Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-4}{x} & \text{si} \quad x<-2 \\ 2 & \text{si} \quad x=-2 \\ -x+1 & \text{si} \quad -2<x\leq 2 \\ x^2+kx+3 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $x=-2$. **(0,5 puntos)**

b) Hallar el valor de k para que f sea continua en $x=2$. **(1 punto)**

c) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, representa gráficamente la función. **(1 punto)**

2. Dada la función $f(x)=x^3-3x+2$:

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x=0$. **(0,5 puntos)**

b) Halla los máximos y mínimos relativos, así como los intervalos donde la función crece y decrece. **(1 punto)**

c) Represéntala gráficamente. **(0,5 puntos)**

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x}}$ **(0,5 puntos)**

b) $y=\sqrt{2x^3+x^2+1}$ **(0,5 puntos)**

c) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}}{4x-1}$ **(1 punto)**

4. Sea la función $f(x)=\dfrac{4x-3}{x^2-4x+3}$. Calcula:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

b) Las asíntotas. **(0,5 puntos)**

c) Los intervalos donde la función es estrictamente creciente y estrictamente decreciente. Hallar asimismo los máximos y mínimos relativos de la función. **(1,5 puntos)**

d) Representación gráfica. **(1 punto)**

www.yoquieroaprobar.es

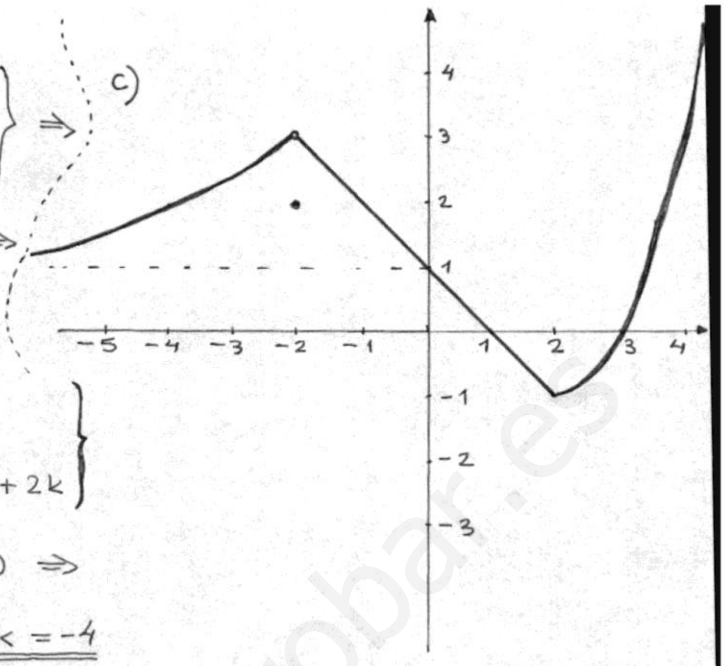
① a) $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \left(\frac{x-4}{x}\right) = 3$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} (-x+1) = 3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x) = 3 \neq f(-2) = 2 \Rightarrow$

f no es continua en $x = -2$; DISCONTINUIDAD EVITABLE

c)



b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x+1) = -1$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2+kx+3) = 7+2k$

$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 = 7+2k \Rightarrow -8 = 2k \Rightarrow \underline{k=-4}$

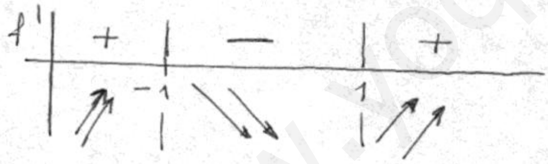
② a) $y - f(0) = f'(0)(x-0)$; $f(0) = 0^3 - 3\cdot 0 + 2 = 2$;

$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(0) = 3\cdot 0^2 - 3 = -3$. Entonces la recta tangente en $x = 0$ es: $y - 2 = -3\cdot x \Rightarrow \underline{y = -3x+2}$

b) $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x = 1,\ x = -1$ (posibles extremos)

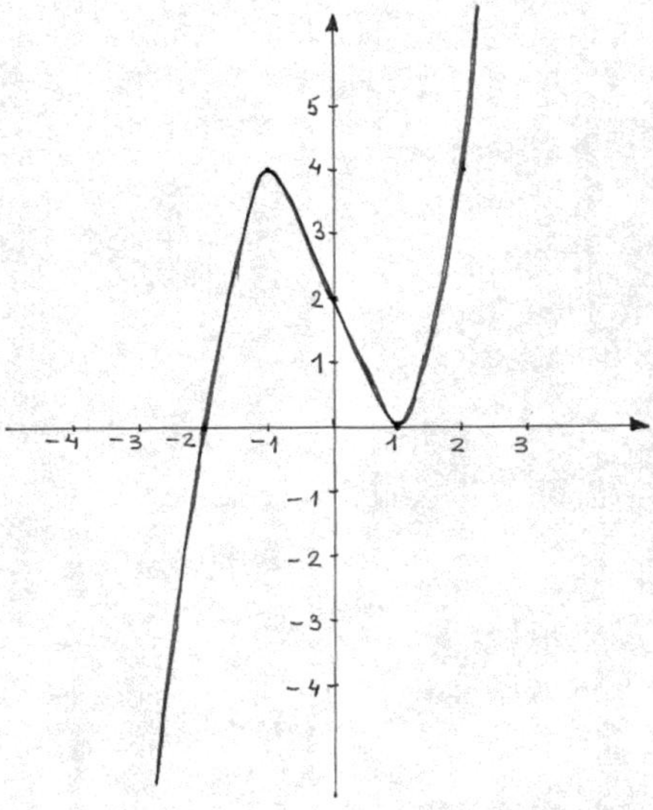
$f''(x) = 6x$; $f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow$ $x = 1$ es un MÍNIMO RELATIVO: $(1, 0)$

