3 Polinomios y fracciones algebráicas

ACTIVIDADES INICIALES

3.I. Para cada uno de los siguientes monomios, indica las variables, el grado y el coeficiente, y calcula el valor numérico de los mismos para los valores indicados de las variables.

a) $A(x) = -\frac{3}{2}x^2$ **para** $x = -\frac{2}{3}$

b) $B(x, y) = -3x^2y$ **para** $x = -\frac{1}{2}$, $y = -2$

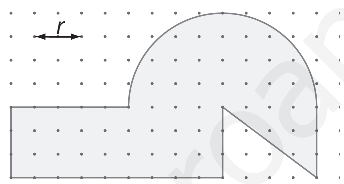
a) Es un monomio con una única indeterminada (x). El grado es 2, y el coeficiente, $-\frac{3}{2}$

Para $x = -\frac{2}{3}$, el valor numérico de A es $-\frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = -\frac{2}{3}$.

b) Es un monomio con dos indeterminadas (x e y). El grado es 3, y el coeficiente, -3.

Para $x = -\frac{1}{2}$ $y = -2$, el valor numérico de B es $-3\left(-\frac{1}{2}\right)^2(-2) = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2}$.

3.II. Analiza la expresión algebraica que da el valor del perímetro de la figura en función de r.



$$P = 4{,}5r + 1{,}5r + 2{,}5r + 2\pi r + 1{,}5r + \sqrt{2^2 + 1{,}5^2}r + 1{,}5r = (14 + 2\pi)r$$

Se trata de un monomio de una indeterminada (r), de primer grado 2 y de coeficiente $14 + 2\pi$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

3.1. Para cada polinomio, indica su grado y sus coeficientes, calcula su valor numérico en $x = -3$ e intenta encontrar por tanteo alguna raíz.

a) $P(x) = -2x^4 + 32$

b) $Q(x) = x^3 + x + 30$

a) Cuarto grado. Coeficiente de grado 4: -2; término independiente: 32. $P(-3) = -130$ y $P(-2) = 0$, luego -2 es una raíz.

b) Tercer grado. Coeficiente de primer y tercer grado: 1; término independiente: 30. $Q(-3) = 0$, luego -3 es una raíz. $Q(-2) = 20$. No hay más raices reales.

3.2. Comprueba si los valores $x = -2$, $x = 2$, $x = -1$ y $x = 1$ son raíces del polinomio $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

$P(-2) = -8 + 8 + 2 - 2 = 0$, luego $x = -2$ es raíz.

$P(2) = 8 + 8 - 2 - 2 = 12$, luego $x = 2$ no es raíz.

$P(-1) = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$, luego $x = -1$ es raíz.

$P(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$, luego $x = 1$ es raíz.

3.3. Halla las raíces del polinomio $Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

$Q(0{,}5) = 0 = Q(-3)$, luego ésas son las raíces.

3.4. Dados los polinomios $P(x) = -x^3 + x^2 - 3x - 1$, $Q(x) = -3x^3 - 6x + 3$ y $R(x) = x^3 + 2x^2$, realiza las siguientes operaciones.

a) $P(x) - Q(x) + 2R(x)$

b) $-P(x) - 2Q(x) + 4R(x)$

c) $2[P(x) - 3Q(x)] + \frac{1}{2}R(x)$

d) $\frac{3P(x) - 2R(x)}{5} + Q(x)$

a) $4x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

b) $11x^3 + 7x^2 + 15x - 5$

c) $\frac{33}{2}x^3 + 3x^2 + 30x - 20$

d) $-4x^3 - \frac{x^2}{5} - \frac{39x}{5} + \frac{12}{5}$

3.5. Los ingresos y costes de una determinada operación comercial vienen dados por los siguientes polinomios, en los que x es el número de unidades producidas.

$$I(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 \qquad C(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20$$

a) Calcula la expresión que determina los beneficios.

b) Calcula los beneficios en el caso de que los costes se reduzcan a la mitad.

a) $B(x) = I(x) - C(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{10}x^2 + 2x + 20\right) = -\frac{3}{20}x^2 + 4x + 30$

b) $B(x) = I(x) - \frac{C(x)}{2} = -\frac{1}{4}x^2 + 6x + 50 - \left(-\frac{1}{20}x^2 + x + 10\right) = -\frac{1}{5}x^2 + 5x + 40$

3.6. Realiza los siguientes productos de polinomios.

a) $(2x^2 - 3x + 5) \cdot (-3x + 2)$

b) $(-x^3 - x^2 + 2) \cdot (-3x^2 - 4)$

a) $-6x^3 + 4x^2 + 9x^2 - 6x - 15x + 10 = -6x^3 + 13x^2 - 21x + 10$

b) $3x^5 + 4x^3 - 3x^4 - 4x^2 + 6x^2 + 8 = 3x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 8$

3.7. Escribe el desarrollo del cubo de una resta $(a - b)^3$.

$$(a - b) \cdot (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = a^3 - 3a^2b + 3b^2a - b^3$$

3.8. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $2x - 3x \cdot (x^2 - 5) + (2 - x) \cdot (-3x^2 + 6)$

b) $2 \cdot (3x - 1)^2 + 5 \cdot (3x - 1) \cdot (3x + 1) - 4x \cdot (3x + 2)^2$

a) $2x - 3x^3 + 15x - 6x^2 + 12 + 3x^3 - 6x = -6x^2 + 11x + 12$

b) $18x^2 + 2 - 12x + 45x^2 - 5 - 36x^3 - 16x - 48x^2 = -36x^3 + 15x^2 - 28x - 3$

3.9. Extrae dos veces factor común en la expresión: $2xa - 4xb - 3ya + 6yb$.

$$2x(a - 2b) - 3y(a - 2b) = (a - 2b)(2x - 3y)$$

3.10. Realiza las siguientes divisiones de monomios.

a) $\frac{12x^4}{-3x^2}$

b) $\frac{-54x^2y^4z^3}{18x^2y^2z^3}$

c) $\frac{18x^5y^2z^4}{6x^2y^2z^3}$

d) $\frac{8a^3d^2}{2b^3c^2d^3}$

a) $-4x^2$

b) $-\frac{54}{18} \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{y^4}{y^2} \cdot \frac{z^3}{z^3} = -3y^2$

c) $\frac{18}{6} \cdot \frac{x^5}{x^2} \cdot \frac{y^2}{y^2} \cdot \frac{z^4}{z^3} = 3x^2z$

d) $\frac{4a^3}{b^3c^2d}$

3.11. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (3x^2 + 2)$

b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x + 2)$

c) $\left(x^6 + \frac{1}{2}x^4 + x^2 + 4\right) : (2x^3 + x - 4)$

d) $(4x^3 + 2x^2 - 3x + 5) : (2x^2 - 3x + 2)$

a) Cociente: $x + \frac{2}{3}$ Resto: $-x - \frac{19}{3}$

b) Cociente: $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$ Resto: 46

c) Cociente: $\frac{x^3}{2} + 1$ Resto: $x^2 - x + 8$

d) Cociente: $2x + 4$ Resto: $5x - 3$

3.12. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $(2x^5 - x^3 + 2x - 1) : (x - 3)$

b) $(x^5 - x + 2) : \left(x + \frac{1}{4}\right)$

a) Cociente: $2x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 51x + 155$ Resto: 464

b) Cociente: $x^4 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{16} - \frac{x}{64} - \frac{255}{256}$ Resto: $\frac{2303}{1024}$

