Tema 3

Continuidad

Ejercicios Resueltos

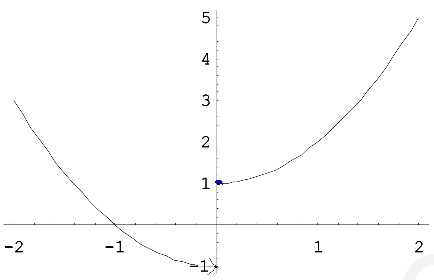
Ejercicio 1

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{|x|}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}$

Solución:

La función puede expresarse como $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \;\; x < 0 \\ 1 & si \;\; x = 0 \\ x^2 + 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$

Para representarla basta considerar dos arcos de parábola:



Es evidente la continuidad en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
En el punto $x_0 = 0$, se tiene:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$

Por tanto, f es continua por la derecha en $x_0 = 0$, pero no es continua presentando una discontinuidad de salto, con salto (diferencia entre los límites laterales) igual a 2.

Ejercicio 2

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \;\; x < 1 \\ \sqrt{x+1} & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$

Solución:

La función presenta en $x_0 = 0$ (donde no está definida) una discontinuidad de salto infinito por ser los límites laterales infinitos de signos contrarios: $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

En $x_0 = 1$, se tiene que $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x} = 1$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2} = f(1)$, luego solo se tiene continuidad por la derecha. La discontinuidad es de salto finito.

Por tanto, la función es continua en $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ 1) \cup (1,\ \infty)$.

Ejercicio 3

Halla los valores de los parámetros a y b que hacen continua en $\mathbb{R}$ a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -3\sin x & si\ \ x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & si\ \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & si\ \ x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución:

Por la propia definición la función ya es continua en $(-\infty, -\frac{\pi}{2}) \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \infty)$. Para que sea continua en $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ y en en $x_0 = \frac{\pi}{2}$ deben coincidir los límites laterales, es decir:

En $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, debe ser $-3\,sin(-\frac{\pi}{2}) = a\,sin(-\frac{\pi}{2}) + b \Rightarrow 3 = -a + b$

Y en $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $a\,sin(\frac{\pi}{2}) + b = cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow a + b = 0$

De ambos resultados se concluye que los valores buscados son $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

Ejercicio 4

Las funciones $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ y $g(x) = x\ \sin\frac{\pi}{x}$, no están definidas en el punto $x_0 = 0$.

¿Qué discontinuidad presentan en $x_0 = 0$? ¿Pueden definirse en 0 de manera que sean continuas en $\mathbb{R}$?

Solución:

$f(x) = sin\frac{\pi}{x}$ presenta en $x_0 = 0$ una discontinuidad de segunda especie porque no existe ninguno de los límites laterales. Por tanto, $f(x) = sin\frac{\pi}{x}$ será continua en $(-\infty,\ 0) \cup (0,\ \infty)$ siendo imposible ampliar su dominio al 0.

Como $-1 \leq sin\frac{\pi}{x} \leq 1$ el $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x\ sin\frac{\pi}{x} = 0 \cdot acotada = 0$ y, ya que existe el límite, puede definirse la función asignándole ese valor, es decir, $g(x) = \begin{cases} x\ sin\frac{\pi}{x} & si\ \ x \neq 0 \\ 0 & si\ \ x = 0 \end{cases}$ consiguiendo así hacerla continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 5

¿Qué tipo de discontinuidad presenta en $x_0 = 0$ la función $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$?

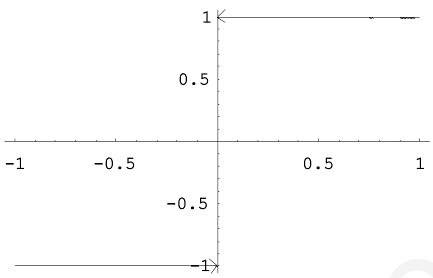
Solución:

Teniendo en cuenta que al aproximarnos al cero se tienen valores negativos a su izquierda y positivos a su derecha, los límites laterales de $\frac{1}{x}$ son $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, por tanto $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = e^{\infty} = \infty$. Se trata de una discontinuidad de salto infinito (límites laterales diferentes y uno de ellos es ∞)

Ejercicio 6

Representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Cumple el teorema de Bolzano en el intervalo [-1, 1]?

Solución:



Aunque toma valores de signos contrarios en los extremos del intervalo, no cumple el teorema de Bolzano por no ser continua en el punto $x = 0 \in (-1, 1)$

Ejercicio 7

¿Existe algún número real igual a su cubo menos una unidad ?

Solución:

El número buscado debe satisfacer la ecuación $x = x^3 - 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$. Considerando $f(x) = x^3 - x - 1$, por ser continua en ℝ y en particular en [1, 2], como $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 5 > 0$, por el teorema de Bolzano se concluye que debe existir un número $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir, tal que $\alpha = \alpha^3 - 1$.

Ejercicio 8

Aplica el Teorema de Bolzano para probar que las gráficas de $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localízalo aproximadamente.

Solución:

Que las gráficas de $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se corten, significa que debe existir un punto en el que coincidan, es decir en el que $Lx - e^{-x} = 0$. Se trata de encontrar un intervalo [a, b] en el que la función $Lx - e^{-x}$ sea continua y tome valores de signos contrarios en los extremos. Eso ocurre tomando a=1 y b=2 porque, además de la continuidad , $L1 - e^{-1} = -0.367879 < 0$ y $L2 - e^{-2} = 0.557812 > 0$.

