EXAMEN de FUNCIONES

1. Resuelve la ecuación: $5^{2x-1} = 2^{5x+3}$ dando el resultado redondeado en las milésimas.
2. Haz la gráfica aproximada e indica 2.1. Dominio; 2.2. Recorrido; 2.3. Discontinuidades; 2.4. Inyectividad; 2.5 Intersecciones con los ejes y 2.6. Crecimiento-Decrecimiento de las funciones: a) $y = 3x^{-1}$; b) $y = \log x$; c) $y = (0'2)^x$ y d) $y = \cos x$
3. Haz un estudio razonado de la continuidad y de las asíntotas de la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12} & si \quad x \le 1 \\[2ex] \dfrac{3x-3}{2x^2-50x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

1. Se trata de una ecuación exponencial. Para bajar los exponentes todo lo que tenemos que hacer es tomar logaritmos en los dos miembros y aplicar las propiedades de los logaritmos para transformarla en una ecuación polinómica.

$$5^{2x-1} = 2^{5x+3} \Rightarrow \log 5^{2x-1} = \log 2^{5x+3} \Rightarrow (2x-1)\log 5 = (5x+3)\log 2$$

Resolvemos la ecuación de primer grado resultante:

$$(2x-1)\log 5 = (5x+3)\log 2 \Rightarrow \quad 2x\log 5 - \log 5 = 5x\log 2 + 3\log 2 \Rightarrow$$
$$2x\log 5 - 5x\log 2 = \log 5 + 3\log 2 \Rightarrow$$
$$x(2\log 5 - 5\log 2) = \log 5 + 3\log 2 \Rightarrow$$
$$x = \frac{\log 5 + 3\log 2}{2\log 5 - 5\log 2} = -14'943$$

Solución: $\boxed{x = -14'943}$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12} & si \quad x \le 1 \\[2ex] \dfrac{3x-3}{2x^2-50x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Se trata de una función definida a trozos por expresiones racionales, por lo tanto, es continua en todos los valores para los que está definida y, únicamente, no está definida en los valores que anulan el denominador.

También puede que sea discontinua en $x = 1$ que es el valor que sirve de frontera entre los dos intervalos en los que está definida.

- Para $x \le 1$, es decir, en $(-\infty,1)$ está definida por $f(x) = \dfrac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12}$.

  Denominador: $2x^2-2x-12 = 2(x^2-x-6) = 2(x-3)(x+2)$ se anula en $x = 3$ y en $x = -2$ pero $x = 3$ no es menor que 1.

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12} = \overset{\frac{0}{0}}{=} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x-1)(x+2)}{2(x-3)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{3(x-1)}{2(x-3)} = \overset{\frac{-9}{-10}}{=} = \frac{9}{10}$$

> En $x = -2$ es discontinua por no estar definida, pero, como existe el límite, la discontinuidad es evitable (sería continua haciendo $f(-2) = -9/10$)

- Para $x>1 \Leftrightarrow \forall\ x\in(1,+\infty)$, $f(x)=\dfrac{3x-3}{2x^2-50x}$

  Denomin.: $2x^2-50x=2x(x-25)$ se anula en $x=0$ y en $x=25$ pero 0 no es mayor que 1.

$$\lim_{x\to 25} f(x)=\lim_{x\to 25}\frac{3x-3}{2x^2-50x}=\overset{\frac{72}{0}}{=}=\begin{cases}-\infty & cuando \quad x\to 25^- \\ +\infty & cuando \quad x\to 25^+\end{cases}$$

> En $x=25$ la discontinuidad es inevitable.
> Se produce un salto de $-\infty$ (cuando $x\to 25^-$) a $+\infty$ (cuando $x\to 25^+$)

- En $x=1$ $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12}=\overset{\frac{0}{-12}}{=}=0=f(1)$

  y $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{3x-3}{2x^2-50x}=\overset{\frac{0}{-48}}{=}=0$

  En $x=1$ es continua porque $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$ por lo tanto:

> f e continua en $(-\infty,-2)\cup(-2,25)\cup(25,+\infty)$
> en $x=-2$ tiene una discontinuidad evitable
> y en $x=25$ inevitable.

ASÍNTOTAS:

Horizontales:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2+3x-6}{2x^2-2x-12}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to -\infty}\frac{3+\frac{3}{x}-\frac{6}{x^2}}{2-\frac{2}{x}-\frac{12}{x^2}}=\frac{3}{2}$$

> La recta $y=\dfrac{3}{2}$ es asíntota de f por la izquierda

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-3}{2x^2-50x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{50}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$$

> La recta $y=0$ (eje de abscisas) es asíntota de f por la derecha

Verticales: $\boxed{\text{La recta } x=25 \text{ es doblemente asíntota}}$ porque, como hemos visto: $f(x)\to\mp\infty$ cuando $x\to 25^{\mp}$

No hay más asíntotas porque para ningún otro valor de x se cumple que $f(x)\to\infty$

2.

	$y=3x^{-1}$ $y=\dfrac{3}{x}$	$y=\log x$	$y=(0'2)^x$ $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$	$y=\cos x$
Dominio	$\Re-\{0\}$	$\Re_+=(0,+\infty)$	$\Re$	$\Re$
Recorrido	$\Re-\{0\}$	$\Re$	$\Re_+=(0,+\infty)$	$[-1,1]$
Discontinuidades (y clase).	En $x=0$ Discontinuidad inevitable, de salto infinito (asintótica)	No tiene.	No tiene.	No tiene.
¿Es inyectiva?	S Í	S Í	S Í	N O
Intersecciones con los ejes.	No corta a los ejes	Punto $(1,0)$	Punto $(0,1)$	Puntos $(0,1)$ y $(90+180k,0)$ $k\in Z$
Crecimiento y decrecimiento	Decreciente en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	Creciente en $(0,+\infty)$	Decreciente en todo $\Re$	Decreciente en $(0,180)+360\text{k}$ (1^{o} y 2^{o} cuadrante) Creciente en $(180,360)+360\text{k}$ (3^{o} y 4^{o} cuadrante) k$\in Z$