3.13. Calcula el cociente y el resto de la siguiente división: $(3x^3 + 2x^2 + 3x - 6) : (3x + 2)$

a) Utilizando el algoritmo de la división.

b) Dividiendo previamente dividendo y divisor entre 3 y utilizando la regla de Ruffini.

a) Cociente: $x^2 + 1$. Resto: -8

b) $\frac{3x^3 + 2x^2 + 3x - 6}{3x + 2} = \frac{x^3 + \frac{2}{3}x^2 + x - 2}{x + \frac{2}{3}}$. Cociente: $x^2 + 1$. Resto: -8

3.14. Con ayuda de la regla de Ruffini, calcula el valor numérico del siguiente polinomio para $x = 2{,}05$.

$$P(x) = 1{,}25x^3 - 0{,}75x^2 + 0{,}5x - 1$$

$$P(2{,}05) = 7{,}642$$

3.15. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

El resto de dividir $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ por $x - 2$ es $k + 8$. Por tanto: $k + 8 = 0$ y $k = -8$.

3.16. Halla el valor de m para que sea exacta la siguiente división: $(2x^4 + 8x^3 - 20x^2 - 24x + 16m) : (x - 2)$

Aplicando la regla de Ruffini a la división indicada, se obtiene de resto: $R = 16m - 32$.
Como este resto debe ser nulo, $m = 2$.

3.17. Calcula el valor de k para que al dividir $x^5 + kx^3 - 2$ entre $(x + 3)$ se obtenga de resto -272.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & k & 0 & 0 & -2 \\ -3 & & -3 & 9 & -3k - 27 & 9k + 81 & -27k - 243 \\ \hline & 1 & -3 & k + 9 & -3k - 27 & 9k + 81 & -27k - 245 \end{array}$$

Entonces, $-27k - 245 = -272$, por lo que $k = 1$.

3.18. (TIC) Factoriza los siguientes polinomios e indica cuáles son sus raíces.

a) $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

b) $9x^3 + 12x^2 + 4x$

c) $x^6 - 16x^2$

d) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

e) $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

f) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

g) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

h) $x^6 - 9x^4$

a) $(x-1)^2(x+1)(x-3)$ $\quad x = 1$ (doble), $x = -1$, $x = 3$

b) $x(3x + 2)^2$ $\quad x = 0$, $x = -\dfrac{2}{3}$ (doble)

c) $x(x-2)(x+2)(x^2+4)$ $\quad x = 0$ (doble), $x = 2$, $x = -2$

d) $(x-2)(x+1)(x-3)$ $\quad x = 1$, $x = -2$, $x = -\dfrac{3}{2}$

e) $(x+1)(2x+1)(3x+1)$ $\quad x = -1$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = -\dfrac{1}{3}$

f) $(x-1)(x+2)(2x+3)$ $\quad x = -2$, $x = -\dfrac{3}{2}$, $x = 1$

g) $(x-1)(x-2)(x^2+1)$ $\quad x = 1$, $x = 2$

h) $x^4(x-3)(x+3)$ $\quad x = 0$ (cuarta), $x = 3$, $x = -3$

3.19. (TIC) Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$, $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

b) $P(x) = x$, $Q(x) = x^2 - x$, $R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x^2 + 2x + 1$, $R(x) = x - 3$

a) $P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x-3)$, $Q(x) = (x+1)(x-1)(x+3)$

m.c.d.$\{P(x), Q(x)\} = (x-1)(x+1)(x-3)$. m.c.m.$\{P(x), Q(x)\} = (x-1)^2(x+1)^2(x-3)$

b) $P(x) = x$, $Q(x) = x(x-1)$, $R(x) = x(x-1)^2$

m.c.d.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = x$. m.c.m.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = x(x-1)^2$

c) $P(x) = (x-1)(x+1)$, $Q(x) = (x+1)^2$, $R(x) = x-3$

m.c.d.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = 1$. m.c.m.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = (x+1)^2(x-3)(x-1)$

3.20. Comprueba si las siguientes fracciones algebraicas son equivalentes.

$$A(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 5x - 3} \qquad B(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x + 2}{x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x - 3x - 3}$$

Factorizando $B(x) = \dfrac{(x + 1)(x^3 + 2)}{(x + 1)(x^2 + 5x - 3)}$ y multiplicando en cruz se ve que son equivalentes.

3.21*. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas y halla su valor numérico para $x = 2$.

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$

b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

a) $\dfrac{(x+3)(x-1)^2(2x-1)}{(x-1)(x+3)(2x-1)} = x - 1$. Para $x = 2$ el valor numérico es 1

b) $\dfrac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-2)^2} = \dfrac{x+3}{x-2}$. Para $x = 2$ el valor numérico es indeterminado.

3.22. Calcula y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{a^2}{a \cdot b} + \dfrac{a \cdot b^2}{b^4} - a$

b) $\dfrac{6}{2 + x} - \dfrac{4}{2 - x} + \dfrac{16}{x^2 - 4}$

c) $(x^2 - y^2) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

d) $\dfrac{a + x}{x^2 - a^2} \cdot \dfrac{x - a}{x + a}$

a) $\dfrac{a^2b^3 + a^2b^2 - a^2b^4}{ab^4} = \dfrac{a^2b^2(b + 1 - b^2)}{ab^4} = \dfrac{ab + a - ab^2}{b^2}$

b) $\dfrac{6x - 12 + 4x + 8 + 16}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{10x + 12}{x^2 - 4}$

c) $\dfrac{(x-y)(x+y)}{\dfrac{x+y}{xy}} = \dfrac{xy\,(x-y)(x+y)}{x+y} = x^2y - xy^2$

d) $\dfrac{(a + x)(x - a)}{(x - a)(x + a)^2} = \dfrac{1}{x+a}$

3.23. (PAU) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas y a continuación multiplícalas.

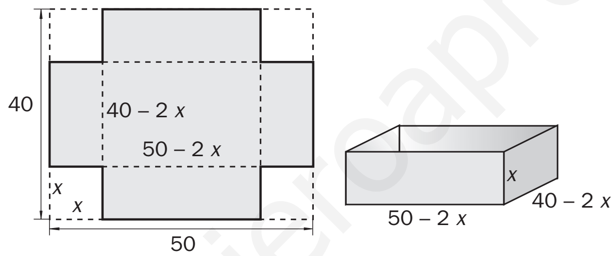
$$A(x) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} \qquad B(x) = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$

$$A(x) = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{x+1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2x+1}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}$$

$$B(x) = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{\cfrac{x+1}{x}}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{x+1}} = 1 + \cfrac{x}{\cfrac{x+1+x^2}{x+1}} = 1 + \frac{x^2+x}{x+1+x^2} = \frac{2x+1+2x^2}{x+1+x^2}$$

$$A(x) \cdot B(x) = \frac{6x^3 + 10x^2 + 7x + 2}{2x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

3.24. Con una cartulina rectangular de 50 × 40 cm se quiere construir una caja sin tapa recortando cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas. Escribe las expresiones algebraicas de la superficie y el volumen de la caja en función del lado del cuadrado.



