4 Ecuaciones y sistemas

ACTIVIDADES INICIALES

4.I. Comprueba si las siguientes ecuaciones tienen como soluciones $x = -2$, $x = \frac{2}{3}$, $x = -\frac{1}{4}$.

a) $12x^2 = \dfrac{-4 + 20x - x^2}{x + 1}$ b) $\sqrt{2 - x} + x = \dfrac{5}{4}$

a) $\begin{cases} 12 \cdot (-2)^2 = 48 \\ \dfrac{-4 + 20 \cdot (-2) - (-2)^2}{-2 + 1} = \dfrac{-4 - 40 - 4}{-1} = 48 \end{cases} \Rightarrow x = -2$ es solución.

$\begin{cases} 12 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 12 \cdot \dfrac{4}{9} = \dfrac{16}{3} \\ \dfrac{-4 + 20 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\frac{2}{3} + 1} = \dfrac{-4 + \frac{40}{3} - \frac{4}{9}}{\frac{5}{3}} = \dfrac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$ es solución.

$\begin{cases} 12 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2 = 12 \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{-4 + 20 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{-\frac{1}{4} + 1} = \dfrac{-4 - 5 - \frac{1}{16}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{145}{12} \end{cases} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ no es solución.

b) $\sqrt{2 - (-2)} + (-2) = \sqrt{4} - 2 = 0 \neq \dfrac{5}{4} \Rightarrow x = -2$ no es solución.

$\sqrt{2 - \left(\dfrac{2}{3}\right)} + \left(\dfrac{2}{3}\right) = \sqrt{\dfrac{4}{3}} + \dfrac{2}{3} \neq \dfrac{5}{4} \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$ no es solución.

$\sqrt{2 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)} + \left(-\dfrac{1}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{9}{4}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow x = \dfrac{5}{4}$ sí es solución.

4.II. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $\dfrac{5x - 2}{4} - \dfrac{7x - 3}{8} = \dfrac{x - 1}{2}$

b) $\dfrac{x + 10}{2} + \dfrac{2(x - 2)}{5} = \dfrac{5x - 15}{3}$

a) $10x - 4 - 7x + 3 = 4x - 4 \rightarrow x = 3$

b) $15x + 150 + 12x - 24 = 50x - 150 \rightarrow x = 12$

EJERCICIOS PROPUESTOS

4.1. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 + 9x + 14 = 0$ c) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ d) $7x + 2 = 30x^2$

a) $x = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases}$

c) $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{-4} = \begin{cases} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \begin{cases} x = -2 \\ x = -7 \end{cases}$

d) $30x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 240}}{60} = \begin{cases} x = \dfrac{24}{60} = \dfrac{2}{5} \\ x = -\dfrac{10}{60} = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$

4.2. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado incompletas.

a) $3x^2 + 18x = 0$

b) $4x^2 = 9$

c) $16x^2 - 25 = 0$

d) $-5x^2 + 7x = 0$

a) $x(3x + 19) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 18 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{18}{3} = -6 \end{cases}$

b) $x^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}\ x = -\dfrac{3}{2}$

c) $x^2 = \dfrac{25}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{16}} \Rightarrow x = \dfrac{5}{4}\ x = -\dfrac{5}{4}$

d) $x(-5x + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -5x + 7 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7}{5} \end{cases}$

4.3. Escribe una ecuación de segundo grado tal que la suma de sus soluciones sea $-\dfrac{3}{2}$, y el producto, -1. ¿Cuáles son dichas soluciones?

$x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$, cuyas soluciones son $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = -2$.

4.4. Indica el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + x + 4 = 0$ b) $x^2 - 18x + 80 = 0$ c) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ d) $36x^2 - 12x + 1 = 0$

a) $\Delta = -15$ Ninguna b) $\Delta = 4$ Dos c) $\Delta = 0$ Una d) $\Delta = 0$ Una

4.5. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $3(x - 3)^2 - 2x = 5(3 - x)$

b) $(x - 1)^2 + 2(x - 2)^2 = x - 1$

c) $3(x + 1)^2 - 2(x + 3)^2 = 4(x + 4) - 10$

a) $3(x^2 + 9 - 6x) - 2x = 15 - 5x$; $x^2 - 5x + 4 = 0$; $x = 1$, $x = 4$

b) $x^2 + 1 - 2x + 2(x^2 + 4 - 4x) = x - 1$; $3x^2 + 10 - 11x = 0$; $x = 2$, $x = \dfrac{5}{3}$

c) $3x + 3 - 2(x^2 + 9 - 6x) = 4x + 16 - 10$; $-2x^2 - 13x - 21 = 0$; $x = -3$, $x = -\dfrac{7}{2}$

4.6. Calcula dos números naturales consecutivos tales que la suma de sus cuadrados sea 545.

Dos números naturales consecutivos: n, $n + 1$

$n^2 + (n + 1)^2 = 545 \Rightarrow n^2 + n - 272 = 0 \to n = 16$ (solución: 16 y 17), $n = -17$ (no válida)

4.7. Opera y resuelve las ecuaciones bicuadradas obtenidas.

a) $2(x + 1)^4 - 8x^3 - 8(x + 3) + 8 = 0$

b) $\dfrac{24}{x^2} = 3x^2 - 6$

a) $2x^4 + 12x^2 - 14 = 0 \to x^4 + 6x^2 - 7 = 0 \to x^2 = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -7 \end{cases}$

Por lo que las soluciones son $x = -1$, $x = 1$. ($x^2 = -7$ no tiene solución real.)

b) $3x^4 - 6x^2 - 24 = 0 \to x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \to x^2 = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = -2 \end{cases}$

Por lo que las soluciones son $x = -2$, $x = 2$. ($x^2 = -2$ no tiene solución real.)

4.8. Resuelve las siguientes ecuaciones por factorización.

a) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

b) $6x^4 + 13x^3 - 8x^2 - 17x + 6 = 0$

a) $(x - 1)^2(x - 4) = 0$; $x = 1$ (doble) y $x = 4$

b) $(x - 1)(x + 2)(2x + 3)(3x - 1) = 0$; $x = 1$, $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = \frac{1}{3}$

4.9. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x + \frac{2}{x} = -3$

b) $\frac{11x + 11}{9} = 2x - \frac{12}{2 - x} - 7$

c) $\frac{4}{x + 2} + \frac{4}{x} = 3$

d) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{7}{8}$

a) $x^2 + 2 = -3x \to x^2 + 3x + 2 = 0 \to x = -2,\ x = -1$

b) $(11x + 11)(2 - x) = 18x(2 - x) - 108 - 63(2 - x) \to 7x^2 - 88x + 256 = 0 \to x = 8,\ x = \frac{32}{7}$

c) $4x + 4(x + 2) = 3x(x + 2) \to -3x^2 + 2x + 8 \to x = 2,\ x = -\frac{4}{3}$

d) $8x^2 + 8x + 8 = 7x^3 \to 7x^3 - 8x^2 - 8x - 8 = 0 \to (x - 2)(7x^2 + 6x + 4) = 0 \to x = 2$

($7x^2 + 6x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales.)

4.10. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $\frac{2x}{3} + \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{11}{3x - 3}$

b) $\frac{2x}{x - 2} + \frac{3x}{x + 2} = \frac{6x^2}{x^2 - 4}$

c) $\frac{2}{x^2 - 1} + \frac{3x}{x - 1} = \frac{x}{x + 1}$

d) $\frac{x^3 - 8}{x - 1} = \frac{24x + 16}{x + 2}$

a) $2x(x - 1) + 3(2x + 3) = 11 \to x^2 + 2x - 1 = 0 \to x = -1 + \sqrt{2},\ x = -1 - \sqrt{2}$

b) $2x(x + 2) + 3x(2x - 2) = 6x^2 \to -x^2 - 2x = 0 \to x = 0,\ x = -2$ (solución no válida)

c) $2 + 3x\,(x + 1) = x(x - 1) \to 2x^2 + 4x + 2 = 2 = \to x = -1$ (doble) (solución no válida)

d) $(x^3 - 8)(x + 2) = (24x + 16)(x - 1) \to x^2(x^2 + 2x - 24) = 0 \to x = 0$ (doble), $x = 4$, $x = -6$.

