1 Números reales

ACTIVIDADES INICIALES

1.I. Realiza las siguientes operaciones.

a) $2 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (2 \cdot 3 - 5) - 1$

b) $-3 + \left[5(2^{-3} - 3) - \left(\sqrt{25} - 8\right)\left(2^2 - \sqrt{4}\right)\right] + 10$

a) $2 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (2 \cdot 3 - 5) - 1 = 2 + 12 + 5 \cdot (6 - 5) - 1 = 2 + 12 + 5 - 1 = 18$

b) $-3 + \left(5 \cdot (2^{-3} - 3) - \left(\sqrt{25} - 8\right) \cdot \left(2^2 - \sqrt{4}\right)\right) + 10 = -3 + \left(5 \cdot \left(\frac{1}{8} - 3\right) - (5 - 8) \cdot (4 - 2)\right) + 10 =$

$= -3 + \left(5 \cdot \left(-\frac{23}{8}\right) + 6\right) + 10 = -3 - \frac{115}{8} + 6 + 10 = -\frac{11}{8}$

1.II. Simplifica las expresiones siguientes.

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}} \cdot \sqrt{2^2 + 5}}{2 \cdot (-3) - 5}$

b) $\dfrac{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (4^3 - 4^2)^{-1}}{6^{-2}}$

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}} \cdot \sqrt{2^2 + 5}}{2 \cdot (-3) - 5} = \dfrac{3^6 \cdot 3}{-6 - 5} = -\dfrac{3^7}{11} = -\dfrac{2187}{11}$

b) $\dfrac{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (4^3 - 4^2)^{-1}}{6^{-2}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (3 \cdot 4^2)^{-1}}{6^{-2}} = \dfrac{2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 2^{-4}}{2^{-2} \cdot 3^{-2}} = 3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. Resuelve estas operaciones.

a) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{6}}$

a) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} = 1{,}333... = 1{,}\widehat{3}$

b) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{6}} = \dfrac{2}{\frac{7}{6}} = \dfrac{12}{7} = 1{,}\widehat{714285}$

1.2. Halla la fracción irreducible que corresponde a los siguientes números racionales.

a) $25{,}25$ b) $25{,}\widehat{25}$ c) $25{,}2\widehat{5}$

a) $25{,}25 = \dfrac{2525}{100} = \dfrac{101}{4}$

b) $N = 25{,}\widehat{25} = 25{,}252525... \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525{,}252525... \\ N = 25{,}2525225... \end{cases} \Rightarrow 99N = 2500 \Rightarrow N = \dfrac{2500}{99}$

c) $N = 25{,}2\widehat{5} = 25{,}2555... \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525{,}555... \\ 10N = 252{,}555... \end{cases} \Rightarrow 90N = 2273 \Rightarrow N = \dfrac{2273}{90}$

1.3. Calcula la fracción irreducible que representa el resultado de: $25{,}25 + 25{,}\widehat{25} + 25{,}2\widehat{5}$.

$25{,}25 + 25{,}\widehat{25} + 25{,}2\widehat{5} = \dfrac{101}{4} + \dfrac{2500}{99} + \dfrac{2273}{90} = \dfrac{150\,001}{1980}$

1.4. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$ b) $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{15}{1+\dfrac{1}{\dfrac{3}{2}}} = \dfrac{15}{1+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{15}{\dfrac{5}{3}} = \dfrac{3 \cdot 15}{5} = 9$

b) $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}} = \dfrac{14}{1+\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}}} = \dfrac{14}{1+\dfrac{3}{4}} = \dfrac{14}{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{4 \cdot 14}{7} = 8$

1.5. ¿Cuál de estas expresiones no equivale a $a - b + c$?

a) $(a - b) + c$ b) $a - (b + c)$ c) $a + (c - b)$

La expresión del apartado *b*, que equivale a $a - b - c$.

1.6. Razona con ejemplos si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) La suma de dos irracionales es siempre irracional.

b) El producto de dos irracionales es siempre un número irracional.

Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su suma es 0, número racional.

Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su producto es -2, número racional.

1.7. Se quiere vallar un campo rectangular. Se sabe que uno de sus lados mide tres quintas partes de la medida del otro. Además, la diagonal mide 30 m. Calcula el precio que se deberá pagar por hacer el vallado si cada metro de valla cuesta 25 euros y se desperdicia un 10% del material empleado.

Los lados miden a y $\frac{3a}{5}$. Entonces: $D = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3a}{5}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{25}} = \sqrt{\frac{34a^2}{25}} = 30 \Rightarrow a = 25{,}725$ m

El perímetro mide $2 \cdot \left(a + \frac{3a}{5}\right) = 82{,}32$ m.

La valla costaría $82{,}32 \cdot 25 = 2058$ euros; pero como se desperdicia el 10% del material, esta cantidad representa el 90% del precio total. Habría que comprar por un valor de $2058 : 0{,}90 = 2286{,}67$ euros.

1.8. Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) $\frac{11}{4}, \frac{68}{25}, \frac{14}{5}$ y $\frac{27}{10}$

b) $1{,}23$, $1{,}2\widehat{3}$ y $1{,}\widehat{23}$

c) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt{2}$

d) $2{,}\widehat{9}$, 3 y $3{,}0\widehat{1}$

a) $\frac{11}{4} = \frac{275}{100}$; $\frac{68}{25} = \frac{272}{100}$; $\frac{14}{5} = \frac{280}{100}$ y $\frac{27}{10} = \frac{270}{100} \Rightarrow \frac{27}{10} < \frac{68}{25} < \frac{11}{4} < \frac{14}{5}$

b) $1{,}23 < 1{,}232323\ldots < 1{,}2333\ldots \Rightarrow 1{,}23 < 1{,}\widehat{23} < 1{,}2\widehat{3}$

c) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, $\sqrt[3]{3} = 1{,}4422\ldots \Rightarrow \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

d) $2{,}99\ldots < 3 < 3{,}011\ldots \Rightarrow 2{,}\widehat{9} < 3 < 3{,}0\widehat{1}$

1.9. Sean a y b dos números reales negativos. Si $a \leqslant b$, demuestra que el inverso de a es mayor o igual que el inverso de b.

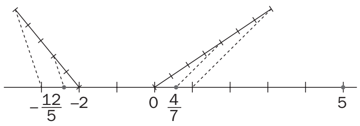
$a \leqslant b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} \leqslant b \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow 1 \leqslant \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{b} \leqslant \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$

1.10. A partir del desarrollo de $(x - y)^2$, siendo x e y no nulos, demuestra que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$.

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$$

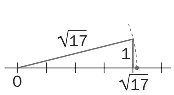
1.11. Representa en la recta real los siguientes números.

a) 5 b) $\dfrac{4}{7}$ c) -2 d) $-\dfrac{12}{5}$

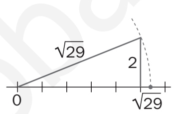


1.12. Escribe los números 17 y 29 como suma de dos cuadrados y representa $\sqrt{17}$ y $\sqrt{29}$ en la recta real.

$17 = 4^2 + 1^2$

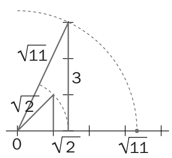


$29 = 5^2 + 2^2$



1.13. Representa en la recta real: $\sqrt{11}$.

$$\sqrt{11} = \sqrt{2 + 9} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^2 + 3^2}$$



1.14. Desarrolla el valor de la expresión $2x - 3 + |2x - 3|$ y calcúlala para los casos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

$$2x - 3 + |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 + 2x - 3 & \text{si } 2x - 3 \geqslant 0 \\ 2x - 3 - (2x - 3) & \text{si } 2x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x - 6 & \text{si } x \geqslant \dfrac{3}{2} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Para $x = -1$, el valor de la expresión es 0.