$$V(x) = (50 - 2x)(40 - 2x)x = 4x^3 - 180x^2 + 2000x,\ S(x) = 40 \cdot 50 - 4x^2 = 2000 - 4x^2$$

3.25. Un investigador social propone como indicador del bienestar de un país la media ponderada de tres porcentajes: el de afiliación a la seguridad social (x), el de población con renta superior a la línea de pobreza (y) y el de población activa con trabajo (z). Los pesos asignados a dichos porcentajes son 1 : 2 : 2. Escribe la expresión algebraica del indicador y calcula su valor para $x = 65\%$, $y = 80\%$ y $z = 92\%$.

$$I(x, y, z) = \frac{x + 2y + 2z}{5}; \qquad I(65, 80, 92) = 81{,}8\%$$

3.26. El negocio de una empresa que fabrica memorias para ordenador tiene las siguientes características:

- Costes fijos: 2200 euros
- Costes por unidad: 7 euros
- Precio de venta por unidad: 12 euros

Escribe las expresiones algebraicas que permiten calcular los beneficios en función del número de unidades producidas, y aplícalas para el caso concreto de que se fabriquen 650 memorias en cada uno de los siguientes casos.

a) Se consigue vender toda la producción.

b) Queda sin vender el 12% de las memorias fabricadas.

	Costes $C(x)$	Ingresos $I(x)$	Beneficios $B(x)$	$B(650)$
a)	$2200 + 7x$	$12x$	$5x - 2200$	1050
b)	$2200 + 7x$	$10{,}56x$	$3{,}56x - 2200$	114

EJERCICIOS

Polinomios

3.27. Identifica el número de variables, el grado, los coeficientes y el término independiente de los siguientes polinomios.

a) $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

b) $3xy^2z^3 - 2x^2y^3z^2$

c) $2y^2 + 3y + 4$

d) $4ab - 3cd^2 + 2d + 7$

a) Una variable, x. Tercer grado: coeficiente de mayor grado 2, de segundo grado 3, de primer grado -4 y término independiente 5.

b) Tres variables, x, y y z. Séptimo grado. Coeficiente de mayor grado -2, coeficiente de sexto grado 3.

c) Una variable, y. Segundo grado: coeficiente de mayor grado 2, de primer grado 3 y término independiente 4.

d) Cuatro variables, a, b, c y d. Tercer grado: coeficiente de mayor grado -3, de segundo grado 4, de primer grado 2 y término independiente 7.

3.28. Calcula el valor numérico en $x = 2$ y $x = -0{,}15$ de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3$

b) $Q(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - 2$

a) $P(2) = 21$, $P(-0{,}15) = -2{,}95$

b) $Q(2) = \frac{23}{30}$, $Q(-0{,}15) = -1{,}9975$

3.29. Halla los coeficientes de un polinomio de segundo grado $P(x)$ tal que $P(1) = 6$, $P(2) = 13$ y $P(3) = 24$.

$P(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $a + b + c = 6$, $4a + 2b + c = 13$ y $9a + 3b + c = 24$.
Resolviendo el sistema, se tiene que $P(x) = 2x^2 + x + 3$.

Operaciones con polinomios

3.30. Simplifica los siguientes polinomios.

a) $8 - 2(2 - 3x)^2$

b) $(x - 2)(x + 3)(x - 1)$

c) $4(2 - 5x)^2 - 16(1 - 5x)$

d) $-2(x + 1)(x + 2)^2$

a) $-18x^2 + 24x$

b) $x^3 - 7x + 6$

c) $100x^2$

d) $-2x^3 - 10x^2 - 16x - 8$

3.31. Dados los polinomios $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$, $Q(x) = -x^3 - x^2 + 2$ y $R(x) = -3x^2 + 2x - 5$, calcula:

a) $P(x) + Q(x) + R(x)$

b) $-2P(x) - 3Q(x) - 3R(x)$

a) $x^3 - 7x + x$

b) $-x^3 + 18x^2 - 4x + 3$

3.32. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(3x - 2)^2 - 3(3x + 2)^2 - 2(3x - 2)(3x + 2)$

b) $(3x + 2)^2 + 2(2x - 3)^2 - (2x - 5)(x - 5)$

c) $(2x^2 - 2x - 1)(3x^2 - 2x) - 3x$

d) $(2x^2 - 3x + 2)(-3x^2 + x + 1) + (6x - 10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{5}\right) + \frac{6}{25}$

a) $-27x^2 - 60x + 4$

b) $15x^2 + 3x - 3$

c) $6x^4 - 10x^3 + x^2 - x$

d) $x^3 - 7x^2 - x + 2$

e) $x^3 - \frac{9}{10}x^2 + \frac{4}{15}x$

3.33. Desarrolla estas potencias empleando las identidades notables.

a) $(2x + 3)^2$

b) $(xyz^3 - x^2y)^2$

c) $(2z + 3xy)(3xy - 2z)$

d) $(3x + 2xy)^4$

a) $4x^2 + 12x + 9$

b) $x^2y^2z^6 - 2x^3y^2z^3 + x^4y^2$

c) $9x^2y^2 - 4z^2$

d) $16x^4y^4 + 96x^4y^3 + 216x^4y^2 + 216x^4y + 81x^4$

3.34. Emplea las identidades notables para escribir estas expresiones en forma de producto.

a) $x^2 + 4x + 4$

b) $4x^2 - 25$

c) $9x^2 - 12xy + 4y^2$

d) $x^2 - 5$

a) $(x + 2)^2$

b) $(2x - 5)(2x + 5)$

c) $(3x - 2y)^2$

d) $\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right)$

3.35. Realiza las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(3x^3 - 4x^2 - 2x + 3) : (x^2 - 2x + 3)$

b) $(6x^4 + 11x^3 - 17x^2 + 11x - 3) : (2x^2 + 5x - 3)$

c) $(6x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 6x - 6) : (3x^2 + 2x + 1)$

d) $\left(2x^4 + \frac{11}{2}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{19}{4}x + \frac{3}{4}\right) : (x^2 + 3x - 1)$

a) Cociente: $3x + 2$ Resto: $-7x - 3$

b) Cociente: $3x^2 - 2x + 1$ Resto: 0

c) Cociente: $2x^2 + x - 3$ Resto: $-x - 3$

d) Cociente: $2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ Resto: $2x + \frac{3}{2}$

3.36. Utiliza la regla de Ruffini para hacer las siguientes divisiones.

a) $(x^7 - 36x) : (x - 2)$

b) $(2x^4 - 2) : (x + 1)$

a)

	1	0	0	0	0	0	−36	0
2		2	4	8	16	32	64	56
	1	2	4	8	16	32	28	56

Cociente: $x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 32x + 28$ Resto: 56

b)

