1. Dada la función parabólica $y=-x^2+10x-21$, calcular: puntos de corte con los ejes **(0,5 puntos)**, vértice **(0,5 puntos)** y hacer la representación gráfica **(1 punto)**.

2. Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$, halla la función inversa de f respecto de la composición **(0,5 puntos)** y comprueba que efectivamente lo es **(1,5 puntos)**.

3. Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos: **(1,5 puntos)**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si} \quad x<-2 \\ -1 & \text{si} \quad -2\le x<0 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$$

4. Dada la siguiente función $g(x)=\dfrac{2x^2-18}{x^2-4}$, se pide:

a) Puntos de corte con los ejes. **(0,5 puntos)**

b) Asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas). **(1 punto)**

c) Representación gráfica de la función. **(0,5 puntos)**

d) Dominio e imagen o recorrido de la función. **(0,5 puntos)**

5. Calcular los siguientes límites, indicando la indeterminación correspondiente:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$ **(0,5 puntos)**

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+2}{\sqrt{x^2+2+x}}$ **(0,5 puntos)**

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6}$ **(0,5 puntos)**

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$ **(0,5 puntos)**

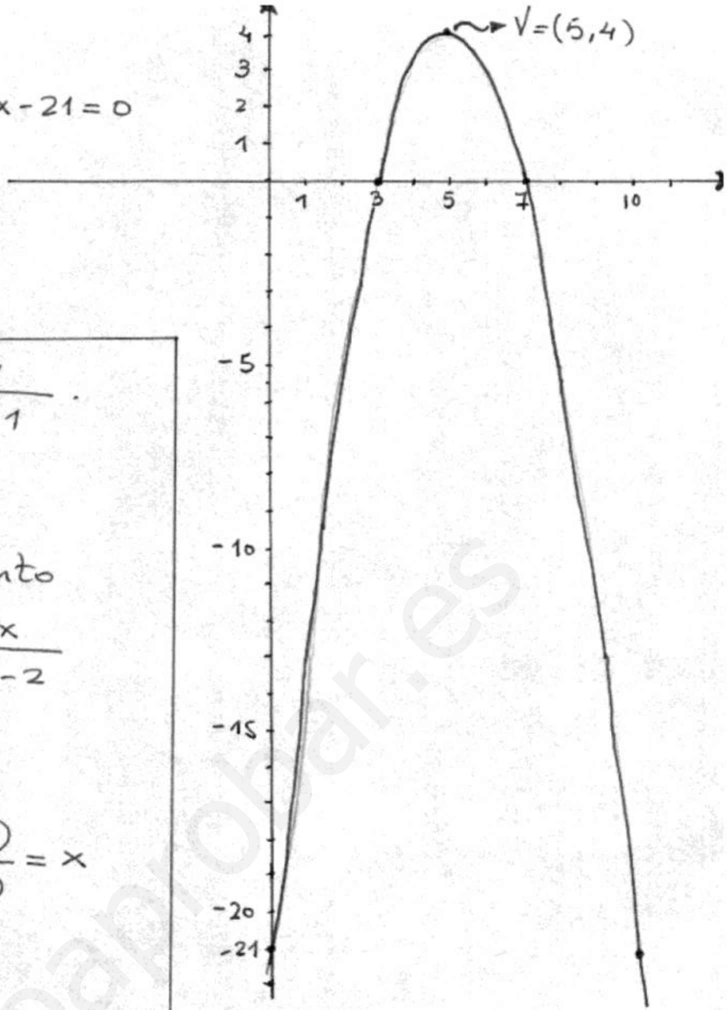
① Punto de corte con el eje Y: $(0,-21)$

Puntos de corte con el eje X: $-x^2+10x-21=0$

$\Longleftrightarrow x=3,\ x=7 \Rightarrow (3,0),\ (7,0)$

Vértice: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-10}{2(-1)} = 5$

$V=(5,4)$



② Cambiamos x por y: $x = \dfrac{2y}{y-1}$.