Para $x = 0$, el valor de la expresión es 0.

Para $x = 2$, el valor de la expresión es $4 \cdot 2 - 6 = 2$.

1.15. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones.

a) $|x + 2| + |x + 3|$ b) $x + |x + 2| + |x + 3|$

a) $|x + 2| + |x + 3|$. Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = -3$.

$$|x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} -(x + 2) - (x + 3) & \text{si } x \leqslant -3 \\ -(x + 2) + x + 3 & \text{si } -3 < x < -2 \\ x + 2 + x + 3 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases} = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \leqslant -3 \\ 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 2x + 5 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$$

b) $x + |x + 2| + |x + 3|$. Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = -3$.

$$x + |x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} x - (x + 2) - (x + 3) & \text{si } x \leqslant -3 \\ x - (x + 2) + x + 3 & \text{si } -3 < x < -2 \\ x + x + 2 + x + 3 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x \leqslant -3 \\ x + 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$$

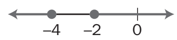
1.16. Dados $A = (2, 4)$, $B = (-2, 6]$ y $C = [-3, +\infty)$, calcula:

a) $A \cup B \cup C$ b) $A \cap B \cap C$ c) $A \cap B \cup C$

a) $A \cup B \cup C = C = [-3, +\infty)$ b) $A \cap B \cap C = (2, 4)$ c) $A \cap B \cup C = C = [-3, +\infty)$

1.17. Expresa mediante intervalos y gráficamente los siguientes conjuntos de números reales.

a) $|x - 2| < 2$ b) $|x + 3| \geqslant 1$ c) $|x + 1| \leqslant 2$

a) $(0, 4)$	
b) $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$	
c) $[-3, 1]$	

1.18. Halla los errores absoluto y relativo que se cometen al utilizar 1,7 como aproximación de $\frac{12}{7}$.

Error absoluto: $E_a = \left|\frac{12}{7} - 1{,}7\right| = \frac{1}{70}$ Error relativo: $E_r = \frac{\frac{1}{70}}{\frac{12}{7}} = \frac{1}{120}$

1.19. Calcula las mejores aproximaciones por defecto y por exceso y el redondeo de $\sqrt{2}$ a la unidad, la centésima y la diezmilésima.

	Unidad	Centésima	Diezmilésima
Defecto	1	1,41	1,4142
Exceso	2	1,42	1,4143
Redondeo	1	1,41	1,4142

1.20. (TIC) Calcula las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

a) $0{,}00048 + 0{,}000059$

b) $35\,000\,000 - 720\,000\,000$

c) $250\,000 \cdot 5{,}5 \cdot 10^5$

d) $0{,}0000015 : 0{,}000003$

e) $\frac{2{,}2 \cdot 10^9 - 7{,}8 \cdot 10^{-14}}{1{,}9 \cdot 10^{11}}$

f) $\frac{0{,}00016 \cdot (25 \cdot 10^3 + 2000)}{0{,}0025}$

g) $\frac{10^{23} \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-12}}{3{,}5 \cdot 10^{22} + 4{,}3 \cdot 10^{21}}$

a) $5{,}39 \cdot 10^{-4}$

b) $-6{,}85 \cdot 10^8$

c) $1{,}375 \cdot 10^{11}$

d) $5 \cdot 10^{-1}$

e) $1{,}158 \cdot 10^{-2}$

f) $1{,}728 \cdot 10^3$

g) $1{,}425 \cdot 10^{-11}$

1.21. Un átomo de hidrógeno (H) pesa $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gramos.

a) ¿Cuántos átomos de H se necesitan para obtener 20 kg de ese gas?

b) ¿Cuál es la masa de $2{,}524 \cdot 10^{26}$ átomos de H?

c) Si 2 gramos de hidrógeno molecular ocupan un volumen de 22,4 L a 0 °C y a la presión atmosférica normal, ¿cuántas moléculas de hidrógeno contendría un recipiente de 5 L en estas condiciones?

a) $\dfrac{20\,000}{1{,}66 \cdot 10^{-24}} = 1{,}205 \cdot 10^{28}$ átomos serán necesarios para juntar una masa de 20 kg.

b) $2{,}524 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24} = 419 \text{ g} = 0{,}419 \text{ kg}$

c) El recipiente de 5 litros contiene $\dfrac{2 \cdot 5}{22{,}4}$ gramos de hidrógeno, es decir, $\dfrac{2 \cdot 5}{22{,}4} : (1{,}66 \cdot 10^{-24}) = 2{,}689 \cdot 10^{23}$ átomos de hidrógeno. Cada molécula está compuesta por dos átomos, por lo que habrá $1{,}345 \cdot 10^{23}$ moléculas en total.

1.22. La masa de la Tierra es de $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, y la de Plutón, de $1{,}29 \cdot 10^{22}$.

a) ¿Cuántas veces es más masiva la Tierra que Plutón?

b) Suponiendo que ambos planetas fueran esferas perfectas con radios de 6371 y 1160 km, respectivamente, calcula la densidad aproximada de cada uno de ellos.

a) $\dfrac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{1{,}29 \cdot 10^{22}} = 463$ veces mayor es la masa de la Tierra respecto de la de Plutón.

b) Densidad de la Tierra $= \dfrac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \dfrac{5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 6371^3 \text{ km}^3} = 5{,}5 \cdot 10^{12} \text{ kg/km}^3 = \dfrac{5{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 1000}{10^{15}} = 5{,}5 \text{ g/cm}^3$

Densidad de Plutón $= \dfrac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \dfrac{1{,}29 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 1160^3 \text{ km}^3} = 1{,}97 \cdot 10^{12} \text{ kg/km}^3 = 1{,}97 \text{ g/cm}^3$

1.23. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{8} - \dfrac{1}{4}\sqrt{18}$ c) $\dfrac{16 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{\sqrt[3]{32}}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{20} + \sqrt{5}}}}$

a) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6} = \dfrac{3}{2}\sqrt{6}$

b) $\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{8} - \dfrac{1}{4}\sqrt{18} = \sqrt{2} + \dfrac{3 \cdot 2}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{4}\sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \dfrac{3}{4}\sqrt{2} = \dfrac{13}{4}\sqrt{2}$

c) $\dfrac{16 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{\sqrt[3]{32}}} = \dfrac{2^4 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}} = \dfrac{2^5 \cdot \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}} = 2^5 \cdot \sqrt[6]{2^2} = 2^5 \cdot \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{20} + \sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}} = \sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{2}{5}}} = \sqrt[8]{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{5^7}}{\sqrt[8]{5} \cdot \sqrt[8]{5^7}} = \dfrac{\sqrt[8]{2 \cdot 5^7}}{5}$