4.11. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x + 2} - x + 4 = 0$

b) $x + \sqrt{10 + x^2} = 5$

c) $\sqrt{x - 7} + \sqrt{2x} = \sqrt{x + 1}$

d) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1} = 5$

a) $\sqrt{x + 2} = x - 4 \Rightarrow \left(\sqrt{x + 2}\right)^2 = (x - 4)^2 \Rightarrow x + 2 = x^2 + 16 - 8x \to x^2 - 9x + 14 = 0$

$x = 7$ (Sí es solución), $x = 2$ (No es solución)

b) $\left(\sqrt{10 + x^2}\right)^2 = (5 - x)^2 \Rightarrow 10 + x^2 = x^2 + 25 - 10x \to 10x = 15$

$x = \frac{3}{2}$ (Sí es solución)

c) $\left(\sqrt{x - 7} + \sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 1}\right)^2 \Rightarrow x - 7 + 2x + 22x^2 - 14x = x + 1 \Rightarrow 2\sqrt{2x^2 - 14x} = 8 - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2x^2 - 14x} = 4 - x \Rightarrow \left(\sqrt{2x^2 - 14x}\right)^2 = (4 - x)^2 \Rightarrow\ x^2 - 6x - 16 = 0$

$x = 8$ (No es solución), $x = -2$ (No es solución). La ecuación no tiene solución.

d) $\sqrt{x + 4} = 5 - \sqrt{x - 1} \Rightarrow \left(\sqrt{x + 4}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x - 1}\right)^2 \Rightarrow x + 4 = 25 + x - 1 - 10\sqrt{x - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10\sqrt{x - 1} = 20 \Rightarrow \sqrt{x - 1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 4;\ x = 5$ (Sí es solución)

4.12. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales.

a) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}} = x - \dfrac{5}{2}$

b) $\sqrt{3 \cdot \sqrt{16 - x}} = \sqrt{2x - 5}$

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x}} = x - 2$

d) $\sqrt{2x + 7} - \sqrt{x} = 2$

a) $\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = x^2 - 5x + \dfrac{25}{4} \Rightarrow -x^3 + 6x^2 - \dfrac{33x}{4} + 1 = 0$

$x = 4$, $x = \dfrac{2 - \sqrt{3}}{2}$ (Sí son soluciones), $x = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2}$ (No es solución)

b) $\left(\sqrt{3 \cdot \sqrt{16 - x}}\right)^2 = \left(\sqrt{2x - 5}\right)^2 \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{16 - x} = 2x - 5 \Rightarrow \left(3 \cdot \sqrt{16 - x}\right)^2 = (2x - 5)^2 \Rightarrow$

$9(16 - x) = 4x^2 - 20x + 25 \Rightarrow 4x^2 - 11x - 119 \Rightarrow x = -\dfrac{17}{4}$ (no válida), $x = 7$ (Sí es solución)

c) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 \Rightarrow \dfrac{x^2}{x} = x^2 + 4 - 4x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$; $x = 4$ (Sí es solución),

$x = 1$ (No es solución)

d) $\left(\sqrt{2x + 7}\right)^2 = \left(\sqrt{x} + 2\right)^2 \Rightarrow 2x + 7 = x + 4 + 4\sqrt{x} \Rightarrow (x + 3)^2 = \left(4\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

$x = 9$, $x = 1$ (Sí son soluciones)

4.13. Clasifica los siguientes sistemas en lineales y no lineales, e identifica las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes.

a) $\begin{cases} 2x + xy = 3 \\ x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$

a) No lineal.

Incógnitas: x, y.

Coeficientes de la primera ecuación: 2 (en x) y 1 (en xy); término independiente: 3. Coeficientes de la segunda ecuación: 1 (en x) y 3 (en y); término independiente: 4. Coeficientes de la tercera ecuación: 2 (en x) y 5 (en y); término independiente: 6.

b) Lineal.

Incógnitas: x, y, z.

Coeficientes de la primera ecuación: 1,1 y 0; término independiente: 1. Coeficientes de la segunda ecuación: 0, 1 y 1; término independiente: 2. Coeficientes de la tercera ecuación: 1, 0 y 2; término independiente: 0.

4.14. Indica si los pares de valores dados son soluciones del siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 9x + 10y = 13 \\ -x + 4y = -4 \end{cases}$

a) $x = -3$, $y = 4$

b) $x = 2$, $y = -\dfrac{1}{2}$

a) $\begin{cases} 9 \cdot (-3) + 10 \cdot 4 = -27 + 40 = 13 \\ -(-3) + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19 \neq -4 \end{cases} \Rightarrow$ No es solución del sistema.

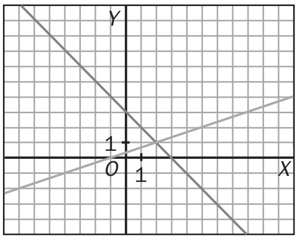
b) $\begin{cases} 9 \cdot 2 + 10 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 18 - 5 = 13 \\ -2 + 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -2 - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow$ Sí es solución del sistema.

4.15. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por algún método algebraico y por el método gráfico.

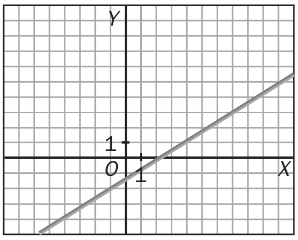
a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 5x + 5y = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x - 3(4 - y) = 6 \\ 3(2x - 9) - 5y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 5y = -10 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3(2x - 1) - 5(y + 2) = 3 \\ 2(x + 3y) + 3(y - 4x) = -10 \end{cases}$

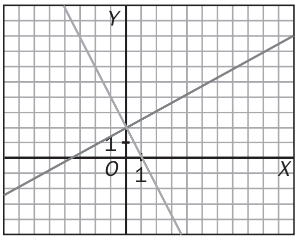
a) $\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$ $y = 1, \ \ x = 2$



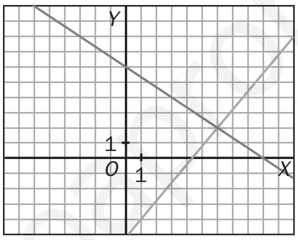
d) $\begin{cases} 6x - 10y = 14 \\ -6x + 10y = -14 \end{cases}$ Infinitas soluciones.



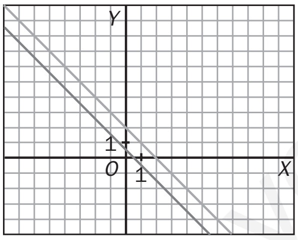
b) $\begin{cases} 3x - 5y = -10 \\ 10x + 5y = 10 \end{cases}$ $x = 0, \ \ y = 2$



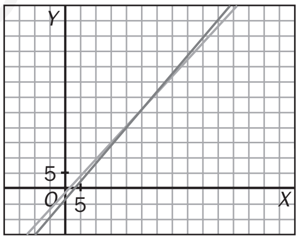
e) $\begin{cases} 2x - 12 + 3y = 6 \\ 6x - 27 - 5y = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 6x - 5y = 26 \end{cases}$ $x = 6, \quad y = 2$



c) $\begin{cases} 5x + 5y = 10 \\ 5x + 5y = 2 \end{cases}$ No tiene solución.



f) $\begin{cases} 6x - 3 - 5y - 10 = 3 \\ 2x + 6y + 3y - 12x = -10 \end{cases}$ $\Rightarrow x = \dfrac{47}{2}, \quad y = 25$