Despejamos y: $x(y-1) = 2y \Rightarrow$

$xy - x = 2y \Rightarrow xy - 2y = x \Rightarrow$

$y(x-2) = x \Rightarrow y = \dfrac{x}{x-2}$. Por tanto la función inversa es: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$

<u>Comprobación</u>

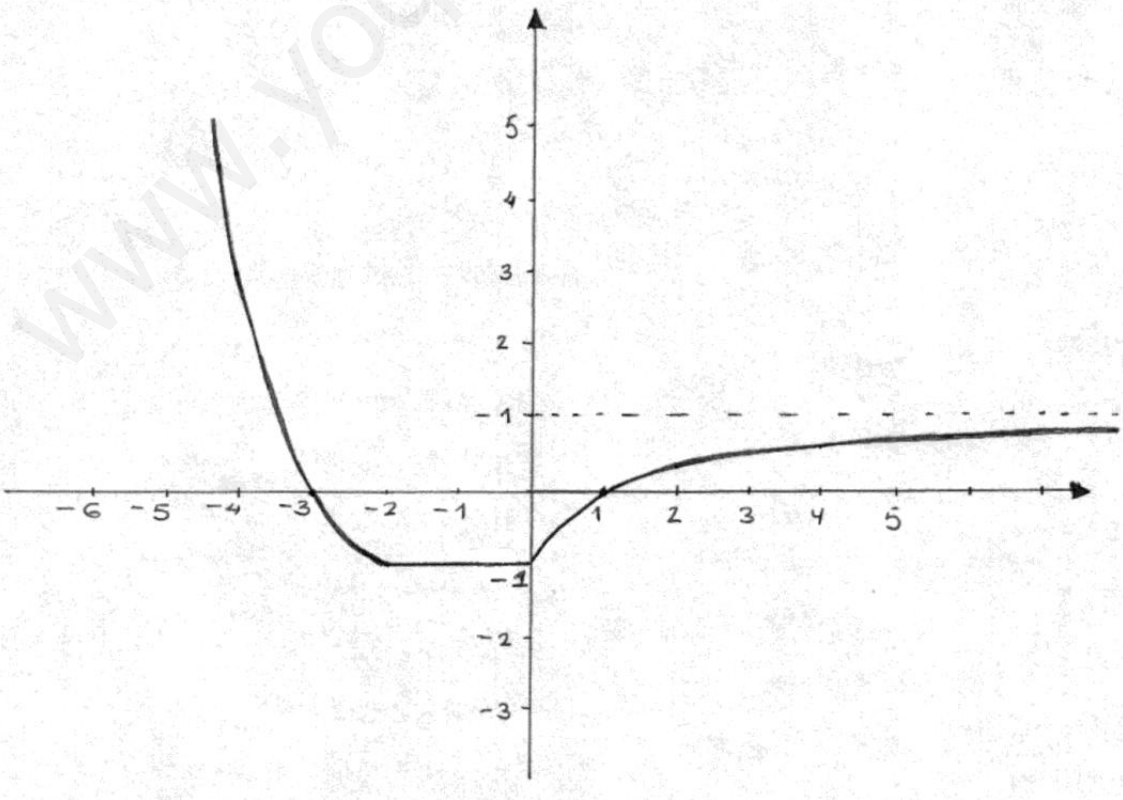
$$(f\circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{x}{x-2}\right) =$$

$$= \frac{2\left(\frac{x}{x-2}\right)}{\frac{x}{x-2}-1} = \frac{\frac{2x}{x-2}}{\frac{2}{x-2}} = \frac{2x(x-2)}{2(x-2)} = x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\frac{2x}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2x}{x-1}-2} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = \frac{2x(x-1)}{2(x-1)} = x$$

③



④ a) Con el eje Y: $\left(0, \frac{18}{4}\right) = (0, 4'5)$

Con el eje X: $g(x) = 0 \iff \frac{2x^2-18}{x^2-4} = 0$

$\iff 2x^2 - 18 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$

Entonces son: $(3, 0)$ y $(-3, 0)$

b) Horizontales:

$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-18}{x^2-4} = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$

es una asíntota horizontal.