1.24. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

a) $128^{\frac{1}{2}} + 162^{\frac{3}{2}}$ b) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

a) $128^{\frac{1}{2}} + 162^{\frac{3}{2}} = \sqrt{128} + \sqrt{162^3} = \sqrt{2^7} + \sqrt{2^3 \cdot 3^{12}} = 2^3\sqrt{2} + 2 \cdot 3^6\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 1458\sqrt{2} = 1466\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^7}}} = \sqrt[8]{2^7}$

1.25. Racionaliza los siguientes denominadores.

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{5}{2\sqrt[4]{5}}$ c) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}+1}$

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{10} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{5}{2\sqrt[4]{5}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{2\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{2 \cdot 5} = \dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{2}$

c) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}+1} = \dfrac{5(2\sqrt{5}-1)}{(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)} = \dfrac{10\sqrt{5}-5}{(2\sqrt{5})^2 - 1^2} = \dfrac{10\sqrt{5}-5}{4 \cdot 5 - 1} = \dfrac{10\sqrt{5}-5}{19}$

1.26. Simplifica la expresión $\dfrac{\left[\dbinom{29}{3} + \dbinom{29}{25}\right] \cdot 4!}{630}$.

$$\frac{\left[\dbinom{29}{3} + \dbinom{29}{25}\right] \cdot 4!}{630} = \frac{\left[\dbinom{29}{3} + \dbinom{29}{4}\right] \cdot 4!}{630} = \frac{\dbinom{30}{4} \cdot 4!}{630} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{630} = 1044$$

1.27. (TIC) Desarrolla las siguientes potencias.

a) $\left(3 - 2\sqrt{3}\right)^5$ b) $\left(2x + \dfrac{4}{3x}\right)^4$

a) $\left(3-2\sqrt{3}\right)^5 = \dbinom{5}{0} \cdot 3^5 - \dbinom{5}{1} \cdot 3^4 \cdot \left(2\sqrt{3}\right) + \dbinom{5}{2} \cdot 3^3 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 - \dbinom{5}{3} \cdot 3^2 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3 + \dbinom{5}{4} \cdot 3 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^4 - \dbinom{5}{5} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^5 =$

$= 243 - 5 \cdot 81 \cdot 2\sqrt{3} + 10 \cdot 27 \cdot 12 - 10 \cdot 9 \cdot 24\sqrt{3} + 5 \cdot 3 \cdot 144 - 32 \cdot 9\sqrt{3} = 5643 - 3258\sqrt{3}$

b) $\left(2x + \dfrac{4}{3x}\right)^4 = \dbinom{4}{0} \cdot (2x)^4 + \dbinom{4}{1} \cdot (2x)^3 \cdot \dfrac{4}{3x} + \dbinom{4}{2} \cdot (2x)^2 \cdot \left(\dfrac{4}{3x}\right)^2 + \dbinom{4}{3} \cdot 2x \cdot \left(\dfrac{4}{3x}\right)^3 + \dbinom{4}{4} \cdot \left(\dfrac{4}{3x}\right)^4 =$

$= 16x^4 + 4 \cdot 8x^3 \cdot \dfrac{4}{3x} + 6 \cdot 4x^2 \cdot \dfrac{16}{9x^2} + 4 \cdot 2x \cdot \dfrac{64}{27x^3} + \dfrac{256}{81x^4} = 16x^4 + \dfrac{128}{3}x^2 + \dfrac{128}{3} + \dfrac{512}{27x^2} + \dfrac{256}{81x^4}$

1.28. Halla el sexto término de los desarrollos de:

a) $\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{8}\right)^9$ b) $(3a^2 + 2ab)^8$

a) $T_6 = \dbinom{9}{5} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^4 \cdot \left(2\sqrt{8}\right)^5 = 126 \cdot 4 \cdot 4096\sqrt{2} = 2\,064\,384\sqrt{2}$

b) $T_6 = \dbinom{8}{5} \cdot (3a^2)^3 \cdot (2ab)^5 = 56 \cdot 27a^6 \cdot 32a^5b^5 = 48\,384a^{11}b^5$

1.29. Calcula el término independiente del desarrollo de la potencia $\left(\dfrac{3}{x^2} + 5x\right)^{12}$.

$T_k = \dbinom{12}{k-1} \cdot \left(\dfrac{3}{x^2}\right)^{13-k} \cdot (5x)^{k-1} = \dbinom{12}{k-1} \cdot \dfrac{3^{13-k} \cdot 5^{k-1} \cdot x^{k-1}}{x^{26-2k}} = \dbinom{12}{k-1} 3^{13-k} \cdot 5^{k-1} \cdot x^{3k-27}$

$3k - 27 = 0 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow T_9 = \dbinom{12}{8} 3^{13-9} \cdot 5^{9-1} = 495 \cdot 3^4 \cdot 5^8$

1.30. Calcula: $\log_2 16$, $\log_3 \sqrt{27}$ y $\log_5 \sqrt[3]{25}$.

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

$\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

$\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$

1.31. Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y que $\log 3 \approx 0{,}477$, halla:

a) $\log_3 8$ **b) $\log \sqrt{0{,}012}$**

a) $\log_3 8 = \dfrac{\log 8}{\log 3} = \dfrac{\log 2^3}{\log 3} = \dfrac{3\log 2}{\log 3} \approx 1{,}893$

b) $\log \sqrt{0{,}012} = \log \sqrt{\dfrac{12}{1000}} = \log\left(\dfrac{12}{1000}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{12}{1000} = \dfrac{1}{2}(\log 12 - \log 1000) = \dfrac{1}{2}(\log(2^2 \cdot 3) - 3) =$
$= \dfrac{1}{2}(2\log 2 + \log 3 - 3) \approx -0{,}9605$

1.32. Toma logaritmos en la expresión $A = (x^x)^x$.

$\log A = \log\left[(x^x)^x\right] = x\log(x^x) = x \cdot x\log x = x^2\log x$

1.33. Pasa a forma algebraica la siguiente expresión logarítmica.
$\log A = 2 + 2\log x - \log y$

$\log A = \log 100 + \log x^2 - \log y \Rightarrow \log A = \log\dfrac{100x^2}{y} \Rightarrow A = \dfrac{100x^2}{y}$

1.34. (TIC) Halla el valor de los siguientes logaritmos con la calculadora.

a) $\log_3 21$ **b) $\log_{0{,}01} 12$** **c) $\log_{\sqrt{3}} 19$**

a) $\log_3 21 = \dfrac{\ln 21}{\ln 3} = 2{,}771$ b) $\log_{0{,}01} 12 = \dfrac{\ln 12}{\ln 0{,}01} = -0{,}540$ c) $\log_{\sqrt{3}} 19 = \dfrac{\ln 19}{\ln\sqrt{3}} = 5{,}360$

1.35. En un cultivo de bacterias, el número se duplica cada dos días. Un día se contabilizan 3000 bacterias.

a) Calcula el número de bacterias que habrá 15 días después.

b) ¿Cuántos días han de pasar para que haya el triple de bacterias?

c) Si el número inicial fuera de 6000, ¿cuántos días tendrían que transcurrir para que hubiera el triple?

d) Se supone que la población se estabiliza al alcanzar las 20 000 bacterias. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para ello?

