que cuanto más se entrene un deportista, menor será el tiempo en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

c) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 3 minutos? ¿Y en menos de 2 minutos?

a) En (0, 30) la función es continua, pues en ese intervalo el denominador de $\dfrac{300}{x + 30}$ no se anula.

Lo mismo ocurre con la función $\dfrac{1125}{(x - 15)(x - 5)} + 2$, pues los puntos en los que es discontinua (15 y 5) no pertenecen al intervalo $(30, +\infty)$ en los que T toma esa expresión.

Veamos qué ocurre en $x = 0$ y $x = 30$.

$T(0) = 10$, $\lim\limits_{x\to0^+} T(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{300}{x + 30} = 10$

$T(30) = 5$, $\lim\limits_{x\to30^-} T(x) = \lim\limits_{x\to30^-} \dfrac{300}{x + 30} = 5$ $\quad \lim\limits_{x\to30^+} T(x) = \lim\limits_{x\to30^+} \left(\dfrac{1125}{(x - 15)(x - 5)} + 2\right) = 5$

Así pues, T es continua en su dominio.

b) Como en ambas expresiones los numeradores son fijos y los denominadores son cada vez mayores y la función es continua, entonces es decreciente. Así pues, el máximo valor lo toma en cero, que es 10.

Ningún deportista puede tardar más de 10 minutos.

c) Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1125}{(x - 15)(x - 5)} + 2\right) = 2$ y la función es decreciente, se concluye que entrenando lo suficiente se puede hacer en menos de 3, pero nunca en menos de 2, aunque sí puede quedar muy próximo a 2 minutos si entrena muchísimos días.

8.63. La temperatura (en grados centígrados) de un trozo de metal sumergido en una solución durante 9 horas viene dada por $T(t) = 10 + \dfrac{20}{1 + t} - 5t$, $0 \leqslant t \leqslant 9$. Halla:

a) La temperatura inicial del metal.

b) ¿A cuánto asciende la temperatura del metal al final del proceso?

a) $T(0) = 30$ °C

b) $T(9) = -33$ °C

8.64. **Las pérdidas o ganancias de una empresa, expresadas en centenares de miles de euros cuando han transcurrido t años, vienen reflejadas por la función $f(t) = \dfrac{2t - 4}{t + 2}$.**

a) ¿Gana la empresa en los dos primeros años?

b) ¿Cuánto gana el 5.º año?

c) ¿Existe límite para las ganancias? En caso afirmativo, ¿cuál es el límite?

a) $f(2) = 0$, luego no gana nada en los dos primeros años.

b) $f(5) = 0{,}86$ centenares de miles de euros, es decir, 86 000 euros.

c) Sí, y el límite es $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\dfrac{2t - 4}{t + 2} \right) = 2$ cientos de miles de euros, es decir, 200 000 euros.

8.65. **(PAU) El precio en euros de x litros de aceite comprados en una almazara viene dado por la función**

$$P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ \sqrt{ax^2 + 2000} & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

a) Determina el valor de la constante a para que la función $P(x)$ sea continua.

b) Si se comprasen muchísimos litros de aceite, ¿a cuánto saldría aproximadamente el precio de cada litro?

a) Como deben coincidir los límites laterales, $60 = \sqrt{400a + 2000}$, que tiene por solución $a = 4$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 + 2000}}{x} = 2$ euros cada litro

PROFUNDIZACIÓN

8.66. **¿Hay algún número a para el que exista $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$? Si es así, calcula a y dicho límite.**

Como $x^2 + x - 2 = 0$ si $x = -2$, para que exista el límite, debe ser $3x^2 + ax + a + 3 = 0$ si $x = -2$. Resolviendo $12 - 2a + a + 3 = 0$ obtenemos $a = 15$.

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + 15x + 18}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to -2} \frac{3(x + 2)(x + 3)}{(x + 2)(x - 1)} = -1$$

8.67. **Nos dicen que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - (a + 3)x + 3a}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ es continua en todos los números reales.**

¿Cuál es el valor de a?