Verticales:

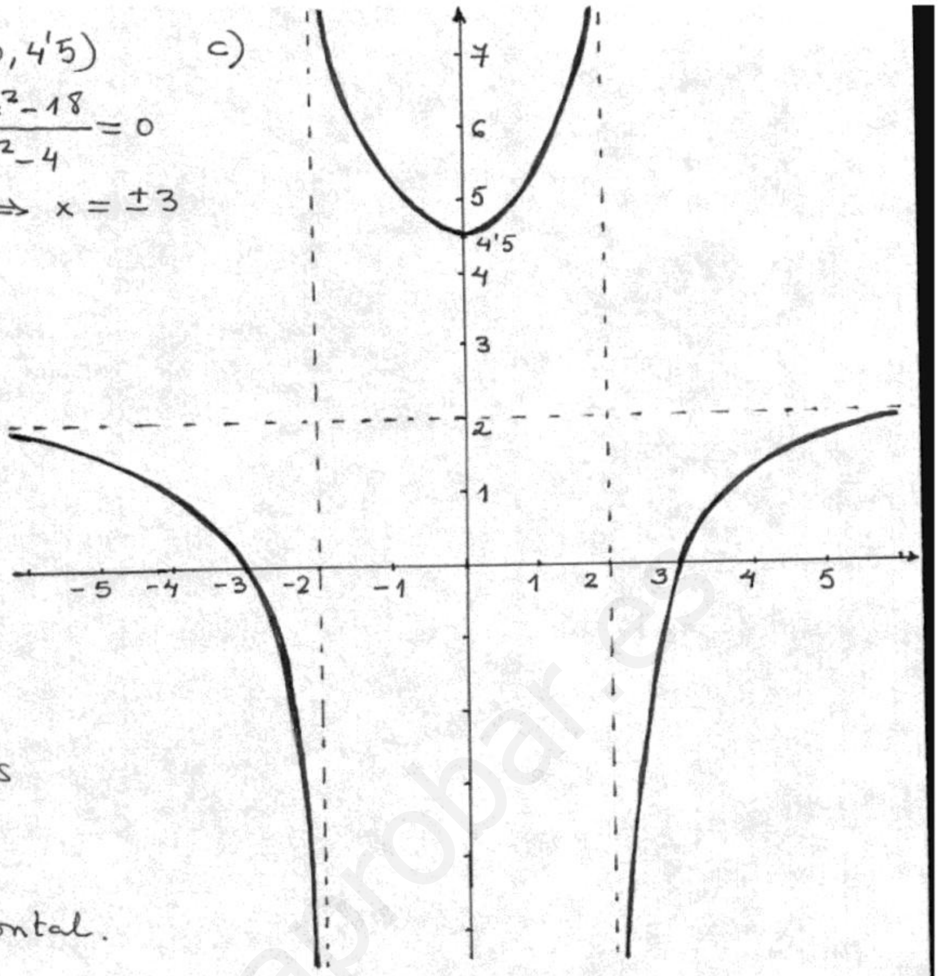
$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2} \frac{2x^2-18}{x^2-4} = \infty \\ \lim_{x\to -2} \frac{2x^2-18}{x^2-4} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\boxed{x = 2}$ y $\boxed{x = -2}$ son asíntotas verticales.

Oblicuas

No hay por haber una horizontal.

c)



d) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\text{Im} f = (-\infty, 2) \cup [4'5, +\infty)$

⑤ a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)(x+3)} =$

$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x(x+3)} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{6x+2}{\sqrt{x^2+2+x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{6 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}}} = \frac{6+0}{\sqrt{1+0+0}} = \underline{\underline{6}}$

c) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{2x-6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(2x-6)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} =$

$= \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{2(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \underline{\underline{\frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}}}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3} - x\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3} - x)(\sqrt{x^2+3} + x)}{\sqrt{x^2+3} + x} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2+3) - x^2}{\sqrt{x^2+3} + x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x} = \underline{\underline{\frac{3}{+\infty} = 0}}$