El número de bacterias cuando han pasado t días es $N = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

a) Para $t = 15 \Rightarrow N = 3000 \cdot 2^{7,5} = 543\,058$

b) $3N = N \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 3 \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log 3 \Rightarrow \dfrac{t}{2}\log 2 = \log 3 \Rightarrow t = 2 \cdot \dfrac{\log 3}{\log 2} = 3{,}17$ días

c) El resultado anterior es independiente del número inicial de bacterias.

d) $20\,000 = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = \dfrac{20\,000}{3000} \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log\dfrac{20}{3} \Rightarrow \dfrac{t}{2}\log 2 = \log\dfrac{20}{3} \Rightarrow t = 2 \cdot \dfrac{\log\frac{20}{3}}{\log 2} = 5{,}47$ días

1.36. Cierta sustancia radiactiva tiene un período de semidesintegración de 1600 años. Calcula la cantidad de masa a la que se habrá reducido 1 kilogramo de esta sustancia al cabo de 10 000 años.

La masa al cabo de 10 000 años será: $1 \cdot 0{,}5^{\frac{10\,000}{1600}} = 0{,}01314$ kg $= 13{,}14$ g

1.37. Se depositan en un banco 5000 euros durante 2 años. El banco informa de que el interés es del 3,5% anual.

a) Calcula el capital acumulado suponiendo que la capitalización es anual.

b) ¿A cuánto asciende si es mensual?

c) ¿Y si es diaria?

d) Interpreta los resultados obtenidos.

a) $C = 5000 \cdot 1{,}035^2 = 5356$ €

b) $C = 5000 \cdot \left(1 + \frac{3{,}5}{1200}\right)^{2 \cdot 12} = 5362$ €

c) $C = 5000 \cdot \left(1 + \frac{3{,}5}{36\,500}\right)^{2 \cdot 365} = 5362{,}5$ €

d) No se aprecian grandes diferencias al cambiar la acumulación anual por la mensual, y son casi insignificantes al cambiarla por acumulación diaria.

EJERCICIOS

Números reales

1.38. Escribe dos números comprendidos entre:

a) $\frac{19}{23}$ **y** $\frac{20}{23}$

b) $\frac{22}{7}$ **y** π

a) $\frac{19}{23} = \frac{57}{69}$ y $\frac{20}{23} = \frac{60}{69}$. Entre estos dos números están $\frac{58}{69}$ y $\frac{59}{69}$.

b) $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$, $\pi = 3{,}1415\ldots$ Entre ambos están 3,1416 y 3,1417.

1.39. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. En el caso de los racionales, indica su expresión mediante una fracción irreducible.

a) 12,12131415…

b) 12,121212…

c) 12,0121212…

d) 1,010010001…

e) 1,123123123…

f) 0,001002003004…

a) 12,12131415… Irracional

b) $12{,}121212\ldots = 12{,}\widehat{12}$ Racional $\begin{cases} 100N = 1212{,}1212\ldots \\ N = 12{,}121212\ldots \end{cases} \Rightarrow 99N = 1200 \Rightarrow N = \frac{1200}{99} = \frac{400}{33}$

c) $12{,}0121212\ldots = 12{,}0\widehat{12}$ Racional $\begin{cases} 1000N = 12012{,}1212\ldots \\ 10N = 120{,}121212\ldots \end{cases} \Rightarrow 990N = 11\,892 \Rightarrow N = \frac{11\,892}{990} = \frac{1982}{165}$

d) 1,010010001 Irracional

e) $1{,}123123123\ldots = 1{,}\widehat{123}$ Racional $\begin{cases} 1000N = 1123{,}123123\ldots \\ N = 1{,}123123\ldots \end{cases} \Rightarrow 999N = 1122 \Rightarrow N = \frac{1122}{999} = \frac{374}{333}$

f) 0,001002003004 Irracional

1.40. Clasifica estos números indicando a qué conjuntos numéricos pertenecen.

a) 25,0123456… c) -4 e) 2 g) $-\sqrt{0{,}0625}$

b) 25,4252525… d) $\dfrac{3}{7}$ f) $\sqrt{2{,}3}$ h) $-\dfrac{65}{13}$

a) 25,0123456… es irracional y real.

b) 25,4252525… es racional y real.

c) -4 es entero, racional y real.

d) $\dfrac{3}{7}$ es racional y real.

e) 2 es natural, entero, racional y real.

f) $\sqrt{2{,}3}$ es irracional y real.

g) $-\sqrt{0{,}0625} = -0{,}25$ es racional y real.

h) $-\dfrac{65}{13} = -5$ es entero, racional y real.

1.41. Ordena de menor a mayor estos números.

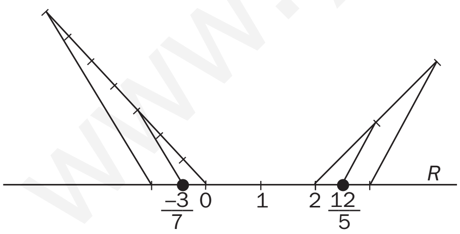
25,0111… $\dfrac{126}{5}$ 25,01 $\dfrac{226}{9}$

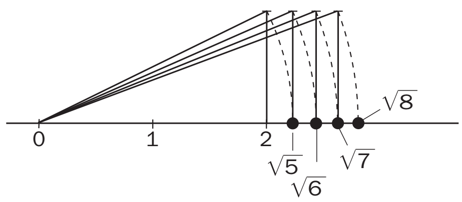
$\dfrac{126}{5} = 25{,}2$; $\dfrac{226}{9} = 25{,}1111...$

El orden es: $25{,}01 < 25{,}0111... < \dfrac{226}{9} < \dfrac{126}{5}$

1.42. Representa los siguientes números reales.

a) $\dfrac{12}{5}$ b) $-\dfrac{3}{7}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$ f) $\sqrt{8}$

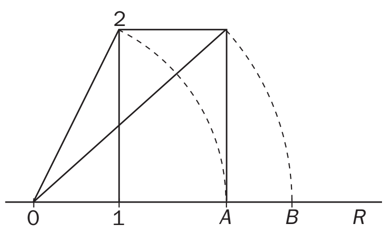




1.43. Indica qué números reales representan los puntos *A* y *B* de la figura.

$A = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$B = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$



Valor absoluto e intervalos

1.44. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $|2x - 4| + x$ b) $|x| + |2x|$ c) $|x - 1| + |x + 1|$ d) $x + |x| + |x - 2|$

a) $|2x - 4| + x = \begin{cases} -2x + 4 + x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 + x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $|x| + |2x| = \begin{cases} -x - 2x & \text{si } x < 0 \\ x + 2x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Se podía haber hecho $|x| + |2x| = |x| + 2|x| = 3|x|$

c) $|x - 1| + |x + 1| = \begin{cases} -(x - 1) - (x + 1) & \text{si } x \leqslant -1 \\ -(x - 1) + x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 + x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

d) $x + |x| + |x - 2| = \begin{cases} x - x - x + 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x + x - x + 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + x + x - 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x + 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

1.45. Dados los conjuntos $A = (-2, +\infty)$, $B = (-2, 0]$ y $C = [0, 4)$, calcula $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.