4.16. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de segundo grado.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + 3y = 22 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 5y = -8 \\ xy - 3x = -5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ xy = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 32 \\ -3x^2 - 4y^2 = -48 \end{cases}$ d) $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases}$ f) $\begin{cases} (x - y)^2 - xy = 6 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 8 - 2x \\ 2x + 3(8 - 2x)^2 = 22 \end{cases} \Rightarrow 2x + 192 + 12x^2 - 96x = 22 \to 12x^2 - 94x + 170 = 0 \to$

$x = 5, \ \ y = -2; \ \ x = \dfrac{17}{6}, \ \ y = \dfrac{7}{3}$

b) $\begin{matrix} 3E_1 \\ 2E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 9y^2 = 96 \\ -6x^2 + 8y^2 = -96 \end{cases}$ $17y^2 = 0 \to$

$y = 0, \ \ x = 4; \ \ y = 0, \ \ x = -4$

c) $\begin{cases} y = \dfrac{-8 - 2x}{5} \\ x \cdot \left(\dfrac{-8 - 2x}{5}\right) - 3x = -5 \end{cases} \Rightarrow -8x - 2x^2 - 15x = -25 \to 2x^2 + 23x - 25 = 0 \to$

$x = 1, \ \ y = -2; \ \ x = -\dfrac{25}{2}, \ \ y = \dfrac{17}{5}$

d) $\begin{cases} x = -\dfrac{3}{y} \\ \dfrac{9}{y^2} + 2y^2 = 19 \end{cases} \Rightarrow 2y^4 - 19y^2 + 9 = 0 \rightarrow$

$y = 3,\ \ x = -1;\ \ y = 3,\ \ x = 1;\ \ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \ x = -3\sqrt{2};\ \ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \ x = 3\sqrt{2}$

e) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 1 \\ x = \dfrac{6}{y} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{36}{y^2} - 2y^2 = 1 \Rightarrow -2y^4 - y^2 + 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} y^2 = 4 \\ y^2 = -\dfrac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$y^2 = 4,\ \ y = 2,\ \ x = 3;\ \ y = -2,\ \ x = -3;\ y^2 = -\dfrac{9}{2}$ (no tiene solución).

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3xy = 6 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4x^2 + 1 - 4x - 6x^2 + 3x = 6 \Rightarrow -x^2 - x - 5 = 0 \rightarrow$ No tiene solución real.

4.17. Estudia y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z = -14 \\ 5x - y - 2z = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 2x - 2y - z = 8 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = -1 \\ 3x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + y - 5z = 5 \\ 5x - y - z = 13 \\ 4x - 2y - 3z = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 8x + y + z = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x - y + 2z = 3 \\ x + 2y - 7z = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 2x + 5y - 2z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2 - 3E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ -9y + 7z = -20 \\ -11y + 8z = -25 \end{cases} \quad 9E_3 - 11E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ -9y + 7z = -20 \\ -5z = -5 \end{cases} \Rightarrow z = 1,\ \ y = 3,\ \ x = -2$

b) $\begin{matrix} E_2 - E_1 \\ 2E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ -3y = -3 \\ y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 1,\ \ z = -2,\ \ x = 4$

c) $\begin{matrix} 2E_2 - 3E_1 \\ E_3 - E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -18y - z = -2 \\ 4z = 6 \end{cases} \Rightarrow z = \dfrac{3}{2},\ \ y = \dfrac{1}{36},\ \ x = \dfrac{25}{36}$

d) $\begin{matrix} 4E_2 - 5E_1 \\ E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 5z = 5 \\ -9y + 21z = 27 \\ -3y + 2z = 9 \end{cases} \quad 3E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 5z = 5 \\ -9y + 21z = 27 \\ -15z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0,\ \ y = -3,\ \ x = 2$

e) $\begin{matrix} 5E_2 - 3E_1 \\ 5E_3 - 8E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ -11y + 21z = 0 \\ -11y + 21z = -5 \end{cases}$ Sistema incompatible. No tiene solución.

f) $\begin{matrix} 2E_2 - E_1 \\ 2E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ -y + 3z = 1 \\ 5y - 15z = -5 \end{cases} \quad E_3 + 5E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ -y + 3z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t,\ \ y = 3t - 1,\ \ x = t + 2$

g) $\begin{matrix} 2E_2 - E_1 \\ E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ y + 3z = 2 \\ 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = 1,\ \ y = -1,\ \ x = 1$

h) $\begin{matrix} 3E_2 - 2E_1 \\ 3E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 17y - 8z = -4 \\ 4y + 25z = 1 \end{cases} \quad 17E_3 - 4E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 17y - 8z = -4 \\ 66z = 33 \end{cases} \Rightarrow z = \dfrac{1}{2},\ \ y = 0,\ \ x = \dfrac{1}{2}$

4.18. Resuelve el siguiente sistema aplicando los cambios de incógnita $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$, $\frac{1}{z} = c$, para transformar las ecuaciones en ecuaciones lineales. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = -7 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{5}{z} = -12 \\ \frac{4}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{z} = 15 \end{cases}$

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = -7 \\ 2a + 3b - 5c = -12 \\ 4a + 4b - c = 15 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - 3c = -7 \\ -b + c = 2 \\ -4b + 11c = 43 \end{cases} E_3 - 4E_2 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b - 3c = -7 \\ -b + c = 2 \\ 7c = 35 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c = 5$, $b = 3$, $a = 2$. Por tanto: $x = \frac{1}{2}$ $\quad y = \frac{1}{3}$ $\quad z = \frac{11}{5}$

4.19. Calcula las edades de tres hermanos a partir de los siguientes datos:

- Las edades de los tres suman 44 años.
- La edad del hermano mediano es superior en medio año a la media aritmética de las edades de los otros dos hermanos.
- La suma de las edades de los dos hermanos menores supera en 10 años a la edad del mayor.

Mayor, x años; mediano, y años; menor, z años.

$$\begin{cases} x + y + z = 44 \\ y = \frac{x + z}{2} + \frac{1}{2} \\ y + z = x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 44 \\ x - 2y + z = -1 \\ x - y - z = -10 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - E_1 \\ E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 44 \\ -3y = -45 \\ 2x = 34 \end{cases} \quad x = 17 \quad y = 15 \quad z = 12$$

4.20. La oferta y la demanda del mercado de un modelo de pantalones vaqueros en cierto momento vienen dadas por las expresiones:

$$x_O = 0{,}5p_x^2 - 40p_x + 1000,\ 40 \leqslant p_x \leqslant 60$$
$$x_D = 10p_x + 750$$

Calcula el punto de equilibrio de este mercado.

Igualando ambas expresiones, $0{,}5p_x^2 - 40p_x + 1000 = -10p_x + 750$, cuyas soluciones son $p_x = 10$ (no válida) y $p_x = 50$. El punto de equilibrio se alcanza con un precio de 50 €. La oferta y demanda en este caso es de 250 unidades.

4.21. Se han comprado 35 L de aceite de oliva virgen extra de 4 euros el litro para mezclar con aceite puro de oliva de 3,25 euros el litro.

a) ¿Cuántos litros de aceite de la segunda clase se tienen que utilizar para que la mezcla salga a 3,50 euros el litro si no se quiere obtener beneficio?

b) Si se quiere obtener un beneficio del 10%, ¿a cuánto deberá venderse el litro de la mezcla?

a) Sea x los litros de aceite de segunda clase.