Debe ser $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$. Como $x^2 - (a + 3)x + 3a = (x - 3)(x - a)$, tenemos que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x - a)}{x - 3} = 3 - a \text{ y } 3 - a = 1 \text{ si } a = 2.$$

8.68. **Si f es continua en a y $f(a) > 0$, ¿es posible que en cualquier intervalo centrado en a se verifique que f tome algún valor negativo?**

No, pues si en cualquier intervalo centrado en a tomara alguna vez un valor negativo, entonces el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no sería positivo y, por tanto, no podría coincidir con $f(a)$, es decir, f no sería continua en a.

8.69*. a) Si f es una función polinómica de 3.er grado, ¿puedes asegurar que corta alguna vez al eje de abscisas? Justifica la respuesta.

b) Considera la función $g(x) = \dfrac{1 + x^2}{f(x)}$ donde f es una función polinómica de 3.er grado. ¿Tiene g asíntotas verticales? ¿Y oblicuas? Justifica las respuestas.

a) Sí, porque al ser de grado impar, seguro que se verifica que los límites $\lim_{x\to+\infty} P(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} P(x)$ tienen distinto signo, y al ser continua, si la función toma valores positivos y negativos, seguro que debe cortar al menos una vez al eje de abscisas.

b) Seguro que tiene al menos una asíntota vertical, pues, como vimos en a, $f(x)$ se anula al menos una vez y el numerador no se anula nunca.

Carece de asíntota oblicua, pues tiene asíntota horizontal, ya que al tener $f(x)$ grado mayor que 2,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x^2}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 + x^2}{f(x)} = 0.$$

8.70. Encuentra una función continua f tal que: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $f(10^{10}) = 10^{100}$

$f(x) = \dfrac{x + k}{x^2}$. Como $f(10^{10}) = 10^{100}$, entonces $\dfrac{10^{10} + k}{10^{20}} = 10^{100}$,

de donde $k = 10^{120} - 10^{10}$ y $f(x) = \dfrac{x + 10^{120} - 10^{10}}{x^2}$.

8.71. ¿Es posible elegir los números a, b, c y d para que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ siendo $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$?

El límite será infinito si el grado del numerador es mayor que el del denominador, luego debe ser $c = 0$, y para que sea positivo, debe ser $a > 0$ y $d > 0$ o $a < 0$ y $d < 0$.

8.72. Si $f(x) = 1 + \dfrac{2x + 1}{x^2 + 7}$, ¿puedes asegurar que f tiene asíntotas horizontales? ¿Y oblicuas? ¿Y verticales?

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$ y, por tanto, no tiene asíntotas oblicuas. Como $D(f) = \mathbb{R}$, f no tiene asíntotas verticales.

8.73. Calcula el dominio de la función $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{3x - 9}$ y obtén sus asíntotas.

$D(f) = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

Como $\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$, entonces $x = 1$ y $x = 3$ son las asíntotas verticales de la función.

Como $\lim_{x\to+\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{3x - 9}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{2}{3x - 9}\right) = 3$, $y = 3$ es la asíntota horizontal.

8.74. Considera la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leqslant -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

a) Calcula los valores de a y b para que sea continua para todo x.

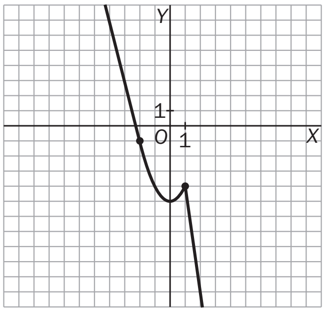
b) Haz una gráfica de la función obtenida en el apartado anterior.

a) Para que sea continua en el -2 debe ocurrir que $8 + a = -1$, es decir, que $a = -9$, y para que sea continua en el 1 debe ocurrir que $-4 = b + 3$, esto es, $b = -7$.

La función queda de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 9 & \text{si } x \leqslant -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

b)



8.75. Si la función $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2bx^2 & \text{si } 1 < x \leqslant 3 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ es continua en todos los números reales, calcula a y b.

Para que sea continua se debe cumplir:

$f(1) = a + b = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (ax + b) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2bx^2) = 2b$ y

$f(3) = 18b = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2bx^2) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x + 3) = 9$

Luego se deben cumplir simultáneamente las condiciones $\begin{cases} a + b = 2b \\ 18b = 9 \end{cases}$

Así pues, $a = b = \dfrac{1}{2}$.