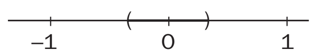
$A \cup B \cup C = A = (-2, +\infty)$ $A \cap B \cap C = \{0\}$

1.46. Expresa mediante un intervalo los siguientes conjuntos de números reales y represéntalos en la recta real.

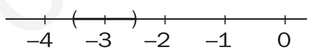
a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ b) $|2x + 6| < 1$ c) $|x| < \frac{1}{3}$

a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

c) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$



b) $|x + 3| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{-7}{2}, \frac{-5}{2}\right)$



Aproximaciones y errores

1.47. Da la expresión aproximada que se pide en cada caso.

a) $\frac{23}{7}$ por exceso con tres cifras decimales

b) $\sqrt{5} + \sqrt{125}$ por defecto con dos cifras decimales

c) $2\pi - 1$ redondeado a tres cifras decimales

a) $\frac{23}{7} \approx 3{,}286$ b) $\sqrt{5} + \sqrt{125} \approx 13{,}41$ c) $2\pi - 1 \approx 5{,}283$

1.48. Acota el error relativo que se comete al tomar como aproximación del número áureo $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ el número racional 1,618.

Error relativo: $E_r = \frac{\left|\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1{,}618\right|}{1{,}618} < \frac{0{,}00004}{1{,}618} < 0{,}000022$

Notación científica

1.49. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $10^8 - 4 \cdot 10^6$
b) $0{,}00025 \cdot 0{,}0015$
c) $235000 \cdot 0{,}00025$
d) $150000000 : 450000$
e) $0{,}00006 : 45000000$
f) $0{,}0025 \cdot 10^{-13} : 10^{-23}$

a) $10^8 - 4 \cdot 10^6 = 9{,}6 \cdot 10^7$
b) $0{,}00025 \cdot 0{,}0015 = 3{,}75 \cdot 10^{-7}$
c) $235000 \cdot 0{,}00025 = 5{,}875 \cdot 10$
d) $150000000 : 450000 = 3{,}333\ldots \cdot 10^2$
e) $0{,}00006 : 45000000 = 1{,}333\ldots \cdot 10^{-12}$
f) $0{,}0025 \cdot 10^{-13} : 10^{-23} = 2{,}5 \cdot 10^7$

Radicales

1.50. Simplifica el valor de cada expresión.

a) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4} \cdot 3^{-3}}$
d) $\sqrt[4]{390625 \cdot a^5 b^{16}}$
g) $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2 - \frac{1}{2}}\right)^2$
j) $\sqrt[3]{81a^3} + 2a\sqrt[3]{24}$

b) $\dfrac{27^{-15} \cdot (-75)^{40}}{45^{35} \cdot (-15)^{60}}$
e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$
h) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$
k) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{12}$
f) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$
i) $16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}}$
l) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

a) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4} \cdot 3^{-3}} = \dfrac{\frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{3^3}{2^6}}{\frac{1}{2^4 \cdot 3^3}} = \dfrac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^6} = 3^4 = 81$

b) $\dfrac{27^{-15} \cdot (-75)^{40}}{45^{35} \cdot (-15)^{-60}} = \dfrac{(3^3)^{-15}(3 \cdot 5^2)^{40}}{(3^2 \cdot 5)^{35}(3 \cdot 5)^{-60}} = \dfrac{3^{-45} \cdot 3^{40} \cdot 5^{80}}{3^{70} \cdot 5^{35} \cdot 3^{-60} \cdot 5^{-60}} = 3^{-15} \cdot 5^{105}$

c) $\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{390625 \cdot a^5 b^{16}} = \sqrt[4]{5^8 a^5 b^{16}} = 5^2 a b^4 \sqrt[4]{a} = 25a^2b^4\sqrt[4]{a}$

e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6x^4x^9} = \sqrt[12]{x^{19}} = x\sqrt[12]{x^7}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3^4 3^2 3} = \sqrt[8]{3^7}$

g) $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2 - \frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{\dfrac{(x^3)^3}{x^4}} = \sqrt[12]{x^5}$

i) $16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16} + \sqrt{3^6} = 4 + 27 = 31$

j) $\sqrt[3]{81a^3} + 2a\sqrt[3]{24} = 3a\sqrt[3]{3} + 4a\sqrt[3]{3} = 7a\sqrt[3]{3}$

k) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3 4^2}} = \sqrt[18]{2^7}$

l) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2 + 3}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

1.51. Opera y simplifica.

a) $(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + \ldots + (-2)^8$
b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{5}$
c) $2 \cdot \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + 3\sqrt{2}\right)$

a) $(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + \ldots + (-2)^8 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 = 171$

b) $\frac{1}{3}\sqrt[4]{80} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{5} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt[4]{5} - \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = -\frac{11}{6}\sqrt[4]{5}$

c) $2 \cdot \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + 3\sqrt{2}\right) = 2\left(4 + 8 - 12\sqrt{2}\right) + 4 - 18 = 30 - 24\sqrt{2}$

1.52. Racionaliza los denominadores.

a) $\dfrac{a}{a\sqrt[6]{a^8}}$ b) $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}$ c) $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{a}{a\sqrt[6]{a^8}} = \dfrac{1}{a\sqrt[6]{a^2}} = \dfrac{1}{a\sqrt[3]{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}$

b) $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2\sqrt[5]{y^2}\cdot\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2y} = \dfrac{3\sqrt[5]{y^3}}{2}$

c) $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+2}} = \dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{2(x+2)} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{1-2} = 2-\sqrt{2}$

e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{2\sqrt{18}+2\sqrt{12}}{3-2} = 6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

f) $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{6}\cdot(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = \dfrac{12\sqrt{18}-18\sqrt{12}}{12-18} = 3\sqrt{12}-2\sqrt{18} = 6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

Números combinatorios. Binomio de Newton

1.53. Calcula las siguientes operaciones.

a) $\dbinom{252}{250}$ b) $\dbinom{25}{3}+\dbinom{25}{4}$ c) $\dbinom{4}{0}+\dbinom{4}{1}+\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}$ d) $\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{n-1}$

a) $\dbinom{252}{250}=\dbinom{252}{2}=31\,626$

b) $\dbinom{25}{3}+\dbinom{25}{4}=\dbinom{26}{4}=14\,950$

c) $\dbinom{4}{0}+\dbinom{4}{1}+\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}=1+4+6+4=15$

d) $\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{n-1}=\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{3}=\dbinom{n+3}{3}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}=\dfrac{n^3+6n^2+11n+6}{6}$

1.54. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}$ b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}$ c) $\dfrac{\dbinom{n+3}{n}+\dbinom{n+2}{n}}{\dfrac{n+6}{6}}$ d) $\dfrac{2^{n-3}\cdot(n+2)!}{2^{n-1}\cdot\dbinom{n+2}{2}}$

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!} = 6+8\cdot7 = 6+56 = 62$

b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!} = n+(n+2)(n+1) = n+n^2+3n+2 = n^2+4n+2$

c) $\dfrac{\dbinom{n+3}{n}+\dbinom{n+2}{n}}{\dfrac{n+6}{6}} = \dfrac{\dbinom{n+3}{3}+\dbinom{n+2}{2}}{\dfrac{n+6}{6}} = \dfrac{\dfrac{n^3+6n^2+11n+6}{6}+\dfrac{n^2+3n+2}{2}}{\dfrac{n+6}{6}} =$