$35 \cdot 4 + 3{,}25 \cdot x = 3{,}50\ (35 + x) \Rightarrow 0{,}25x = 17{,}5 \rightarrow x = 70$ L

b) $1{,}1\ (35 \cdot 4 + 70 \cdot 3{,}25) = (35 + 70)\ x \Rightarrow 1{,}1 \cdot 367{,}5 = 105 \cdot x \Rightarrow x = 3{,}85$ €

EJERCICIOS

Ecuaciones de primero y segundo grado

4.22. Halla mentalmente las soluciones, si existen, de las siguientes ecuaciones.

a) $3x + 1 - 2x = 6x$

b) $x^2 + x + 1 = 3 - x + x^2$

c) $3x + 2 - x = 2x - 5$

d) $\frac{1}{2}x + 3{,}5 = 2{,}6 - x$

a) $x = \frac{1}{5}$

b) $x = 1$

c) Sin solución

d) $x = -0{,}6$

4.23. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $2x - 2(3x - 1) + 4(2x - 5) - 10 = 8x$

b) $2x - \frac{3x - 1}{3} = x + \frac{1}{3}$

c) $\frac{3x - 1}{4} - 2x = \frac{2x - \frac{7}{4}}{2} - (3x - 1)$

d) $\frac{x + 10}{2} + \frac{2(x - 2)}{5} = \frac{5x - 15}{3}$

a) $2x - 6x + 2 + 8x - 20 - 10 = 8x$, luego $x = -7$

b) $6x - 3x + 1 = 3x + 1$, luego $0 = 0$. Todos los números reales son solución.

c) $3x - 1 - 8x = 4x - \frac{7}{2} - 12x + 4 \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $15x + 150 + 12x - 24 = 50x - 150$, luego $x = 12$

4.24. Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $4x^2 - 7x - 2 = 0$

b) $-7x^2 + 12x - 5 = 0$

c) $(x + 7)(x + 1) = -5$

d) $x(2x - 1) - 3x(x + 1) = 0$

e) $(x - 1)^2 + \frac{11}{9} = x$

f) $(x - 1)^2 + 2x = 10$

a) $x = 2,\ \ x = \frac{-1}{4}$

b) $x = 1,\ \ x = \frac{5}{7}$

c) $x^2 + 8x + 12 = 0 \rightarrow x = -2,\ \ x = -6$

d) $2x^2 - x - 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -4$

e) $9x^2 + 9 - 18x + 11 = 9x \rightarrow x = \frac{5}{3},\ x = \frac{4}{3}$

f) $x^2 + 1 - 2x + 2x = 10 \Rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3,\ x = -3$

4.25. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(x - 2)^2 + (x + 4)(x - 2) = 2 - 3(x + 1)$

b) $-2(x - 2)^2 + 3x + 8 = 0$

c) $\frac{x(x - 1)}{15} + \frac{(x - 6)^2}{5} + \frac{(x + 2)^2}{3} = \frac{(3x - 2)(3x - 4)}{15}$

a) $x^2 - 4x + 4 + x^2 + 4x - 2x - 8 - 2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -\frac{3}{2}$

b) $-2x^2 + 8x - 8 + 3x + 8 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 11x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = \frac{11}{2}$

c) $x^2 - x + 3(x^2 + 36 - 12x) + 5(x^2 + 4 + 4x) = 9x^2 - 12x - 6x + 8 \rightarrow x = -120$

4.26. Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas.

a) $x^2 + 18x = 0$
b) $2x^2 - 9x = 0$
c) $-x^2 + 2x = 0$
d) $2x^2 - 8 = 0$

a) $x = 0,\ x = -18$
b) $x = 0,\ x = \dfrac{9}{2}$
c) $x = 0,\ x = 2$
d) $x = 2,\ x = -2$

4.27. Indica el número de soluciones reales de las siguientes ecuaciones sin resolverlas.

a) $x^2 - 3x + 12 = 0$
b) $-4x^2 + \dfrac{4x}{3} - \dfrac{1}{9} = 0$
c) $-3x^2 - x + 4 = 0$
d) $\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{4x}{3} - \dfrac{5}{2} = 0$

a) $\Delta = -39$ Ninguna solución real.
b) $\Delta = 0$ Una solución real doble.
c) $\Delta = 49$ Dos soluciones reales.
d) $\Delta = \dfrac{151}{9}$ Dos soluciones reales.

4.28. Escribe en cada caso una ecuación de segundo grado que tenga las soluciones indicadas.

a) $x = 2,\ x = -3$
b) $x = 4$ (doble)

a) $(x - 2)(x + 3) = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$
b) $(x - 4)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 16 - 8x = 0$

4.29. Calcula la suma y el producto de las soluciones de las siguientes ecuaciones, sin resolverlas.

a) $3x^2 + 3x = 18$
b) $x^2 - 2x + 2 = 0$
c) $x^2 + \dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{3}$
d) $ax^2 + ax - 1 = 0$

a) Suma: $-\dfrac{3}{3} = -1$, producto: $-\dfrac{18}{3} = -6$
b) Suma: 2, producto: 2
c) Suma: $-\dfrac{\frac{1}{6}}{1} = -\dfrac{1}{6}$, producto: $-\dfrac{\frac{1}{3}}{1} = -\dfrac{1}{3}$
d) Suma: $-\dfrac{a}{a} = -1$, producto: $-\dfrac{1}{a}$

4.30. Escribe una ecuación de segundo grado tal que sus soluciones sumen $\dfrac{3}{4}$ y el producto de las mismas sea 2.

$$x^2 - \frac{3}{4}x + 2 = 0$$

Ecuaciones de grado superior a dos

4.31. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas.

a) $x^4 - 50x^2 + 49 = 0$
b) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$
c) $x^4 - 34x^2 - 72 = 0$
d) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$
e) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
f) $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$

a) $x = 1,\ x = -1,\ x = 7,\ x = -7$
b) $x = 2,\ x = -2,\ x = 11,\ x = -11$
c) $x = 6,\ x = -6$
d) Sin soluciones reales
e) $x = 2,\ x = -2,\ x = 1,\ x = -1$
f) $x = \pm\dfrac{1}{2}$

4.32. Opera y encuentra las soluciones de la siguiente ecuación. $x^2 = \dfrac{10x^2}{x^2 + 3} + 3$

$x^4 - 3x^2 = 10x^2 + 3x^2 + 9 \rightarrow x^4 - 10x^2 - 9 = 0$, cuyas soluciones son $x = 3,\ x = -3,\ x = 1$ y $x = -1$.

4.33. Resuelve la ecuación $(x^3 - 2)^4 = 8$ aplicando el cambio de incógnita $z = x^3 - 2$.

$$z^4 = 8 \to z = \sqrt[4]{8} \to x^3 = \sqrt[4]{8} + 2 \to x = \sqrt[3]{\sqrt[4]{8} + 2}$$

4.34. Resuelve las siguientes ecuaciones estudiando los valores que anulan cada factor.

a) $(x - 4)(x + 5) = 0$

b) $x(x^2 - x - 1) = 0$

c) $(2x + 1)(3x + 1)(x^2 + 1) = 0$

d) $(x^2 - a)(x^2 + 2x - 3) = 0$

a) $x = 4,\ \ x = -5$

b) $x = 0,\ \ x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2},\ \ x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

c) $x = -\dfrac{1}{2},\ x = -\dfrac{1}{3}$

d) $x = \pm\sqrt{a}$ si $a \geqslant 0,\ \ x = 1,\ \ x = -3$

4.35. Escribe en cada caso una ecuación cuyas soluciones sean las indicadas.

a) 1 y 5

b) −2, −7, 2 y 7

c) $\dfrac{1}{2}$, −2 y $\dfrac{3}{4}$

d) a, b, $\dfrac{c}{4}$ y 0

a) $(x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

b) $(x + 2)(x + 7)(x - 2)(x - 7) = 0 \Rightarrow x^4 - 53x^2 + 196 = 0$

c) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x + 2)\left(x - \dfrac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{17}{8}x + \dfrac{3}{4} = 0$

d) $(x - a)(x - b)\left(x - \dfrac{c}{4}\right)x = 0 \Rightarrow x^4 - \left(a + b + \dfrac{c}{4}\right)x^3 + \left(\dfrac{ac}{4} + \dfrac{bc}{4} + ab\right)x^2 - \dfrac{abc}{4}x$

