Examen de Matemáticas Ciencias Sociales I – 1º de Bachillerato

1. Sea la función definida por trozos: $f(x)=\begin{cases} -x-3 & \text{si} \quad x<-3 \\ \dfrac{x+3}{x-1} & \text{si} \quad -3\le x\le 0 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad. **(1,5 puntos)**

b) Represéntala gráficamente. **(1 punto)**

2. Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-1} & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si} \quad -1<x<2 \\ kx+1 & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $x=-1$. **(0,5 puntos)**

b) Hallar el valor de k para que f sea continua en $x=2$. **(1 punto)**

c) Para el valor de k hallado en el apartado anterior, representa gráficamente la función **(1 punto)**

3. Dada la función $f(x)=2x^3-3x^2-8x+10$:

a) Hallar, utilizando la definición, la derivada de la función en el punto $x=2$. **(1 punto)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x=2$. **(1 punto)**

c) Halla el ángulo que forma dicha recta tangente con el eje *X*. **(0,5 puntos)**

4. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ **(0,5 puntos)**

b) $y=(3x^2-2x+1)\dfrac{2}{x+1}$ **(0,5 puntos)**

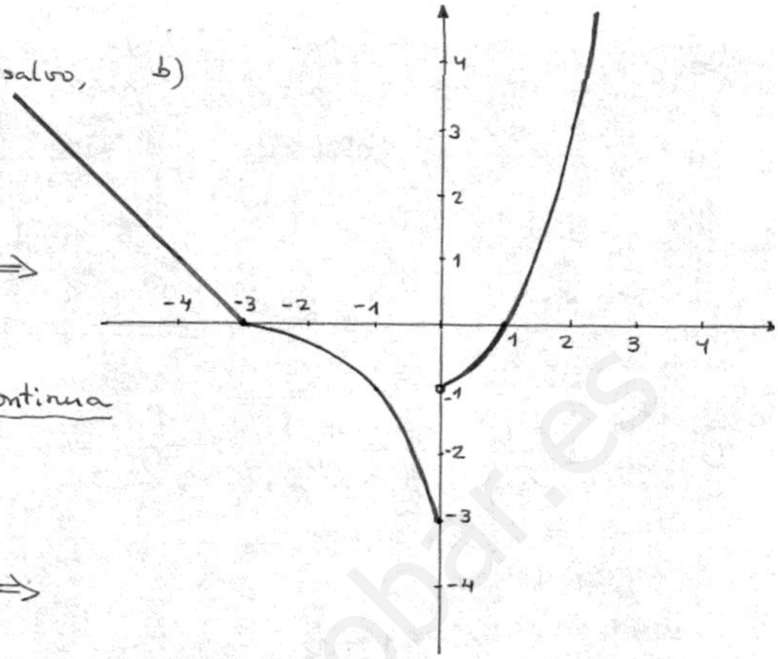
c) $y=\left(3-4x+x^2-2x^3\right)^5$ **(0,5 puntos)**

d) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$ **(0,5 puntos)**

e) $y=\sqrt{(x+1)(x-1)}$ **(0,5 puntos)**

① a) f es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizás, en $x=-3$ y $x=0$

b)



* $x=-3$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}(-x-3)=0\\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x+3}{x-1}=0\\ f(-3)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=f(-3)\Rightarrow$ f es continua en $x=-3$.

* $x=0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+3}{x-1}=-3\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-1)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