	2	0	0	0	−2
−1		−2	2	−2	2
	2	−2	2	−2	0

Cociente: $2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$ Resto: 0

3.37. Realiza las siguientes divisiones por Ruffini.

a) $(2x^4 - x^3 - x + 4) : (x - 3)$

b) $(-2x^4 - 3x^2 + 5x + 3) : (x + 2)$

c) $(-3x^3 + 2x^2 + x - 3) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $(2x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2) : (-x + 3)$

a) Cociente: $2x^3 + 5x^2 + 15x + 44$ Resto: 136

b) Cociente: $-2x^3 + 4x^2 - 11x + 27$ Resto: -51

c) Cociente: $-3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}$ Resto: $-\frac{21}{8}$

d) Cociente: $-2x^3 - 8x^2 - 26x - 78$ Resto: 232

3.38. Aplicando la regla de Ruffini, halla el cociente y el resto de la siguiente división.

$$(x^8 - a^8) : (x - a)$$

Cociente: $x^7 + ax^6 + a^2x^5 + a^3x^4 + a^4x^3 + a^5x^2 + a^6x + a^7$ Resto: 0

Teoremas del resto y del factor

3.39. Sin realizar las divisiones, calcula su resto.

a) $(x^7 + x^3 - 2x + 1) : (x - 3)$

b) $(x^{12} - x^5 - x + 12) : (x + 1)$

a) $R = 3^7 + 3^3 - 6 + 1 = 2209$

b) $R = (-1)^{12} - (-1)^5 - (-1) + 12 = 15$

3.40. Sin realizar la división, comprueba que el binomio $x - 3$ es un factor del polinomio $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 8x - 6$.

El valor numérico del polinomio $P(x)$ para $x = 3$ es 0, por lo que deducimos que $x - 3$ es un factor del polinomio.

3.41. Calcula el valor de k para que el siguiente polinomio sea divisible por $x - 3$. $P(x) = 6x^5 - 44x^3 - 88x - k$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x - 3$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = 3$ sea igual a 0. $P(3) = 1458 - 1188 - 264 - k = 0$, por lo que $k = 6$.

3.42. Halla el valor de k para el que el siguiente polinomio sea divisible por $x + 2$. $P(x) = 3x^3 - kx^2 + 6k - 2$.

Dado que $P(x)$ es divisible por $x + 2$, se debe verificar que el valor numérico de $P(x)$ para $x = -2$ sea igual a 0. $P(-2) = -24 - 4k + 6k - 2 = 0$, por lo que $k = 13$.

3.43. Escribe un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- Es divisible por $x - 3$.
- Es divisible por $x + 4$.
- El valor numérico en el punto $x = -1$ es 12.

Según el teorema del factor, el polinomio debe tener como factores $x - 3$ y $x + 4$. Por tanto, la expresión del polinomio será de la forma $P(x) = k(x + 4)(x - 3)$, y como $P(-1) = 12$, tenemos que $k = -1$, luego $P(x) = -x^2 - x + 12$.

3.44. Halla un polinomio de segundo grado que verifique las tres condiciones siguientes.

- El coeficiente del término cuadrático es la unidad.
- Es divisible por $x - 1$.
- Toma el valor 24 para $x = -3$.

Ya que el coeficiente de x^2 es 1 y que el polinomio es de segundo grado y divisible por $x - 1$, tendrá la forma: $P(x) = (x - 1)(x + a)$.

Para que quede totalmente determinado, sólo es necesario calcular a.

Dado que $P(-3) = 24$, obtenemos que $a = -3$, luego $P(x) = (x - 1)(x - 3)$.

3.45. La división de $x^3 + mx + 2$ entre $x - 2$ da de resto 6. ¿Cuánto vale m? ¿Cuál es el cociente?

$2^3 + 2m + 2 = 6$, por lo que $m = -4$, y el cociente es $x^2 + 2x$.

3.46. Halla un polinomio de segundo grado $P(x)$ sabiendo que una de sus raíces es $x = 1$ y que $P(3) = 10$.

Para que $x = 1$ sea una raíz, debe ser $P(x) = (ax + b)(x - 1)$, y como $P(3) = 10$, entonces $(3a + b)(3 - 1) = 10$, luego $3a + b = 5$. Por ejemplo, $a = 1$, $b = 2$.

$$P(x) = (x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$$

3.47. Halla la expresión de todos los polinomios de segundo grado que tienen por raíces -1 y 3. Determina aquel cuyo valor numérico para $x = 5$ es 24.

$P(x) = a(x + 1)(x - 3)$

$P(5) = a \cdot 6 \cdot 2 = 24$, por lo que $a = 2$

$P(x) = 2(x + 1)(x - 3) = 2x^2 - 4x - 6$

3.48. Halla el número que hay que sumar al polinomio $x^3 + 2x^2 - 5x$ para que sea divisible por $x - 3$.

Se trata de hallar a para que $3^3 - 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + a = 0$.

Resolviendo, se tiene que $a = 6$.

3.49. Determina los coeficientes a y b para que el polinomio $x^5 + ax^3 + b$ sea divisible por $x^2 - 1$.

Como $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, el polinomio debe ser divisible por $x - 1$ y por $x + 1$, es decir:

$$1^5 + a \cdot 1^3 + b = 0 \text{ y } (-1)^5 + a \cdot (-1)^3 + b = 0 \quad \left.\begin{array}{r} a + b = -1 \\ -a + b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -1,\ b = 0$$

Factorización de polinomios

3.50. Encuentra las raíces del siguiente polinomio, teniendo en cuenta que todas ellas son números enteros.

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

$$x = 2, \quad x = -3, \quad x = 4$$

3.51. Escribe un polinomio $P(x)$ cuyas raíces sean $x = -2$, $x = 5$, $x = 3$ y $x = -1$. ¿Hay más de uno?

Por ejemplo: $P(x) = (x + 2)(x - 5)(x - 3)(x + 1)$

Sí hay más de uno, pues se puede multiplicar con constantes y cambiar las multiplicidades de los factores sin que varíen las raíces.

3.52. Factoriza los siguientes polinomios utilizando la regla de Ruffini.

a) $P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

b) $Q(x) = x^3 - 3x + 2$

c) $R(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 27x^2 - 32x + 12$

d) $S(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

a) $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 5)$

b) $Q(x) = (x - 1)^2(x + 2)$

c) $R(x) = (x - 1)^2(x + 3)(x - 2)^2$

d) $S(x) = (x + 1)^4$

3.53. Descompón en factores el siguiente polinomio:

$$P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 14x + 6.$$

$$-2(x - 3)(x - 1)^2$$

3.54. Escribe un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces:

a) 1, −2, 3 y −4 b) 1, 2 y −2 (doble) c) −1 y 1 (las dos dobles)

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

b) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)2 = x^4 + x^3 - 6x^2 - 4x + 8$

c) $(x - 1)^2(x + 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

3.55. Factoriza el polinomio $P(x) = x^3 + bx^2 - 3x$, sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces.

Como $x = 1$ es una raíz, entonces $1^3 + b \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = 0$, de donde $b = 2$ y $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$, cuya factorización es $P(x) = x(x - 1)(x + 3)$.