4.36. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas por factorización.

a) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$

b) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$

c) $x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 + \dfrac{11}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x = 2$

d) $x^6 + x^4 = 2x^5 + 2x^3$

e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

f) $x^2(x + 1) = x(x + 1)$

a) $(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = -2,\ \ x = 3$

b) $(x - 1)(6x^2 - x - 15) = 0 \Rightarrow x = 1,\ \ x = -\dfrac{3}{2},\ \ x = \dfrac{5}{3}$

c) $(3x + 2)(x - 3)(x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$ (doble), $x = 3,\ \ x = -\dfrac{2}{3}$

d) $x^3(x - 2)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ (triple), $x = 2$

e) $(x - 1)^2(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1$ (doble), $x = -1$

f) $(x + 1)x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ \ x = -1,\ \ x = 1$

Ecuaciones racionales

4.37*. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x + 3 = -\frac{2}{x}$

b) $2x - \frac{12}{2 - x} + 7 + \frac{11x + 11}{9}$

c) $\frac{x + 9}{x} - \frac{5 + x}{x + 2} = \frac{12x + 12}{x^2 + 2x}$

d) $\frac{x + 2}{x + 1} - \frac{x + 1}{x + 2} = \frac{9}{20}$

e) $\frac{x + 1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

f) $\frac{4}{x} + \frac{4}{x + 2} = 3$

g) $\frac{x + 1}{x - 1} = \frac{4x + 12}{3x + 3}$

h) $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + a} = \frac{1}{x^2 - a^2}$

a) $x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = -1, x = -2$

b) $36x - 18x^2 - 108 = 126 - 63x + 22x + 22 - 11x^2 - 11x \rightarrow 7x^2 - 88x + 256 = 0 \rightarrow x = 8, x = \frac{32}{7}$

c) $x^2 + 11x + 18 - 5x - x^2 = 12x + 12 \rightarrow x = 1$

d) $20x^2 + 80 + 80x - 20x^2 - 20 - 40x = 9x^2 + 27x + 18 \rightarrow 9x^2 - 13x - 42 = 0 \rightarrow x = 3, x = -\frac{14}{9}$

e) $x^2 - 1 = 2x(x^2 - 1) \rightarrow (x^2 - 1)(1 - 2x) = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -1,\ x = \frac{1}{2}$

f) $4x + 8 + 4x = 3x^2 + 6x \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = 2,\ x = -\frac{4}{3}$

g) $3x^2 + 3x + 3x + 3 = 4x^2 + 12x - 4x - 12 \rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \rightarrow x = 3, x = -5$

h) $x + a + x - a = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$

4.38. Resuelve la siguiente ecuación aplicando el cambio de variable $z = x^2 - 3x$.

$$\frac{x^2 - 3x - 1}{(x^2 - 3x)^2 - 1} = \frac{x^2 - 3x - 2}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$\frac{z - 1}{z^2 - 1} = \frac{z - 2}{z^2} \Rightarrow \frac{1}{z + 1} = \frac{z - 2}{z^2} \Rightarrow z^2 = (z + 1)(z - 2) \rightarrow z^2 - z^2 + 2 + z = 0 \rightarrow z = -2 \rightarrow x = 2, x = 1$$

Ecuaciones con radicales

4.39. Halla mentalmente la solución de las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\sqrt{x + 1} = 4$

b) $\sqrt{\frac{x}{4}} = 9$

c) $\sqrt{3x + 1} = 7$

d) $\sqrt{x^4} = 9$

a) $\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x + 1 = 16 \rightarrow x = 15$ (solución válida)

b) $\left(\sqrt{\frac{x}{4}}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow \frac{x}{4} = 81 \rightarrow x = 324$ (solución válida)

c) $\left(\sqrt{3x + 1}\right)^2 = 7^2 \Rightarrow 3x + 1 = 49 \rightarrow x = 16$ (solución válida)

d) $x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$ (soluciones válidas)

4.40. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $2 - 3\sqrt{x} = 2x$

b) $3x + \sqrt{2x - 2} = 2\sqrt{2x - 2} + 23$

c) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 5$

d) $3\sqrt{3x - 1} = 2\sqrt{3\,(3x - 1)}$

a) $\left(3\sqrt{x}\right)^2 = (2 - 2x)^2 \Rightarrow 9x = 4 + 4x^2 - 8x \Rightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0 \rightarrow x = 4$ (no válida), $x = \frac{1}{4}$ (válida)

b) $(3x - 23)^2 = \left(\sqrt{2x - 2}\right)^2 \Rightarrow 9x^2 - 140x + 531 = 0 \rightarrow x = 9$ (válida), $x = \frac{59}{9}$ (no válida)

c) $\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{2x + 3}\right)^2 \Rightarrow x + 1 = 25 + 2x + 3 - 10\sqrt{2x + 3} \Rightarrow \left(10\sqrt{2x + 3}\right)^2 = (x + 27)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 146x + 429 = 0 \rightarrow x = 3$ (válida), $x = 143$ (no válida)

d) $\left(3\sqrt{3x - 1}\right)^2 = \left(2\sqrt{3 \cdot (2x - 1)}\right)^2 \Rightarrow 27x - 9 = 24x - 12 \rightarrow x = -1$ (no válida)

4.41. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{2 + \sqrt{x - 4}} = \sqrt{12 - x}$

b) $\dfrac{\sqrt{2x - 1}}{4} = \dfrac{3}{\sqrt{2x - 1}}$

a) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{x - 4}}\right)^2 = \left(\sqrt{12 - x}\right)^2 \Rightarrow 2 + \sqrt{x - 4} = 12 - x \Rightarrow \left(\sqrt{x - 4}\right)^2 = (10 - x)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 21x + 104 = 0 \rightarrow x = 8$ (válida), $x = 13$ (no válida)

b) Multiplicando en cruz, $2x - 1 = 12 \rightarrow x = \frac{13}{2}$ (válida)

4.42. Resuelve la ecuación $\sqrt{x} = \sqrt[4]{36 + 5x}$.

$\left(\sqrt{x}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{36 + 5x}\right)^4 \Rightarrow x = 36 + 5x \rightarrow x = -9$, con lo que no tiene solución.

Sistemas de ecuaciones

4.43. Comprueba en cada caso si los valores indicados forman una solución de los sistemas dados.

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $\quad x = 2,\ y = 1$

b) $\begin{cases} x - 2y - 6z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = -4 \end{cases}$ $\quad x = 2,\ y = 3,\ z = 1$

a) No, porque no verifica la segunda ecuación.

b) No, porque no verifica la primera ecuación.

4.44. Resuelve los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} y = \dfrac{x + 1}{2} + 3 \\ y = 2x + 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(2x + y) - 3(3x - 2y) = -34 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3(2x + y) = -1 \\ \dfrac{x}{2} + 3y = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y + 1} = -1 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y + 1} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

a) $\dfrac{x + 1}{2} + 3 = 2x + 10 \Rightarrow x + 1 + 6 = 4x + 20 \rightarrow x = -\dfrac{13}{3}\ \ y = \dfrac{4}{3}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y - 9x + 6y = -34 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 8y = -34 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 8y = -34 \\ 12x - 8y = 48 \end{cases} \Rightarrow 7x = 14 \rightarrow x = 2\ \ y = -3$

c) $\begin{cases} 8x + 3y = -1 \\ x + 6y = 28 \end{cases} \rightarrow x = -2\ \ y = 5$

d) $a = \dfrac{1}{x}\ \ b = \dfrac{1}{y + 1} \Rightarrow \begin{cases} a - 3b = -1 \\ 2a + b = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}\ \ b = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = 2\ \ y = 1$