Nota: Para lograr una aproximación mejor puede subdividirse el intervalo [1, 2] en dos partes iguales [1, 1.5] y [1.5, 2]. Elegir aquel intervalo en el que la función $Lx - e^{-x}$ tome valores de signos contrarios en los extremos, y repetir el proceso las veces que se quiera.

Ejercicio 9

Dada la función definida por $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x$, demuestra que existe un valor $x = \alpha$ positivo y menor que 2, que verifica que $f(\alpha) = 3$.

Solución:

Como $f(0) = -\cos 0 = -1$, $f(2) = 8 + 4 - \cos 2\pi = 11$ y $f(x) = x^3 + x^2 - \cos \pi x$ es continua en el intervalo [0, 2], por el teorema de los valores intermedios, debe alcanzar cualquier valor comprendido entre -1 y 11. En particular, debe existir un valor $x = \alpha \in (0, 2) \ / \ f(\alpha) = 3$.

Ejercicio 10

La función $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ es continua en el intervalo (3, 6] , pero sin embargo no alcanza un máximo en dicho intervalo. ¿Contradice el teorema de Bolzano-Weierstrass?

Solución:

No lo contradice puesto que el intervalo donde la función es continua no es cerrado.

Ejercicios Propuestos

(Las soluciones se encuentran al final)

1.- Dada la función $f(x) = \dfrac{x\,Lx}{x - 1}$ definida en $(0,\ 1) \cup (1,\ \infty)$, define $f(0)$ y $f(1)$ para que sea continua en $[0,\ \infty)$

2.- ¿Tiene la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ máximo y mínimo en el intervalo [0, 5] ? ¿Y $g(x) = \dfrac{3}{x + 2}$ en el intervalo [-3, 2] ?

3.- Dadas las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \le 1 \\ x + Lx & si\ x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} e^x & si\ x \le 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$, comprueba que son continuas en $\mathbb{R}$.

4.- Estudia en $x = 1$, $x = e$ la continuidad de $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & si\ x \le 0 \\ \sin\dfrac{\pi x}{2} & si\ 0 < x < 1 \\ Lx & si\ 1 \le x \le e \\ \dfrac{x}{e} & si\ x > e \end{cases}$
Determina a para que sea continua en $x = 0$.

5.- Si f y g son las funciones $f(x) = x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $g(1) = 0$, $g(x) = 2$, $\forall x \neq 1$, demuestra que $\lim\limits_{x \to 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. ¿Contradice este resultado la propiedad sobre la continuidad de la función compuesta?

6.- Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} & si\ x < -3 \\ 1 & si\ x = -3 \\ -e^{\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}} & si\ x > -3 \end{cases}$

7.- ¿Es continua en $x = 0$ la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + 2^{1/x}} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$?

8.- Demuestra que $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1 - x^2}} & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \ge 1 \end{cases}$ es continua en $\mathbb{R}$.

9.- Aplicando el Teorema de Bolzano, comprueba que la ecuación $e^x + 2x = 0$ tiene una raíz real.

10.- ¿Tiene la función $f(x) = x^2$ extremos relativos en $\mathbb{R}$? ¿Y en el intervalo [2, 5]?

11.- ¿Es ampliable a $\mathbb{R}$ el dominio de la función $f(x) = 2 + \sin\frac{1}{x}$?

12.- Escribe un ejemplo de una función que presente en $x = 0$ una discontinuidad evitable, en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito, y que sea continua en $\mathbb{R}$-{0,1}.

13.- ¿Qué tipo de discontinuidad presenta en $x = 1$ la función $f(x) = \frac{x^2 + 4}{|x - 1|}$? ¿Podrías definir $f(1)$ para que fuese continua en $\mathbb{R}$?

14.- ¿Tiene la ecuación $x^5 - 3x = 1$ alguna raíz comprendida entre 1 y 2?

15.- ¿Existe algún valor de α para el que $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2 - 1} & si\ 0 < x < 1 \\ L[sin^2(x + \alpha) + 1] & si\ x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en $(0, \infty)$?

Soluciones:

1.- $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

2.- $f(x)$ presenta un máximo en el punto (0, 1) y un mínimo en (5, 1/26) ; $g(x)$ no presenta extremos en [-3, 2] porque no es continua en -2 $\in$ (-3, 2).

4.- Para que sea continua en $x = 0$ debe ser $a = 0$. En $x = 1$ es continua por la derecha pero no lo es por la izquierda. Por tanto, no es continua. Presenta discontinuidad de salto finito. En $x = e$ es continua.

5.- No contradice el resultado porque g no es continua en $f(0) = 1$.

6.- Continua en $\mathbb{R}$ - {-3}. En $x = -3$ presenta discontinuidad evitable.

7.- Sí es continua.

10.- En $\mathbb{R}$ tiene mínimo en (0, 0) y no tiene máximo. En el intervalo cerrado [2, 5], como consecuencia del Teorema de Bolzano-Weierstrass, mínimo en el punto (2, 4) y máximo en el punto (5, 25).

11.- No, porque en $x = 0$ presenta discontinuidad <u>no</u> evitable.

12.- $f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 0 \\ x^2 + 1 & si\ 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x - 1} & si\ x > 1 \end{cases}$

13.- Presenta una discontinuidad infinita (límites laterales infinitos del mismo signo), con lo que el dominio no sería ampliable.

14.- Entre 1 y 2 tiene una raíz.

15.- Sí, por ejemplo $\alpha = -1$.