3.56. Factoriza los siguientes polinomios utilizando las identidades notables.

a) $4x^2 - 12x = 9$

b) $18 - 2x^2$

c) $25x^2 + 20xy + 4y^2$

d) $-4y^2 + 25x^6$

a) $(2x - 3)^2$

b) $2(3 - x)(3 + x)$

c) $(5x + 2y)^2$

d) $(5x^3 - 2y)(5x^3 + 2y)$

3.57. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $9x^2 - 12x + 4$

b) $4x^2 + 12xy + 9y^2$

c) $4x^4 - 16x^2y + 16y^2$

d) $12 - 3x^2$

e) $a^2 - (b + c)^2$

f) $4x^3 - 9y^4x$

a) $(3x - 2)^2$

b) $(2x + 3y)^2$

c) $(2x - 4y)^2$

d) $3(2 - x)(2 + x)$

e) $(a - b - c)(a + b + c)$

f) $(2x - 3y^2)(2x + 3y^2)$

3.58. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $x^3 + x^2 - 5x + 3$

c) $2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 3$

d) $x^4 - 4x^2$

e) $\frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{16}$

f) $x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$

a) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$

b) $(x - 1)^2(x + 3)$

c) $(x + 1)^2(2x - 3)(x - 1)$

d) $x^2(x - 2)(x + 2)$

e) $\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$

f) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$

3.59. Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^2 + x - 2$, $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $P(x) = 2x^2 - 2$, $Q(x) = 4x - 4$

c) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = 2x + 2$ y $R(x) = 3x^2 - 3$

d) $P(x) = x^2(x - 2)$, $Q(x) = x(x^2 - 4)$ y $R(x) = x^3 - 2x^2$

e) $P(x) = x^2 + 5x + 6$, $Q(x) = x^2 - 4$ y $R(x) = x + 2$

a) m.c.d. $= x - 1$ m.c.m. $= (x - 1)(x + 2)(x + 3)$

b) m.c.d. $= 2x - 2$ m.c.m. $= 4(x - 1)(x + 1)$

c) m.c.d. $= 1$ m.c.m. $= 6(x - 1)(x + 1)$

d) m.c.d. $= x(x - 2)$ m.c.m. $= x^2(x - 2)(x + 2)$

e) m.c.d. $= 1$ m.c.m. $= (x - 3)(x + 2)(x - 2)$

3.60. Dado el polinomio: $P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 9x^2 - 8x + a$:

a) Calcula el valor de a para que $P(-1) = -2$.

b) Para el valor de a hallado, descompón el polinomio como producto de factores de primer grado.

c) Calcula las raíces enteras de $P(x)$.

a) $P(-1) = 2 - 9 + 9 + 8 + a = -2$, luego $a = -12$

b) $P = (x - 1)(x + 2)^2(2x + 3)$

c) $x = 1$, $x = -2$ y $x = -\frac{3}{2}$ (que no es entera).

Fracciones algebraicas

3.61. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{7x^2}{14x^2 - 21x}$

b) $\dfrac{12 - 3x}{x - 4}$

c) $\dfrac{3x^2 - x}{x^3 + 2x}$

d) $\dfrac{3x^2 - 12}{x + 2}$

a) $\dfrac{7x^2}{7x(2x - 3)} = \dfrac{x}{2x - 3}$

b) $\dfrac{-3(x - 4)}{x - 4} = -3$

c) $\dfrac{x(3x - 1)}{x(x^2 + 2)} = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 2}$

d) $\dfrac{3(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = 3(x - 2)$

3.62. (PAU) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $\dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^2 + x - 6}$

c) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

d) $\dfrac{-2x^4 + 5x^3 - 5x + 2}{2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4}$

e) $\dfrac{x^4 - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$

f) $\dfrac{x^4 + 10x^3 + 21x^2 - 40x - 100}{x^4 + 3x - 10}$

a) $\dfrac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 3)} = \dfrac{x + 2}{x + 3}$

b) $\dfrac{(x + 3)(x - 2)^2}{(x + 3)(x - 2)} = x - 2$

c) $\dfrac{(x - 1)(x - 2)^2}{(x + 3)(x - 2)^2} = \dfrac{x - 1}{x + 3}$

d) $\dfrac{-(x + 1)(x - 1)(x - 2)(2x - 1)}{(x - 1)(x + 2)^2(2x + 1)} = -\dfrac{(x + 1)(x - 2)(2x - 1)}{(x + 2)^2(2x + 1)}$

e) $\dfrac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)^2(x^2 + 1)} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

f) $\dfrac{(x + 2)(x - 2)(x + 5)^2}{(x + 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 5)} = \dfrac{(x - 2)(x + 5)^2}{(x^3 - 2x^2 + 4x - 5)}$

3.63. Halla, simplificando el resultado:

a) $x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

b) $2x - \dfrac{2x^2 - 1}{2 + x}$

a) $\dfrac{x^2}{x - 1}$

b) $\dfrac{4x + 1}{2 + x}$

3.64. Halla en cada caso el polinomio $P(x)$ para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\dfrac{x+2}{2x-5} = \dfrac{x+3}{P(x)}$

b) $\dfrac{P(x)}{x^2+2x+1} = \dfrac{x^2}{x+1}$

a) $P(x) = \dfrac{(x+3)(2x-5)}{x+2}$, que como no se puede simplificar, $P(x)$ no puede ser un polinomio, sino que es una fracción algebraica.

b) $P(x) = \dfrac{x^2(x^2+2x+1)}{(x+1)} = \dfrac{x^2(x+1)^2}{x+1} = x^2(x+1) = x^3+x^2$

3.65. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1} + \dfrac{x^2}{x+1}$

b) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{5x}{4} + \dfrac{9x}{8} - \dfrac{17x}{16}$

c) $\dfrac{2x^2-x}{x+3} + \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{12x}{9-x^2}$

d) $t - \dfrac{t^2}{t-1} + \dfrac{1}{t+1}$

a) $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} + \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2+1+x^3+x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^3+2x^2+1}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{24x-20x+18x-17x}{16} = \dfrac{5x}{16}$

c) $\dfrac{(2x^2-x)(x-3)+2x(x+3)-12x}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2x^3-6x^2-x^2+3x+2x^2+6x-12x}{(x+3)(x-3)} =$

$= \dfrac{2x^3-5x^2-3x}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{x(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x^2+x}{x+3}$

d) $\dfrac{t^3-t-t^3-t^2+t-1}{(t-1)(t+1)} = \dfrac{-t^2-1}{t^2-1} = \dfrac{t^2+1}{t^2-1}$

3.66. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica todo lo posible los resultados.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-4}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-9}{x+2}$

b) $\dfrac{x^3-x}{2x-4} : \dfrac{4x+4}{3x-6}$

c) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1+x} \cdot \dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1+x}{1-x} : \dfrac{x+1}{x}}$

a) $\dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)(x-3) = x^3-4x^2+x+6$

b) $\dfrac{x(x-1)(x+1)\cdot 3(x-2)}{2(x-2)\cdot 4(x+1)} = \dfrac{3x(x-1)}{8} = \dfrac{3x^2-3x}{8}$

c) $\dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = \dfrac{(x+1)\,x^2}{x\,(x-1)(x+1)} = \dfrac{x}{x-1}$

d) $\dfrac{(x-1)^3(x+1)}{x(x+1)^3} = \dfrac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = \dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x}$