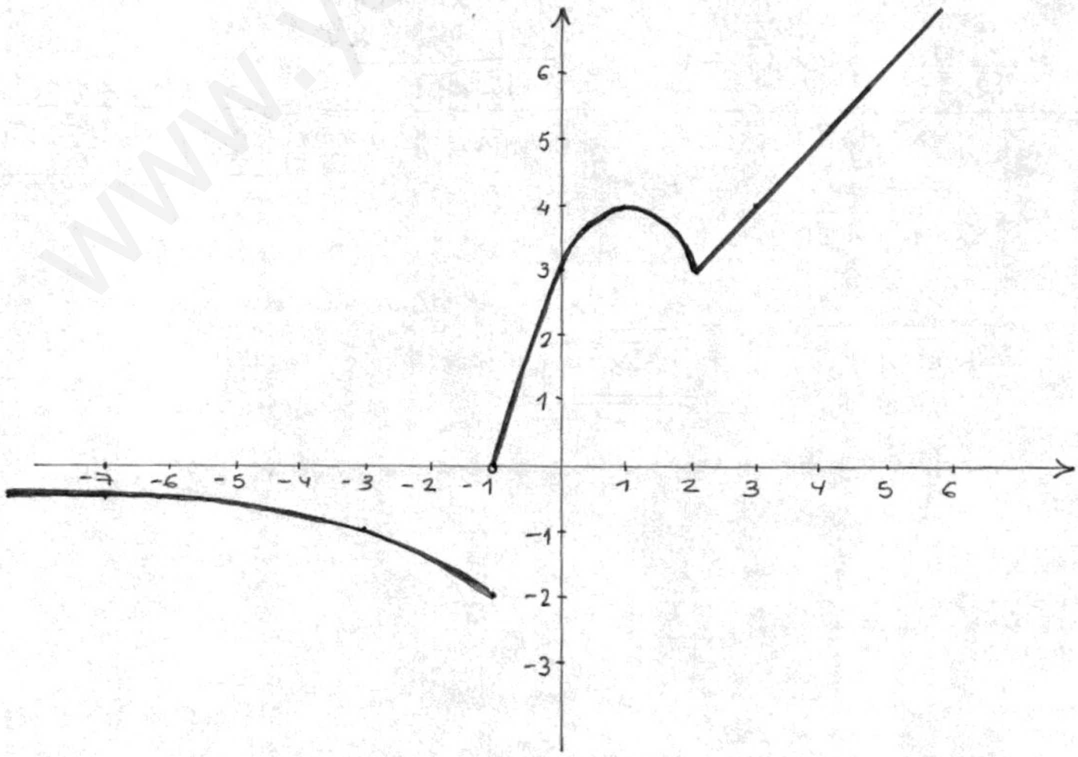
como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, f no es continua en $x=0$. Hay una discontinuidad de salto finito de longitud 2.

② a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{4}{x-1}=-2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(-x^2+2x+3)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{como } \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to -1^+} f(x),$$

f no es continua en $x=-1$; hay una discontinuidad de salto finito de longitud 2.

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Rightarrow 3=2k+1\Rightarrow 2k=2\Rightarrow \underline{\underline{k=1}}$

c)



③ a) $f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-3x^2-8x+10-(-2)}{x-2}=$

$=\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-3x^2-8x+12}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x^2+x-6)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x^2+x-6)=4$

b) $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y-(-2)=4(x-2)\Rightarrow$

$\Rightarrow y+2=4x-8\Rightarrow y=4x-10$

c) $tg\,\alpha=4\Rightarrow \alpha=75'96^\circ$

④ a) $y=\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{1}{x\,x^{1/2}}=\frac{1}{x^{3/2}}=x^{-3/2}$;

$y'=-\frac{3}{2}x^{-5/2}=-\frac{3}{2}\frac{1}{x^{5/2}}=\frac{-3}{2\sqrt{x^5}}=\frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$

b) $y=(3x^2-2x+1)\frac{2}{x+1}=\frac{6x^2-4x+2}{x+1}$;

$y'=\frac{(12x-4)(x+1)-(6x^2-4x+2)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{12x^2+12x-4x-4-6x^2+4x-2}{x^2+2x+1}=$

$=\frac{6x^2+12x-6}{x^2+2x+1}$

c) $y'=5(3-4x+x^2-2x^3)^4\cdot(-4+2x-6x^2)=$

$=(-20+10x-30x^2)(3-4x+x^2-2x^3)^4$

d) $y=\frac{\sqrt{2x-1}}{x^2-1}$; $y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-1}}\cdot 2\cdot(x^2-1)-\sqrt{2x-1}\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$

$=\frac{\frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}-2x\sqrt{2x-1}}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{x^2-1-2x(2x-1)}{\sqrt{2x-1}}}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2+2x-1}{(x^2-1)^2\cdot\sqrt{2x-1}}$

e) $y=\sqrt{(x+1)(x-1)}=\sqrt{x^2-1}$;

$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$