$= \dfrac{n^3+6n^2+11n+6+3n^2+9n+6}{n+6} = \dfrac{n^3+9n^2+20n+12}{n+6} = (n+1)(n+2) = n^2+3n+2$

d) $\dfrac{2^{n-3}\cdot(n+2)!}{2^{n-1}\cdot\dbinom{n+2}{2}} = \dfrac{2^{n-3-n+1}(n+2)!}{\dfrac{(n+2)!}{2!\cdot n!}} = 2^{-2}\cdot2\cdot n! = \dfrac{n!}{2}$

1.55. (TIC) Realiza los desarrollos de los siguientes binomios.

a) $(2 + x)^4$

b) $\left(2 - \dfrac{x}{3}\right)^3$

c) $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x^2}\right)^5$

d) $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^6$

e) $\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2$

f) $\left(2 - 3\sqrt{3}\right)^3$

g) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)^4$

h) $\left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^3$

a) $(2 + x)^4 = \binom{4}{0} \cdot 2^4 + \binom{4}{1} \cdot 2^3 \cdot x + \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot x^2 + \binom{4}{3} \cdot 2 \cdot x^3 + \binom{4}{4} \cdot x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

b) $\left(2 - \dfrac{x}{3}\right)^3 = \binom{3}{0} \cdot 2^3 - \binom{3}{1} \cdot 2^2 \cdot \dfrac{x}{3} + \binom{3}{2} \cdot 2 \cdot \left(\dfrac{x}{3}\right)^2 - \binom{3}{3} \cdot \left(\dfrac{x}{3}\right)^3 = 8 - 4x + \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{1}{27}x^3$

c) $\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x^2}\right)^5 = \binom{5}{0} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^4 \cdot \dfrac{2}{x^2} + \binom{5}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^2 + \binom{5}{3} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^3 + \binom{5}{4} \cdot \dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^4 + \binom{5}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{x^2}\right)^5 =$

$= \dfrac{x^5}{32} + 5 \cdot \dfrac{x^4}{16} \cdot \dfrac{2}{x^2} + 10 \cdot \dfrac{x^3}{8} \cdot \dfrac{4}{x^4} + 10 \cdot \dfrac{x^2}{4} \cdot \dfrac{8}{x^6} + 5 \cdot \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{16}{x^8} + \dfrac{32}{x^{10}} = \dfrac{x^5}{32} + \dfrac{5x^2}{8} + \dfrac{5}{x} + \dfrac{20}{x^4} + \dfrac{40}{x^7} + \dfrac{32}{x^{10}}$

d) $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^6 = \binom{6}{0} \cdot (2x^2)^6 - \binom{6}{1} \cdot (2x^2)^5 \cdot \dfrac{3}{x} + \binom{6}{2} \cdot (2x^2)^4 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^2 - \binom{6}{3} \cdot (2x^2)^3 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^3 + \binom{6}{4} \cdot (2x^2)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^4 - \binom{6}{5} \cdot 2x^2 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^5 + \binom{6}{6} \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^6 =$

$= 64x^{12} - 576x^9 + 2160x^6 - 4320x^3 + 4860 - \dfrac{2916}{x^3} + \dfrac{729}{x^6}$

e) $\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 8 + 4\sqrt{2} = 9 + 4\sqrt{2}$

f) $\left(2 - 3\sqrt{3}\right)^3 = 8 - 3 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 27 - 81\sqrt{3} = 170 - 117\sqrt{3}$

g) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)^4 = \left(\dfrac{2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}\right)^4 = \dfrac{256}{4} = 64$

h) $\left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^3 = 125 \cdot 2\sqrt{2} - 3 \cdot 50 \cdot 2\sqrt{3} + 3 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 12 - 24\sqrt{3} = 430\sqrt{2} - 324\sqrt{3}$

1.56. Calcula el término que se indica en cada uno de los siguientes desarrollos.

a) El quinto término de $(2 + x)^8$

b) El tercer término de $\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{x}\right)^6$

c) El último término de $(2a^2b - 3a^3)^7$

a) $T_5 = \binom{8}{4} 2^4 \cdot x^4 = 70 \cdot 16 \cdot x^4 = 1120x^4$

b) $T_3 = \binom{6}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{3}{x}\right)^2 = 15 \cdot \dfrac{16}{81} \cdot \dfrac{9}{x^2} = \dfrac{80}{3x^2}$

c) $T_8 = -\binom{7}{7} \cdot (3a^3)^7 = -2187a^{21}$

1.57. Aplicando la definición, calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \dfrac{1}{8}$ c) $\log \dfrac{1}{1000}$ e) $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right)$ g) $\log_{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}\right)^3$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \dfrac{1}{3}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ f) $\log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{9}\right)$ h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$

a) $\log_2 \dfrac{1}{8} = x \Rightarrow 2^x = \dfrac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \dfrac{1}{3} = x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{9}\right)^x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 9^{-x} = 3^{-1} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{-1} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

c) $\log \dfrac{1}{1000} = x \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

e) $\log_{\sqrt{8}}\left(2\sqrt{2}\right) = x \Rightarrow \left(\sqrt{8}\right)^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{3x}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

f) $\log_{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{9}\right) = x \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^x = 3^{-2} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-2} \Rightarrow x = -4$

g) $\log_{\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}\right)^3 = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} \Rightarrow x = 9$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64} = x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 2^{\frac{6}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^2 \Rightarrow x = -2$

1.58. Calcula, si es posible, el valor de x en cada una de las siguientes expresiones.

a) $\log_x 8 = -3$ c) $\log_3(-81) = x$ e) $\log_x \sqrt{2} = 0$ g) $\log_3 x = -1$

b) $\log_{-3} x = 9$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2$ f) $\log_1 2 = x$ h) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$

a) $\log_x 8 = -3 \Rightarrow x^{-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_{-3} x = 9$. No está definido.

c) $\log_3(-81) = x$. No está definido.

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2 \Rightarrow x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = 2$

e) $\log_x \sqrt{2} = 0$. No existe x.

f) $\log_1 2 = x$. No está definido.

g) $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

h) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{a}\right)^x = a^2 \Rightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow x = -2$

1.59. Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y que $\log 3 \approx 0{,}477$, calcula los logaritmos decimales de los siguientes números.

a) 250 b) 0,72 c) 5,4 d) $\sqrt{18}$ e) $\sqrt[4]{6}$ f) 2,4

a) $\log 250 = \log \dfrac{1000}{4} = \log 1000 - \log 4 = 3 - \log 2^2 = 3 - 2\log 2 \approx 2{,}398$

b) $\log 0{,}72 = \log \dfrac{72}{100} = \log(2^3 \cdot 3^2) - \log 100 = 3\log 2 + 2\log 3 - 2 \approx -0{,}143$

c) $\log 5{,}4 = \log \dfrac{54}{10} = \log 54 - \log 10 = \log(3^3 \cdot 2) - 1 = 3\log 3 + \log 2 - 1 \approx 0{,}7302$

d) $\log \sqrt{18} = \dfrac{\log 18}{2} = \dfrac{\log(2 \cdot 3^2)}{2} = \dfrac{\log 2 + 2\log 3}{2} \approx 0{,}628$

e) $\log \sqrt[4]{6} = \dfrac{1}{4}\log 6 = \dfrac{1}{4}(\log 2 + \log 3) \approx 0{,}1945$

f) $\log 2{,}4 = \log \dfrac{24}{10} = \log 2^3 + \log 3 - \log 10 = 3\log 2 + \log 3 - 1 \approx 0{,}38$

1.60. Sabiendo que $\log_3 2 \approx 0{,}631$ y que $\log_3 5 \approx 1{,}465$, calcula el valor del logaritmo en base 3 de 150.