3.67. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y}$

b) $\dfrac{x^4 - y^4}{(x - y)^2}$

c) $\dfrac{x^4 - 16}{(x + 2)^2}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}}$

a) $\dfrac{(x - y)(x + y)}{x + y} = x - y$

b) $\dfrac{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)}{(x - y)^2} = \dfrac{(x + y)(x^2 + y^2)}{x - y} = \dfrac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x - y}$

c) $\dfrac{(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{(x + 2)^2} = \dfrac{(x - 2)(x^2 + 4)}{x + 2} = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x + 2}$

d) $\dfrac{\dfrac{y^2 - x^2}{x^2y^2}}{\dfrac{y - x}{xy}} = \dfrac{xy(y - x)(y + x)}{x^2y^2(y - x)} = \dfrac{y + x}{xy} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

3.68. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{(2x - 1)(x + 3)^2 - 3(x^2 - x)(x + 3)}{(x + 3)^3}$

b) $\dfrac{(4x^2 - 2x^3)\ 6x}{x^2(x - 2)}$

a) $\dfrac{-x^3 + 5x^2 + 21x - 9}{(x + 3)^2} = \dfrac{-(x + 3)(x^2 - 8x + 3)}{(x + 3)^3} = -\dfrac{x^2 - 8x + 3}{(x + 3)^2}$

b) $\dfrac{-2x^2(x - 2)\ 6x}{x^2(x - 2)} = -12x$

PROBLEMAS

3.69. Escribe expresiones algebraicas para las siguientes situaciones.

a) El perímetro de un cuadrado cuya diagonal mide x.

b) La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos, siendo n el primero de ellos.

a) Sea a la medida del lado del cuadrado.

$x^2 = a^2 + a^2$, y despejando la a, $a = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$, luego $P = 4a = 2\sqrt{2}x$.

b) Sean n, $n + 2$ y $n + 4$ los números consecutivos.

$S = n^2 + (n + 2)^2 + (n + 4)^2 = 3n^2 + 12n + 20$

3.70. Se consideran todos los triángulos rectángulos tales que las medidas de sus catetos son dos números que se diferencian en dos unidades. Escribe una expresión que permita calcular el perímetro de dichos triángulos si b es el cateto mayor.

Sean b y $b - 2$ las medidas de los catetos.

La hipotenusa se calcula utilizando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{b^2 + (b - 2)^2}$.

$$P = b + b - 2 + \sqrt{b^2 + (b - 2)^2} = 2b - 2 + \sqrt{2b^2 - 4b + 4}$$

3.71. Si x e y son dos números, expresa algebraicamente:

a) El primero más el cuadrado del segundo.

b) El primero por el cuadrado del segundo.

c) El producto del primero por el inverso del segundo.

d) Sabiendo que $x + y = 5$, expresa las relaciones anteriores dependiendo solo del número x.

e) Sabiendo que $xy = 10$, halla el valor de $\dfrac{x^2 + y^2 - (x + y)^2}{5}$.

a) $x + y^2$

b) xy^2

c) $x \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{x}{y}$

d) Como $x + y = 5$, entonces $y = 5 - x$, y sustituyendo en las tres expresiones se tiene:

$x + y^2 = x + (5 - x)^2 = x^2 - 9x + 25$

$xy^2 = x(5 - x)^2 = x^3 - 10x^2 + 25x$

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{5} - x$

e) Como $xy = 10$, entonces $y = \dfrac{10}{x}x$, y sustituyendo en las tres expresiones se tiene:

$x + y^2 = x + \left(\dfrac{10}{x}\right)^2 = x + \dfrac{100}{x^2} = \dfrac{x^3 + 100}{x^2}$

$xy^2 = x\left(\dfrac{10}{x}\right)^2 = \dfrac{100x}{x^2} = \dfrac{100}{x}$

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{x}{\frac{10}{x}} = \dfrac{x^2}{10}$

3.72. Halla las expresiones algebraicas que dan el producto de:

a) Tres números naturales consecutivos.

b) Tres números pares consecutivos.

c) Tres múltiplos de cinco consecutivos.

a) $n(n + 1)(n + 2)$

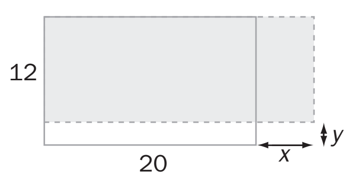
b) $2n(2n + 2)(2n + 4)$

c) $5n(5n + 5)(5n + 10)$

3.73. Se considera un rectángulo de 20 metros de base y 12 de altura.

a) Escribe la expresión algebraica que determina el área de un nuevo rectángulo que se obtiene al incrementar la medida de la base en x metros y disminuir su altura en y metros.

b) Calcula el área del rectángulo obtenido al aumentar la base en 2 m y disminuir la altura en 4 m.



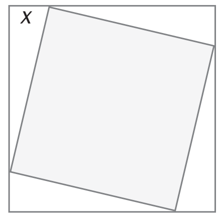
a) Las medidas del nuevo rectángulo son $20 + x$ y $12 - y$. Por tanto, su área se puede escribir como:

$$S = (20 + x)(12 - y)$$

b) Para los valores indicados:

$$S = (20 + 2)(12 - 4) = 176 \text{ m}^2$$

3.74. (PAU) En un cuadrado de lado 5 unidades de longitud se marcan cuatro puntos, uno en cada lado, de forma que su distancia al vértice más próximo es de x unidades. Estos cuatro puntos forman un nuevo cuadrado tal y como muestra la figura.



a) Escribe una expresión algebraica que determine el perímetro del nuevo cuadrado.

b) Escribe una expresión algebraica que determine el área del nuevo cuadrado.

Lado del nuevo cuadrado:

$$L = \sqrt{x^2 + (5 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 25 + x^2 - 10x} = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$$

a) $P(x) = 4\sqrt{2x^2 - 10x + 25}$

b) $A(x) = L^2 = 2x^2 - 10x + 25$

3.75. (PAU) En la siguiente tabla aparece el número de CD que está dispuesto a comprar un cliente en función del precio de cada uno.

Precio en céntimos	Número de unidades
24	50
22	60
20	70
18	80

a) Establece una expresión algebraica que determine el precio de cada CD si se adquieren *x* unidades.

b) Establece una expresión algebraica que determine el precio total a pagar al comprar *n* CD (*n* comprendido entre 50 y 80).

a) Si se compran *x* CD, el precio que se paga por cada uno es:

$$p(x) = 24 - 2 \cdot \frac{x - 50}{10} = 24 - \frac{x - 50}{5} = 24 - \frac{x}{5} + 10 = 34 - \frac{x}{5}$$

b) $P(n) = n\left(34 - \frac{n}{5}\right) = 34n - \frac{n^2}{5}$

3.76. (PAU) El coste de producir x chips de memoria para ordenador (*x* entre 0 y 5) viene dado por el polinomio $C(x) = -\frac{4}{5}x^2 + 8x$ unidades monetarias. El precio por unidad al que se pueden vender las *x* unidades producidas es de $P(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 20$ unidades monetarias.

a) Indica los ingresos que se obtienen al producir y vender 2 unidades.

b) Escribe el polinomio que determina el beneficio según las *x* unidades producidas y vendidas.

c) Indica el beneficio si se han producido y vendido 3 unidades.

d) Indica el beneficio si se han producido y vendido 5 unidades.

e) Interpreta los resultados.

a) $I(3) = \left(-\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 20\right) 3 = 46{,}5$ unidades monetarias

b) $B(x) = \text{Ingreso} - \text{Coste} = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 20\right)x - \left(-\frac{4}{5}x^2 + 8x\right) = -\frac{1}{2}x^3 + 20x + \frac{4}{5}x^2 - 8x = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + 12x$

c) $B(3) = -\frac{1}{2} \cdot 27 + \frac{4}{5} \cdot 9 + 12 \cdot 3 = 29{,}7$ unidades monetarias

d) $B(5) = -\frac{1}{2} \cdot 125 + \frac{4}{5} \cdot 25 + 12 \cdot 5 = 17{,}5$ unidades monetarias

e) Se obtienen mayores beneficios si se producen 3 unidades de memoria que si se producen 5.