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow$ $x = -1$ es un MÁXIMO RELATIVO: $(-1, 4)$



* f es ESTRICTAMENTE CRECIENTE en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

* f es ESTRICTAMENTE DECRECIENTE en $(-1, 1)$



③ a) $y = \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{x^3}{x^{1/3}} = x^{3-1/3} = x^{8/3}$;

$y' = \dfrac{8}{3} x^{8/3 - 1} = \dfrac{8}{3} x^{5/3} = \dfrac{8\sqrt[3]{x^5}}{3} = \dfrac{8x\sqrt[3]{x^2}}{3}$

b) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^3+x^2+1}} \cdot (6x^2+2x) = \dfrac{6x^2+2x}{2\sqrt{2x^3+x^2+1}} = \dfrac{3x^2+x}{\sqrt{2x^3+x^2+1}}$

c) $y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\cdot(-1)(4x-1) - \sqrt{1-x}\cdot 4}{(4x-1)^2} = \dfrac{\frac{-4x+1}{2\sqrt{1-x}} - 4\sqrt{1-x}}{(4x-1)^2} =$

$= \dfrac{\frac{-4x+1-8(1-x)}{2\sqrt{1-x}}}{(4x-1)^2} = \dfrac{4x-7}{2\sqrt{1-x}\,(4x-1)^2}$

④ a) $x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=3$

$\Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

$y=0 \Rightarrow 4x-3=0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}, 0\right)$ punto de corte con el eje X.

$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1)$ punto de corte con el eje Y.

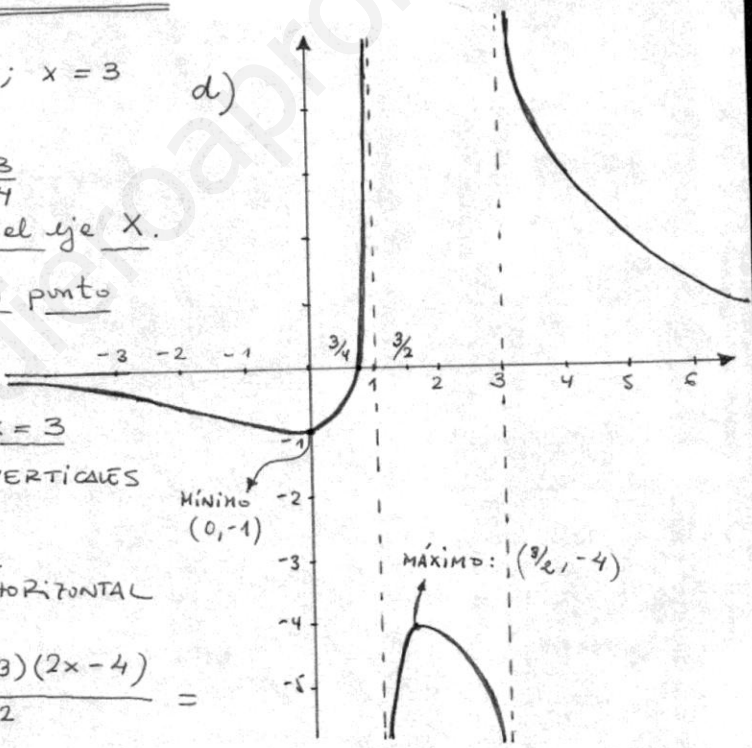
b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty \\ \lim\limits_{x\to 3} f(x) = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow x=1,\ x=3$

ASÍNTOTAS VERTICALES

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-3}{x^2-4x+3} = 0 \Rightarrow y = 0$

ASÍNTOTA HORIZONTAL

d)



c) $f'(x) = \dfrac{4(x^2-4x+3)-(4x-3)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} =$

$= \dfrac{4x^2-16x+12-8x^2+16x+6x-12}{(x^2-4x+3)^2} = \dfrac{-4x^2+6x}{(x^2-4x+3)^2} = \dfrac{x(-4x+6)}{(x^2-4x+3)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot(-4x+6)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\frac{3}{2}$ (posibles extremos)

		0		1		$\frac{3}{2}$		3	
f'	$-$		$+$		$+$		$-$		$-$
	↘↘		↗↗		↗↗		↘↘		↘↘

* f es ESTRICTAMENTE CRECIENTE en $(0,1)\cup(1,3/2)$

* f es ESTRICTAMENTE DECRECIENTE en $(-\infty,0)\cup(3/2,3)\cup(3,+\infty)$

* f tiene un MÍNIMO RELATIVO en $x=0$: $(0,-1)$

* f tiene un MÁXIMO RELATIVO en $x=\frac{3}{2}$: $\left(\frac{3}{2},-4\right)$

www.yoquieroaprobar.es