4.45. Resuelve los siguientes sistemas de segundo grado.

a) $\begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy - 2x^2 = -26 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{2} = 15 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2 - 2(x - y)^2 = 36 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x = 6y - 6 \\ 2(6y - 6)^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow 73y^2 - 144y - 4 = 0 \to y = 2,\ x = 6;\ y = \dfrac{-2}{73},\ x = -\dfrac{450}{73}$

b) $\begin{cases} -3x \cdot \dfrac{7 + 4x}{5} - 2x^2 = -26 \\ y = -\dfrac{7 + 4x}{5} \end{cases} \to -22x^2 - 21x + 130 = 0 \to x = 2,\ y = -3;\ x = -\dfrac{65}{22},\ y = \dfrac{53}{55}$

c) $\begin{cases} 6x + y = 30 \\ 2y + 3x = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 - 6x \\ 60 - 12x + 3x = 30x - 6x^2 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 39x + 60 = 0 \to x = 4,\ y = 6;\ x = \dfrac{15}{2},\ y = 15$

d) $\begin{cases} -x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ x = \dfrac{30 - 2y}{3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{900 + 4y^2 - 120y}{9} - 2y^2 + \dfrac{120y - 8y^2}{3} = 36$

$y = 6,\ x = 6;\ y = \dfrac{102}{23},\ \ x = \dfrac{162}{23}$

4.46*. Encuentra todas las soluciones del siguiente sistema.

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 13 \\ x^2 + 2y - 6z = -13 \end{cases}$$

$\begin{cases} x^2 + z^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 13 \\ x^2 + 2y - 6z = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 13 \\ 2y - 6z - z^2 = -23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 13 \\ y = \dfrac{-23 + 6z + z^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{z^4 + 12z^3 - 10z^2 - 276z + 529}{4} + z^2 = 13 \Rightarrow z^4 + 12z^3 - 6z^2 - 276z + 477 = 0$

Factorizando el polinomio obtenemos $(z - 3)(z^3 + 15z^2 + 39z - 159) = 0$, cuya solución entera es $z = 3$. Las demás soluciones las encontramos sustituyendo este valor de z en la primera y la segunda ecuación:

$x^2 + 9 = 10 \to x = 1$ o $x = -1$ (ambas válidas)

$y^2 + 9 = 13 \to y = 2$ (válida en la tercera ecuación) e $y = -2$ (no válida en la tercera ecuación)

Resumiendo, las soluciones son:

$x = 1,\ y = 2,\ z = 3$

$x = -1,\ y = 2,\ z = 3$

4.47. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales indicando si son compatibles o incompatibles, y todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 4x + 2y - 6z = 6 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ 5x - 3y + 8z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 5x - y + 2z = 11 \\ 6x + y + z = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ 2x - 4y + 3z = -2 \\ 4x - y + 6z = -4 \end{cases}$

a) $\begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ -3y + 2z = -4 \\ -10y + 2z = -18 \end{cases}$ $E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ -3y + 2z = -4 \\ -7y = -14 \end{cases} \Rightarrow y = 2,\ z = 1,\ x = 2$. SCD.

b) $\begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$ SI.

c) $\begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases}$ $E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t,\ y = 2 - 2t,\ x = 2$. SCI.

d) $\begin{matrix} E_2 - \ \ E_1 \\ E_3 - 6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -11y + 7z = 36 \\ -11y + 7z = 35 \end{cases} \Rightarrow$ SI.

e) $\begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \\ -18y + 18z = 36 \end{cases}$ $E_3 - 2E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = t,\ y = t - 2,\ x = -t$. SCI.

f) $\begin{matrix} E_2 - \ \ E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ -5y + 5z = -10 \\ -3y + 10z = -20 \end{cases}$ $5E_3 - 3E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ -5y + 5z = -10 \\ 35z = -70 \end{cases} \Rightarrow z = -2,\ y = 0,\ x = 2$. SCD.

PROBLEMAS

4.48. La suma de los cuadrados de dos números naturales impares consecutivos es 1570. Calcula el valor del siguiente impar.

Números impares desconocidos: $2x + 1$, $2x + 3$. El siguiente impar es $2x + 5$.

$(2x + 1)^2 + (2x + 3)^2 = 1570 \rightarrow x = 13,\ x = -15$ (solución no válida)

El siguiente impar es $2 \cdot 13 + 5 = 31$.

4.49. Al dividir dos números que suman 147 se obtiene 5 de cociente y 9 de resto. ¿Cuáles son esos números?

Los números son x e y.

$\begin{cases} x + y = 147 \\ 5y + 9 = x \end{cases}$ cuyas soluciones son $x = 124$, $y = 23$

4.50. Dos capitales iguales se colocan al 3% y al 4%, respectivamente, durante un año. El segundo capital produce 12,50 euros más de intereses que el primero. ¿A cuánto ascendían los capitales iniciales iguales?

Sea C el capital: $0{,}04C - 0{,}03C = 12{,}5 \rightarrow C = 1250$ €

4.51. **Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija. Dentro de cinco años sólo tendrá tres veces la edad de ella. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y la hija?**

Edad actual: padre, $4x$; hija, x. Dentro de cinco años: padre: $4x + 5$, hija: $x + 5$

$4x + 5 = 3(x + 5) \rightarrow x = 10$. Edades actuales: padre, 40 años; hija, 10

4.52. **Hace tres años, las edades de dos personas estaban en la proporción 6 : 1, y dentro de seis años estarán en la proporción 3 : 1. ¿Cuáles son las edades actuales de ambas personas?**

Edades	Hace tres años	Actual	Dentro de seis años
Persona *A*	$6x$	$6x + 3$	$6x + 9$
Persona *B*	x	$x + 3$	$x + 9$

$6x + 9 = 3(x + 9) \rightarrow 3x = 18 \rightarrow x = 6$

Actualmente, las edades son de 39 y 9 años, respectivamente.

4.53. **Se han pagado 400 euros con 32 billetes, unos de 20 euros y otros de 5. ¿Cuántos billetes de cada cantidad se entregaron?**

x = billetes de 20, y = billetes de 5

$\begin{cases} x + y = 29 \\ 20x + 5y = 400 \end{cases}$ cuyas soluciones son $x = 17$ e $y = 12$.

4.54. **La relación entre la temperatura en grados centígrados y la temperatura en grados Fahrenheit es: 0° centígrados equivalen a 32° Fahrenheit, y 100° centígrados se corresponden con 212° Fahrenheit.**

a) Escribe la expresión analítica que relaciona los grados Fahrenheit con los grados centígrados.

b) Se observa que la temperatura es de 32° C. ¿Cuál sería esta misma temperatura medida en grados Fahrenheit?

a) $F = aC + b \Rightarrow \begin{cases} 32 = a \cdot 0 + b \\ 212 = 100a + b \end{cases} \Rightarrow a = 1{,}8 \quad b = 32 \Rightarrow F = 1{,}8C + 32$

b) $F = 1{,}8 \cdot 32 + 32 = 89{,}6$ °F

4.55. **Halla una fracción tal que si al numerador y al denominador se les suma una unidad, la fracción equivale a $\frac{1}{3}$, y si se les restan 3 unidades, equivale a $\frac{1}{5}$.**

Sea x el numerador e y el denominador.

$$\begin{cases} \dfrac{x + 1}{y + 1} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{x - 3}{y - 3} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3 = y + 1 \\ 5x - 15 = y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -2 \\ 5x - y = 12 \end{cases} \rightarrow x = 7 \text{ e } y = 23. \text{ La fracción es } \frac{7}{23}.$$

4.56. **Un ciclista realiza un trayecto a la velocidad de 12 km/h. En cierto momento se le pincha una rueda, por lo que debe regresar andando a una velocidad de 4 km/h. Calcula a qué distancia del punto de partida se le pinchó la rueda, sabiendo que el tiempo total que invirtió entre la ida y la vuelta fue de dos horas y media.**

Sea x la distancia en kilómetros desde el punto de salida hasta el lugar donde pinchó.