3.77. (PAU) Los costes, en euros, de fabricar x pares de zapatillas deportivas vienen dados por la expresión:

$$C(x) = -\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600$$

a) Calcula el coste total que supone fabricar 50 pares de zapatillas.

b) Indica cuáles son los costes fijos.

c) Indica cuáles son los costes variables.

d) Indica cuáles son los costes totales para cada par de zapatillas cuando se fabrican x pares.

e) Indica cuáles son los costes variables para cada par de zapatillas cuando se fabrican x pares.

f) Indica cuáles son los costes totales por cada par de zapatillas cuando se fabrican 75 pares.

a) $C(50) = -\frac{4}{25} \cdot 2500 + 70 \cdot 50 + 600 = 3700$ €

b) Los costes fijos son los que no dependen de la producción. Por tanto, vienen dados por el término independiente de la expresión, es decir, $C_f = 600$ €.

c) Los costes totales son el total de costes menos los costes fijos, por tanto: $C_v = -\frac{4}{25}x^2 + 70x$.

d) $\frac{C(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x + 600}{x} = \frac{4}{25}x + 70 + \frac{600}{x}$

e) $\frac{C_v(x)}{x} = \frac{-\frac{4}{25}x^2 + 70x}{x} = \frac{4}{25}x + 70$

f) $\frac{C(75)}{75} = \frac{-\frac{4}{25} \cdot 75^2 + 70 \cdot 75 + 600}{75} = 66$ €

3.78. Expresa algebraicamente el producto de un número por el cubo de otro si entre ambos suman 24.

Como entre los dos números suman 24, si uno es x, el otro es $24 - x$, por lo que su producto es $x(24 - x) = -x^2 + 24x$.

3.79. La altura en metros de un cohete viene dada por la expresión $h(t) = 60t - 5t^2$, en la que t mide el tiempo en segundos.

a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 3, 6 y 8 segundos? ¿Y al cabo de 12?

b) Interpreta los resultados.

a) $h(1) = 60 - 5 = 55$ m; $h(3) = 180 - 45 = 135$ m; $h(6) = 360 - 180 = 180$ m; $h(8) = 160$ m

b) El cohete asciende durante los 6 primeros segundos, momento en el que comienza a caer.

PROFUNDIZACIÓN

3.80. Sea un número real $x > 1$, ordena de menor a mayor el valor de las siguientes expresiones.

a) $\frac{1}{2x+1}, \frac{1}{2x-1}, \frac{1}{1-2x}, 2x, \frac{1}{2x}, \frac{1}{-2x}$

b) $x^2 - x, x^2, 2x^2, x^2 + 1, x^2 - 1, x^2 + x$

c) ¿Podrías intercalar en la secuencia anterior el valor de $2x$?

a) $\frac{1}{1-2x} < \frac{1}{-2x} < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2x} < \frac{1}{2x-1} < 2x$

b) $x^2 - x < x^2 - 1 < x^2 < x^2 + 1 < x^2 + x < 2x^2$

c) No, ya que para algunos valores de x se tendría $x^2 - 1 < 2x$ (por ejemplo, para $x = 2$) y para otros se tendría $x^2 - 1 > 2x$ (por ejemplo, para $x = 3$).

3.81. Halla $(2x^3 + 3x - 2) : (2x - 1)$ utilizando el algoritmo de la división. Comprueba el resultado aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{rl|l} 2x^3 \qquad + 3x - 2 & & 2x - 1 \\ \cline{3-3} -2x^3 + -x^2 \qquad\quad & & x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7}{4} \\ \cline{1-1} x^2 + 3x & & \\ -x^2 + \frac{x}{2} & & \\ \cline{1-1} \frac{7x}{2} - 2 & & \\ -\frac{7x}{2} + \frac{7}{4} & & \\ \cline{1-1} -\frac{1}{4} & & \end{array}$$

Se dividen el dividendo y el divisor previamente por 2.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{8} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}$$

Que es el mismo cociente, y el resto está dividido entre 2.

3.82. Aplicando la regla de Ruffini, realiza la siguiente división. $(4x^4 + 2x^3 + x^2 - 5) : (3x + 1)$

Se divide el dividendo y el divisor entre 3 y queda:

Cociente: $\frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{9} + \frac{7x}{27} - \frac{7}{81}$ Resto: $-\frac{398}{243}$

Por tanto, el cociente es $\frac{4x^3}{3} + \frac{2x^2}{9} + \frac{7x}{27} - \frac{7}{81}$, y el resto, $-\frac{398}{81}$.

3.83. (TIC) Simplifica todo lo que puedas las siguientes fracciones algebraicas con dos variables.

a) $\frac{xy - 3y + x - 3}{xy - 3y}$

b) $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$

a) $\frac{y(x - 3) + x - 3}{y(x - 3)} = \frac{(y + 1)(x - 3)}{y(x - 3)} = \frac{y + 1}{y}$

b) $\frac{(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = x - y$

3.84. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas con dos variables.

a) $\frac{1}{xy} + \frac{a}{xz} + \frac{a^2}{yz}$

b) $\frac{1}{x - y} : \frac{1}{x^2 + y^2 - 2xy}$

c) $\frac{3x^2y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{6xy^2(x + y)}$

d) $\frac{a + b}{a - b} - \frac{a - b}{a + b} + \frac{a^2}{a^2 - b^2}$

a) $\frac{z + ay + a^2x}{xyz}$

b) $\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{x - y} = \frac{(x - y)^2}{x - y} = x - y$

c) $\frac{3x^2y(x - y)(x + y)}{(x - y)6xy^2(x + y)} = \frac{x}{2y}$

d) $\frac{(a + b)^2 - (a - b)^2 + a^2}{(a - b)(a + b)} = \frac{4ab + a^2}{(a - b)(a + b)}$

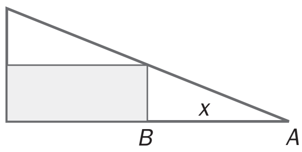
3.85. **Calcula el valor de k para que al simplificar la fracción algebraica $\dfrac{3 + \dfrac{x-9}{x-1}}{k - \dfrac{x+1}{x-1}}$ resulte un polinomio de primer grado. Escribe la expresión de dicho polinomio.**

$$\frac{3 + \dfrac{x-9}{x-1}}{k - \dfrac{x+1}{x-1}} = \frac{\dfrac{3x - 3 + x - 9}{x-1}}{\dfrac{kx - k - x - 1}{x-1}} = \frac{(4x - 12) \cdot (x - 1)}{[(k-1)x - (k+1)] \cdot (x-1)} = \frac{4x - 12}{(k-1)x - (k+1)}$$

El denominador debe ser constante.