$\log_3 150 = \log_3(2 \cdot 3 \cdot 5^2) = \log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5 = 0{,}631 + 1 + 2 \cdot 1{,}465 = 4{,}561$

1.61. Toma logaritmos decimales en las siguientes igualdades y desarrolla las expresiones.

a) $P = 10x^3yz^3$

b) $Q = \dfrac{100x^2}{x + y}$

c) $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2 \cdot y^5}{3z^3}}$

d) $x = a^4 \cdot b^3 \cdot c^{\frac{3}{2}}$

e) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{a \cdot x}$

f) $x \cdot y = \dfrac{(m + 2n) \cdot n^2}{m - 2n}$

a) $P = 10x^3yz^3 \Rightarrow \log P = 1 + 3\log x + \log y + 3\log z$

b) $Q = \dfrac{100x^2}{x + y} \Rightarrow \log Q = 2 + 2\log x - \log(x + y)$

c) $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2 \cdot y^5}{3z^3}} \Rightarrow \log R = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

d) $\log x = 4\log a + 3\log b + \dfrac{3}{2}\log c$

e) $\log y = \dfrac{2}{3}\log x - \log a - \log x = -\log a - \dfrac{1}{3}\log x$

f) $\log x + \log y = \log(m + 2n) + 2\log n - \log(m - 2n)$

1.62. Expresa el valor de E en cada caso sin que aparezcan logaritmos.

a) $\log E = 2 - 3\log x + \log y - 5\log z$

b) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

c) $\log E = \log(x - 2y) + \log(x + 2y)$

d) $\log E = 3\log(x + 10) - \log\dfrac{(2x + 20)}{3} + \log\dfrac{3}{2}$

a) $\log E = \log 100 - \log x^3 + \log y - \log z^5 = \log\dfrac{100y}{x^3 \cdot z^5} \Rightarrow E = \dfrac{100y}{x^3 \cdot z^5}$

b) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z \Rightarrow E = \dfrac{8y^3}{x^4z^2}$

c) $\log E = \log(x - 2y) + \log(x + 2y) \Rightarrow E = (x - 2y) \cdot (x + 2y) = x^2 - 4y^2$

d) $\log E = 3\log(x + 10) - \log\dfrac{(2x + 20)}{3} + \log\dfrac{3}{2} \Rightarrow E = \dfrac{9 \cdot (x + 10)^3}{2 \cdot (2x + 20)} = \dfrac{9}{4}(x + 10)^2$

1.63. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 20$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5}$

c) $\log_{0,5} 60$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3$

e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

f) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2}$

a) $\log_3 20 = \dfrac{\log 20}{\log 3} = 2{,}727$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5} = \dfrac{\log\frac{7}{5}}{\log\frac{1}{4}} = -0{,}243$

c) $\log_{0,5} 60 = \dfrac{\log 60}{\log 0{,}5} = -5{,}907$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3 = \dfrac{\log 3}{\log\sqrt{2}} = 3{,}17$

e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \dfrac{\log\sqrt{3}}{\log\sqrt{2}} = 1{,}585$

f) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2} = \dfrac{\log\sqrt[3]{2}}{\log\frac{2}{5}} = -0{,}252$

1.64. Calcula el valor de x en cada caso.

a) $2500 = 2000 \cdot 1{,}05^x$

b) $20 = \log_x 5 + 15$

c) $2 \cdot 10^6 = x^{12}$

d) $0{,}025 = 0{,}5 \cdot e^x$

e) $3 \cdot 10^{-5} = 2^{-50x}$

f) $\log_x 5 + 1 = \log_x 2$

a) $1{,}05^x = \dfrac{2500}{2000} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow \log 1{,}05^x = \log 1{,}25 \Rightarrow x \log 1{,}05 = \log 1{,}25 \Rightarrow x = \dfrac{\log 1{,}25}{\log 1{,}05} = 4{,}574$

b) $5 = \log_x 5 \Rightarrow x^5 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{5} = 1{,}38$

c) $x = \sqrt[12]{2 \cdot 10^6} = 3{,}35$

d) $e^x = \dfrac{0{,}025}{0{,}5} = 0{,}05 \Rightarrow x = \ln 0{,}05 = -2{,}996$

e) $\log(3 \cdot 10^{-5}) = -50x \cdot \log 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log(3 \cdot 10^{-5})}{-50\log 2} = 0{,}3$

f) $\log_x 5 + \log_x x = \log_x 2 \Rightarrow \log_x 5x = \log_x 2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

PROBLEMAS

1.65. Al realizar una encuesta sobre el interés de los habitantes de una localidad en relación con los equipos informáticos, se observó que exactamente el número de encuestados que contestaron que en su casa había más de un ordenador era el 40,454545…% del total.

¿Cuántas personas formaban parte de la muestra si se sabe que eran menos de 300?

$$N = \frac{40{,}4545...}{100} = 0{,}40454545... \Rightarrow \begin{cases} 10\,000N = 4045{,}454545... \\ 100N = 40{,}454545... \end{cases} \Rightarrow N = \frac{4005}{9900} = \frac{89}{220}$$

Para calcular el número de encuestados que contestaron que tenían más de un ordenador, se debe multiplicar el total por la fracción irreducible $\dfrac{89}{220}$. Por tanto, el número total de encuestados debe ser múltiplo de 220 y, al ser menor que 300, es exactamente 220.

1.66. En una clase se realiza una encuesta sobre las aficiones deportivas. El 92,592592592…% del total de la clase contesta que practica algún deporte, y la mitad, que le gusta el fútbol.

Si la clase tiene como máximo 35 alumnos, razona si son posibles los datos anteriores.

$$N = \frac{92{,}592592...}{100} = 0{,}92592592... \Rightarrow \begin{cases} 1000N = 925{,}925925... \\ N = 0{,}925925... \end{cases} \Rightarrow N = \frac{925}{999} = \frac{89}{220} = \frac{25}{27}$$

Para calcular el número de alumnos que contestaron que practican un deporte, se debe multiplicar el total por la fracción irreducible $\dfrac{25}{27}$. Por tanto, el número total de encuestados debe ser múltiplo de 27.

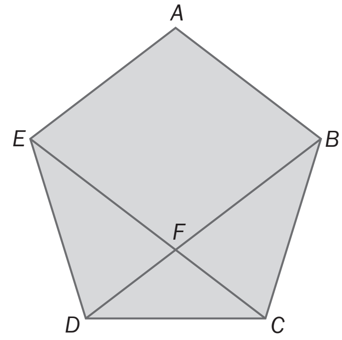
Pero también debe ser par, ya que la mitad afirma que le gusta el fútbol.

En consecuencia, el mínimo número de alumnos en la clase es de 54. Por tanto, los datos no son correctos.

1.67. Calcula de forma exacta el número irracional que representa la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado. Comprueba que se trata del número áureo.