Tiempo invertido en la ida: $\frac{x}{12}$

Tiempo invertido en la vuelta: $\frac{x}{4}$

$\frac{x}{12} + \frac{x}{4} = 2{,}5 \Rightarrow \frac{4x}{12} = 2{,}5 \Rightarrow x = 7{,}5$ km

4.57. **Una fábrica de perfumes dispone de 600 L de un producto *A* y de 400 L de un producto *B*. Mezclando ambos productos se obtienen esencias diferentes.**

Se quieren preparar dos clases de perfume, la primera debe llevar tres partes de *A* y una de *B*, y se venderá a 50 euros el litro, y la segunda clase debe llevar los productos *A* y *B* al 50% y se venderá a 60 euros el litro.

a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?

b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

a) x = litros que se prepararán de la primera clase, y = litros que se prepararán de la segunda.

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{4} + \dfrac{y}{2} = 600 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{2} = 400 \end{cases} \rightarrow x = 400,\ y = 600$$

b) Se obtendrá un ingreso total de $400 \cdot 50 + 600 \cdot 60 = 56\,000$ euros.

4.58. **Se quiere construir un marco rectangular para adornar una fotografía. Para ello se dispone de un listón de madera de 50 cm de longitud.**

a) Escribe la expresión algebraica que relaciona el área encerrada por el marco con la longitud de uno de sus lados.

b) Determina las dimensiones del marco si se quiere que el área sea de 156 cm^2.

a) Sean a y $25 - a$ las medidas de los dos lados del rectángulo. Área: $S = 25a - a^2$.

b) $25a - a^2 = 156$, de soluciones $a = 13$, $a = 12$. Luego las dimensiones serán 12 y 13 cm.

4.59. **En un hotel turístico tienen un total de 36 habitaciones con 60 camas. Sólo existen habitaciones individuales y dobles. Calcula el número de habitaciones de cada tipo que hay.**

Sea x el número de habitaciones individuales e y el de dobles.

$$\begin{cases} x + y = 36 \\ x + 2y = 60 \end{cases} \rightarrow x = 12,\ y = 24.$$

4.60. **Un joyero compra dos anillos de oro por un total de 825 euros y los vende por 863,75. Calcula cuánto pagó por cada anillo si en la venta del primero ganó un 15% y en la del segundo perdió un 5%.**

Euros del primer anillo, x. Euros del segundo anillo, y.

$$\begin{cases} x + y = 825 \\ 1{,}15x + 0{,}95y = 863{,}75 \end{cases} \rightarrow x = 400 \text{ e } y = 425.$$

4.61. **En una tienda de regalos se adquiere un libro y una pulsera. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 35 euros, pero el dependiente informa al cliente de que a los libros se les aplica una rebaja del 6%, y a las pulseras, una rebaja del 12%, por lo que en realidad debe pagar 31,40 euros. ¿Qué precio marcaban el libro y la pulsera? ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?**

Sea x el precio inicial del libro e y el de la pulsera.

$$\begin{cases} 0{,}94x + 0{,}88y = 31{,}4 \\ x + y = 35 \end{cases} \rightarrow x = 10,\quad y = 25$$

Los productos marcaban 10 € el libro y 25 € la pulsera. Finalmente, 9,40 € y 22 €, respectivamente.

4.62. Un coche sale de un punto *A* a una velocidad de 90 km/h. En el mismo instante, otro coche sale a su encuentro desde un punto *B* situado a 10 km detrás de *A* y a una velocidad de 115 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará en darle alcance?

El primer coche recorre x km a una velocidad de 90 km/h. El 2.º coche, $x + 10$ km a 115 km/h.

El tiempo que están circulando es el mismo $\Rightarrow \dfrac{x}{90} = \dfrac{x + 10}{115}$, luego $x = 36$ km.

El tiempo que tarda en dar alcance el segundo coche al primero es $\dfrac{36}{90} = 0{,}4$ h $= 24$ min.

4.63. Un coche sale de *A* en dirección a *B* a una velocidad de 80 km/h. Tres minutos después, otro coche sale de *B* en dirección a *A* a una velocidad de 100 km/h. Calcula el punto de encuentro de los dos coches si *A* y *B* distan 22 km.

El primer coche está circulando durante $\dfrac{x}{80}$. El segundo coche está circulando durante $\dfrac{22 - x}{100}$.

El segundo sale 3 minutos después: $\dfrac{x}{80} = \dfrac{22 - x}{100} + \dfrac{3}{60} \rightarrow x = 12$. Se encuentran a 12 km de *A*.

4.64. El área de un rectángulo es de 35 unidades cuadradas. Si se aumenta un lado en 2 unidades y se disminuye el otro en 3 unidades, el área disminuye en 17 unidades cuadradas. Halla las dimensiones del rectángulo inicial.

Dimensiones iniciales: x, y

$$\begin{cases} xy = 35 \\ (x+2)(y-3) = 35 - 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 35 \\ -3x + 2y = -11 \end{cases} \Rightarrow x\left(\frac{-11 + 3x}{2}\right) = 35 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 70 = 0 \rightarrow x = 7, y = 5;$$

$x = \dfrac{-10}{3}$, que no es válida.

4.65. Un técnico informático espera obtener 360 euros por la reparación de varios equipos. El técnico se da cuenta de que cuatro ordenadores no tienen posible reparación y, para obtener el mismo beneficio, aumenta en 4,50 euros el precio que va a cobrar por un equipo reparado. ¿Cuántos ordenadores tenía al principio? ¿A qué precio cobrará finalmente cada reparación?

En principio, debe reparar x ordenadores. Por cada uno cobrará $\dfrac{360}{x}$ €.

$$\left(\frac{360}{x} + 4{,}5\right)(x - 4) = 360 \Rightarrow 360 - \frac{1440}{x} + 4{,}5x - 18 = 360 \Rightarrow 4{,}5x^2 - 18x - 1440 = 0 \Rightarrow x = 20,\ x = -16$$

(sin sentido). En principio, tenía 20 ordenadores para reparar.

4.66. (PAU) Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20% del total, Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas.

Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

Sea x el número de panfletos repartidos por Julia; y, los repartidos por Clara, y z, por Miguel.

$$\begin{cases} y = 0{,}20(x + y + z) \\ x + y = 850 \\ z = 100x \end{cases} \rightarrow x = 550,\ y = 300,\ z = 650$$

Julia recibe $550 \cdot 0{,}01 = 5{,}50$ €; Clara, 3 €, y Miguel, 6,50 €.

4.67. (PAU) A primera hora de la mañana, en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10, 20 y 50 euros) con un valor total de 16 000 euros. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 euros son necesarios 4 de 20, plantea un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvelo por el método de Gauss.

Sea x el número de billetes de 10 €, y el de 20 € y z el de 50 €.

$$\begin{cases} z + y + z = 800 \\ 10x + 20y + 50z = 16\,000 \\ 4z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 800 \\ 3y - 4z = 0 \\ 10x + 20y + 50z = 16\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 800 \\ 3y - 4z = 0 \\ 10y + 40z = 8000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 800 \\ 3y - 4z = 0 \\ 80z = 24\,000 \end{cases}$$

$z = 300$, $y = 400$, $x = 100$

4.68. (PAU) Un comercio tiene un total de 270 unidades de productos de tres tipos: A, B y C. Del tipo A tiene 30 unidades menos que de la totalidad de B más C, y del tipo C tiene el 35% de la suma de A más B. ¿Cuántos productos de cada tipo hay en el comercio?

$$\begin{cases} A + B + C = 270 \\ A = B + C - 30 \\ C = 0{,}35(A + B) \end{cases}, \text{ cuya solución es } A = 120,\ B = 80 \text{ y } C = 70.$$

PROFUNDIZACIÓN

4.69. Un globo que posee un pequeño motor realiza un viaje desde el punto A hasta el punto B, ida y vuelta. Gracias al motor, el globo adquiere una velocidad de 38 km/h. Supongamos, sin embargo, que el viento sopla de forma constante, y siempre en la dirección de A hacia B, y que, por tanto, la velocidad se modifica. La distancia que separa los puntos es de 50 km.

a) Calcula la duración total del viaje en función de la velocidad con la que sopla el viento en la dirección dada.

b) Calcula la velocidad del viento sabiendo que la duración total del viaje ha sido de 195 minutos.