Por tanto: $k = 1$, y el polinomio será: $\dfrac{4x - 12}{-2} = -2x + 6$.

3.86. **Un rectángulo se encuentra inscrito en un triángulo rectángulo de catetos 8 y 20 cm tal y como muestra la figura.**

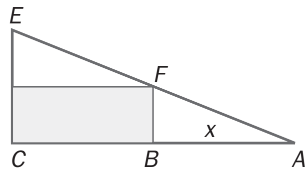


a) Escribe la expresión algebraica que determina el área del rectángulo suponiendo que la distancia entre los puntos A y B es de x metros.

b) Calcula los valores numéricos de la expresión anterior para $x = 2$, $x = 5$ y $x = 10$.

a) Los triángulos ABF y ACE son semejantes, por lo que, verifican el teorema de Tales: $\dfrac{x}{DC} = \dfrac{20}{12} \Rightarrow DC = \dfrac{3x}{5}$

El área del rectángulo será: $S = (20 - x)\dfrac{3x}{5} = \dfrac{60x - 3x^2}{5}$



b) $S(2) = \dfrac{120 - 12}{5} = 21{,}6 \quad S(5) = \dfrac{300 - 75}{5} = 45 \quad S(10) = \dfrac{600 - 300}{5} = 60$

3.87. **(TIC) Descompón en factores los siguientes polinomios.**

a) $x^2 + y^2 + 2xy - z^2$

b) $4x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 12yz$

c) $4 - 9x^2 - 25y^2 + 30xy$

d) $x^3 + y^3$

a) $(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$

b) $(2x)^2 - (3y - 2z)^2 = (2x + 3y - 2z)(2x - 3y + 2z)$

c) $2^2 - (3x - 5y)^2 = (2 - 3x + 5y)(2 + 3x - 5y)$

d) Aplicando la regla de Ruffini: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

3.88. **Calcula la expresión del polinomio de segundo grado $P(x)$ sabiendo que $P(x + 2) = 2x^2 + 5x + 7$.**

$P(x+2) = 2(x+2)^2 - 8 - 8x + 5(x+2) - 10 + 7 = 2(x+2)^2 - 8 - 8(x+2) + 16 + 5(x+2) - 10 + 7 =$
$= 2(x+2)^2 - 3(x+2) + 5$

Por tanto: $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$

3.89. **Calcula los valores de a y de b para que el polinomio $4x^3 + 4x^2 + ax + b$ sea divisible por $2x^2 - x - 1$. Escribe el cociente de la división.**

Utilizando el algoritmo habitual de la división de polinomios, se obtiene:

Cociente: $2x + 3$

Resto: $(a + 5)x + (b + 3) = 0$

Por tanto, $a + 5 = 0$ y $b + 3 = 0$, es decir, $a = -5$ y $b = -3$

3.90. (TIC) Dadas las expresiones algebraicas:

$$A_1 = \frac{1}{1+x} \qquad A_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} \qquad A_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}} \qquad A_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}}$$

a) Simplifícalas expresando el resultado como cociente de dos polinomios de primer grado.

b) Súmalas.

a) $A_2 = \dfrac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \dfrac{1}{\frac{2+x}{1+x}} = \dfrac{1+x}{2+x}$

$$A_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}} = \frac{1}{1+\frac{1+x}{2+x}} = \frac{1}{\frac{2+x+1+x}{2+x}} = \frac{2+x}{3+2x}$$

$$A_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}} = \frac{1}{1+\frac{2+x}{3+2x}} = \frac{1}{\frac{3+2x+2+x}{3+2x}} = \frac{3+2x}{5+3x}$$

b) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x+2}{2x+3} + \dfrac{2x+3}{3x+5} = \dfrac{13x^4+81x^3+192x^2+205x+83}{6x^4+37x^3+84x^2+83x+30}$

3.91. Encuentra fórmulas para calcular $(x+y)^4$ y $(x-y)^4$, y aplícalas para realizar los siguientes cálculos.

a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^4$

b) $\left(1-\sqrt{2}\right)^4$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^4 + \left(1-\sqrt{2}\right)^4$

Los desarrollos de $(x+y)^4$ y de $(x-y)^4$ se calculan utilizando identidades notables:

$(x+y)^4 = ((x+y)^2)^2 = (x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2+2xy) = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

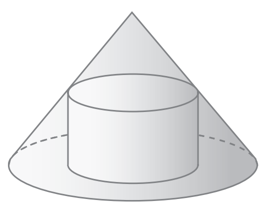
$(x-y)^4 = ((x+y)^2)^2 = (x^2+y^2-2xy)(x^2+y^2-2xy) = x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$

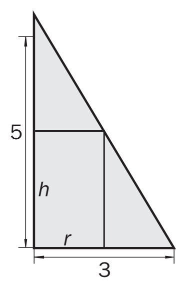
a) $\left(1+\sqrt{2}\right)^4 = 1+4\sqrt{2}+12+8\sqrt{2}+4 = 17+12\sqrt{2}$

b) $\left(1-\sqrt{2}\right)^4 = 1-4\sqrt{2}+12-8\sqrt{2}+4 = 17-12\sqrt{2}$

c) $\left(1+\sqrt{2}\right)^4 + \left(1-\sqrt{2}\right)^4 = 17+12\sqrt{2}+17-12\sqrt{2} = 34$

3.92. En la figura aparece un cilindro inscrito en un cono de 3 cm de radio de la base y de 5 cm de altura. Halla el volumen del cilindro utilizando como única variable el radio de su base, r.





Aplicando el teorema de Tales: $\dfrac{5}{3} = \dfrac{h}{3} - r \Rightarrow h = \dfrac{5}{3}(3-r) = \dfrac{15-5r}{3}$

Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 \cdot h = \pi r^2 \cdot \dfrac{15-15r}{3} = \dfrac{\pi}{3}(15r^2 - 5r^3)$

3.93. Halla la expresión algebraica que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base, x. ¿Cuánto vale su área si $x = 2$ cm?

Como el perímetro es 8 y la base es x, los lados iguales miden $4 - \frac{x}{2}$, y aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene que la altura es $\sqrt{\left(4 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{16 - 4x}$, por lo que la superficie es:

$$S(x) = \frac{x}{2}\sqrt{16 - 4x}\ \text{cm}^2$$

$$S(2) = \frac{2}{2}\sqrt{16 - 8} = \sqrt{8}\ \text{cm}^2$$

3.94. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 4 m² de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 16 euros, y el de tramo vertical, 25. Expresa el coste del marco en función de la longitud, x, del tramo horizontal.

Como el área es 4 y la longitud del tramo horizontal es x, la longitud del tramo vertical es $\frac{4}{x}$.

El coste es $C(x) = 16 \cdot x + 25 \cdot \frac{4}{x} = 16x + \frac{100}{x} = \frac{16x^2 + 100}{x}$

3.95. La pista de un polideportivo cubierto tiene la forma de la figura. Si su perímetro es de 200 m, halla la superficie que encierra en función de la longitud del radio x de la curva.

Como el perímetro es 200 y la longitud de la circunferencia es $2\pi x$, el lado horizontal del rectángulo central es $100 - \pi x$.

El área total es $A(x) = \pi x^2 + (100 - \pi x)\, 2x = 200x - \pi x^2$.