Sea x la velocidad del viento en km/h.

a) Tiempo invertido en la ida:

$$t_1 = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \frac{50}{38 + x}, \text{ y en la vuelta: } t_2 = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \frac{50}{38 - x}$$

$$t = \frac{50}{38 + x} + \frac{50}{38 - x} = \frac{3800}{1444 - x^2}$$

b) $3{,}25 = \dfrac{3800}{1444 - x^2} \Rightarrow x = \sqrt{1444 - \dfrac{3800}{3{,}25}} \approx 16{,}6$ km/h

$$t_1 = \frac{50}{38 + x} = \frac{50}{38 + 16{,}6} = 0{,}92 \text{ h} \approx 55 \text{ min}$$

$$t_2 = \frac{50}{38 - x} = \frac{50}{38 - 16{,}6} = 2{,}34 \text{ h} \approx 140 \text{ min}$$

4.70. Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2 - 4x - 4 = 0$ con las de la ecuación $-4x^2 - 4x + 3 = 0$.

a) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + 2 = 0$ son inversas de las de la ecuación $2x^2 + bx + 1 = 0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

Las soluciones de la primera son $x = 2$ y $x = \dfrac{-2}{3}$, y las de la segunda, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = \dfrac{-3}{2}$. Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

a) Las soluciones de la primera son $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{2}$, y las de la segunda, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{4}$, que son

inversas porque $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \dfrac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \dfrac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \dfrac{8}{8} = 1.$

De la misma forma: $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \dfrac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \dfrac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \dfrac{8}{8} = 1.$

b) En efecto, son inversas porque $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \dfrac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4ac} = \dfrac{4ac}{4ac} = 1.$

Y de la misma forma con la otra pareja de soluciones.

4.71. Se sabe que el polinomio $P(x) = 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 12x + 9$ es un cuadrado perfecto.

a) ¿De qué grado deberá ser el polinomio $\sqrt{P(x)}$?

b) Calcula $\sqrt{P(x)}$ sabiendo que sus términos independiente y principal son ambos positivos.

a) $\sqrt{P(x)} = ax^2 + bx + c$ (2.º grado, para que al elevar al cuadrado resulte de 4.º grado).

b) $(ax^2 + bx + c)^2 = 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 12x + 9$, luego desarrollando e igualando términos de grados iguales: $a = 2$, $b = -2$, $c = 3 \Rightarrow \sqrt{P(x)} = 2x^2 - 2x + 3$.

4.72. Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, cuyas soluciones son x_1 y x_2, calcula, en función de a, b y c, el valor de la suma de las inversas de sus raíces.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = -\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}$$

4.73. (PAU) Dos ciclistas corren por un velódromo a velocidades constantes. Cuando corren en sentido opuesto se encuentran cada 10 segundos, mientras que cuando van en el mismo sentido, un ciclista alcanza a otro cada 170 segundos.

Sabiendo que la pista tiene una longitud de 170 metros, ¿cuál es la velocidad de cada ciclista?

Sea x la velocidad del primer ciclista e y la del 2.º: $\begin{cases} 10(x + y) = 170 \\ 170(x - y) = 170 \end{cases} \Rightarrow x = 9$ m/s e $y = 8$ m/s.

4.74. Las funciones de demanda y de oferta correspondientes al mercado del último juego de estrategia, en cierto momento, son:

$$x_D = -\frac{1}{20}p_x^2 + \frac{1}{2}p_x + 180 \qquad x_O = \frac{13}{120}p_x^2 - 12p_x + A$$

Siendo A un parámetro desconocido y $40 \leqslant p_x \leqslant 100$ euros.

Calcula el valor de A para que el equilibrio del mercado se alcance para 100 unidades demandadas. En este caso, halla la cantidad ofertada y el precio.

$x_D = -\frac{1}{20}p_x^2 + \frac{1}{2}p_x + 180 = 100 \Rightarrow -\frac{1}{20}p_x^2 + \frac{1}{2}p_x + 80 = 0$, de solución válida $p_x = 45{,}31$, que es el precio del producto.

$x_O = \frac{13}{120}p_x^2 - 12p_x + A \Rightarrow A = 100 - \frac{13}{120} \cdot 45{,}31^2 + 12 \cdot 45{,}31 = 421{,}31$

4.75. La tabla muestra la oferta y la demanda del mercado de teléfonos móviles de cierto modelo para algunos valores del precio.

a) Calcula las expresiones de las funciones de oferta y demanda sabiendo que son polinomios de segundo grado con la indeterminada p_x variando entre 150 y 200 euros.

b) Calcula el punto de equilibrio del mercado.

p_x	Unidades ofertadas	Unidades demandadas
150	725	1400
175	800	1100
200	1200	650

a) Función de oferta: $x_O = ap_x^2 + bp_x + c$

$$\begin{cases} 150^2a + 150b + c = 725 \\ 175^2a + 175b + c = 800 \\ 200^2a + 200b + c = 1200 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{13}{50}\ b = -\frac{163}{2}\ c = 7100 \Rightarrow x_O = \frac{13}{50}p_x^2 - \frac{163}{2}p_x + 7100$$

Función de demanda: $x_D = ap_x^2 + bp_x + c$

$$\begin{cases} 150^2a + 150b + c = 1400 \\ 175^2a + 175b + c = 1100 \\ 200^2a + 200b + c = 650 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{25}\quad b = 27\quad c = 50 \Rightarrow x_D = -\frac{3}{25}p_x^2 + 27p_x + 50$$

b) Punto de equilibrio: $\begin{cases} x_O = \frac{13}{50}p_x^2 - \frac{163}{2}p_x + 7100 \\ x_D = -\frac{3}{25}p_x^2 + 27p_x + 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_x = 100 \text{ solución no válida} \\ p_x \approx 186\quad x_O = x_D \approx 929 \end{cases}$

4.76. Calcula el valor de k para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones. Para ese valor, escribe dichas soluciones.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = k - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ 0z = k - 18 \end{cases}$$

Para $k = 18$, se obtiene la ecuación $0 \cdot z = 0$, que se verifica para cualquier valor de z.

Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por las fórmulas $\begin{cases} x = 4 + 2\lambda - 2(2 - 2\lambda) = 6\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

4.77. Calcula los valores de k para que el siguiente sistema sea incompatible.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ -8y + 10z = k - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ 0z = k - 13 \end{cases}$$

Cuando $k \neq 13$, la última ecuación no tiene sentido y, por tanto, el sistema no tiene solución.

4.78. Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ 2x - 2y - z + w = 5 \\ 3x + y - 2z - 4w = 16 \\ 3x - 3z - 3w = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ -8y + 4z - 10w = -20 \\ -9y + 3z - 9w = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -3z - 45w = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -66w = 0 \end{cases} \Rightarrow w = 0,\ z = -1,\ y = 2,\ x = 4$$

4.79. (PAU) Dado el sistema lineal de ecuaciones dependientes del parámetro real a: $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

a) Discute el sistema para los distintos valores de a.

b) Resuelve el sistema para $a = 3$ y $a = 1$.

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + az = 2 \\ (a - 1)y = 0 \end{cases}$

Si $a = 1$, la tercera ecuación es $0 = 0$, luego es un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Si $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado con una única solución.

b) $a = 3$: $y = 0$, $z = \dfrac{2}{3}$, $x = \dfrac{1}{3}$

$a = 1$: $y = \lambda$, $z = 2 - 2\lambda$, $x = 1 - \lambda - 2 + 2\lambda = -1 + \lambda$