Para ello, sigue los siguientes pasos:

- **Demuestra que los triángulos *DFC* y *DBC* son semejantes calculando sus ángulos.**
- **Demuestra que el triángulo *BFC* es isósceles.**
- **Aplicando el teorema de Tales, calcula la relación entre los lados que corresponden a la diagonal y el lado del pentágono.**



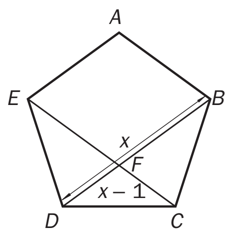
El ángulo interior de un pentágono regular es $\frac{(2 \cdot 5 - 4) \cdot 90°}{5} = 108°$.

El triángulo *DBC* es isósceles, y sus ángulos miden 108°, 36° y 36°.

El triángulo *DFC* es también isósceles, y sus ángulos miden 36°, 36° y 108°. Por tanto, *DFC* y *DBC* son semejantes.

El ángulo *BCF* mide 108° − 36° = 72°. El ángulo *BFC* mide 180° − 108° = 72°. Por tanto, *BFC* es isósceles.

Suponiendo un pentágono regular de lado 1:



Aplicando el teorema de Tales a los triángulos semejantes:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DC}{DF} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(En la ecuación de segundo grado, la otra solución es negativa y no tiene sentido.)

$$x = \frac{DB}{DC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

1.68. Demuestra que el número áureo verifica las siguientes propiedades.

a) $\phi^2 = \phi + 1$ **b)** $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ **c)** $\phi^3 = \frac{\phi + 1}{\phi + 1}$

a) $\phi^2 = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \phi$

b) $\phi^2 = 1 + \phi \Rightarrow \frac{\phi^2}{\phi} = \frac{1 + \phi}{\phi} \Rightarrow \phi = \frac{1}{\phi} + 1 \Rightarrow \phi - 1 = \frac{1}{\phi}$

c) $\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (1 + \phi) \cdot \phi = \frac{1 + \phi}{\frac{1}{\phi}} = \frac{\phi + 1}{\phi - 1}$

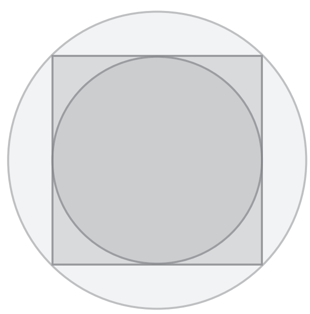
1.69. El área de un cuadrado es de 10,5 cm². Calcula las áreas de sus círculos inscrito y circunscrito, redondeando los resultados con dos cifras decimales.

El lado del cuadrado mide $x = \sqrt{10{,}5} = 3{,}24$ cm.

La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2 \cdot 10{,}5} = 4{,}58$ cm.

Área del círculo inscrito: $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{3{,}24}{2}\right)^2 = 8{,}2 \text{ cm}^2$

Área del círculo circunscrito: $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{4{,}58}{2}\right)^2 = 16{,}5 \text{ cm}^2$



1.70. Calcula la medida de la diagonal de un paralelepípedo cuyos lados miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{5}$ cm, respectivamente. ¿Qué tipo de número es el resultado?

Aproxima el resultado redondeando a dos decimales y calcula los errores absoluto y relativo cometidos.

$d = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{23}$ cm. La medida de la diagonal es un número irracional.

Redondeando, $\sqrt{23} \approx 4{,}80$ cm.

Error absoluto: $E_a = \left|\sqrt{23} - 4{,}80\right| = 0{,}004$

Error relativo: $E_r = \dfrac{0{,}004}{4{,}80} = 0{,}0008$

1.71. La diagonal de un cubo mide exactamente 1,252 cm. Halla la superficie del cubo aproximando su diagonal por 1,25 cm. Calcula el error relativo cometido.

Usando el valor aproximado: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow 1{,}25 = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{1{,}25}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 6a^2 = \dfrac{6 \cdot 1{,}25^2}{3} = 3{,}125 \text{ cm}^2$

Usando el valor real: $a = \dfrac{1{,}252}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = 6a^2 = \dfrac{6 \cdot 1{,}252^2}{3} = 3{,}135008 \text{ cm}^2$

Error relativo: $E_r = \dfrac{3{,}135008 - 3{,}125}{3{,}135008} = 0{,}003$

1.72. En la tabla siguiente aparecen las medidas de una niña y de una torre.

Altura	
Real	**Obtenida con instrumento de medida**
92 cm	90 cm
38 m	37 m

Indica cuál de las dos medidas ha sido más precisa y justifica tu respuesta.

En el primer caso, el error relativo es $\dfrac{2}{92} = \dfrac{1}{46}$. En el segundo, el error relativo es $\dfrac{1}{38}$.

La medida de la niña es más precisa, ya que el error relativo es menor.

1.73. Javier pretende colocar césped artificial en un jardín cuadrado del que sabe que su lado está comprendido entre 15 y 16 metros.

El coste de cada metro cuadrado de dicho césped asciende a 30 euros y 10 céntimos, y el presupuesto con el que cuenta es de 7000 euros.

Calcula los costes máximo y mínimo, y decide si la obra podrá ser emprendida.

$15 \leqslant \text{lado} \leqslant 16 \Rightarrow 225 \leqslant \text{área} \leqslant 256 \Rightarrow 6772{,}5 \leqslant \text{coste} \leqslant 7705{,}6$

Por tanto, el presupuesto podría ser insuficiente.

1.74. El radio de la rueda de una bicicleta tiene una longitud comprendida entre 19 y 20 cm.

Calcula los números máximo y mínimo de vueltas completas que dará al recorrer una distancia de 20 km.

$19 \leqslant r \leqslant 20 \Rightarrow 119{,}38 < \text{longitud rueda} < 125{,}67 \Rightarrow \dfrac{2\,000\,000}{125{,}67} < \text{n.º de vueltas} < \dfrac{2\,000\,000}{119{,}38} \Rightarrow$

$\Rightarrow 15\,914 < \text{vueltas} < 16\,754$

1.75. Si un automóvil que costó 14 425 euros se deprecia un 15% anual, ¿cuánto valdrá a los 6 años? ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 3600 euros?

A los 6 años, el coche valdrá $V_6 = 14\,425 \cdot 0{,}85^6 = 5440{,}38$ euros.

Para calcular dentro de cuántos años su valor será inferior a 3600 euros, se resuelve la siguiente inecuación:

$$14\,425 \cdot 0{,}85^t < 3600 \Rightarrow 0{,}85^t < \frac{3600}{14\,425} \Rightarrow t \cdot \log 0{,}85 < \log\frac{3600}{14\,425} \Rightarrow t > 8{,}54$$

Deberán pasar, al menos, 9 años.

1.76. Se llama unidad astronómica (UA) a la distancia media que separa la Tierra del Sol y que equivale a $1{,}49598 \cdot 10^8$ km.

a) Sabiendo que el 1 de enero la distancia entre la Tierra y el Sol es de $1{,}471 \cdot 10^8$ km, exprésala en unidades astronómicas.

b) Sabiendo que la distancia media entre Júpiter y el Sol es de 5,2 UA, exprésala en kilómetros.

a) $\dfrac{1{,}471 \cdot 10^8}{1{,}49598 \cdot 10^8} = 0{,}9833$ UA

b) $5{,}2 \times 1{,}49598 \cdot 10^8 = 7{,}779 \cdot 10^8$ km

1.77. Una población de conejos aumenta anualmente en un 50%. Si en el momento inicial había 100 conejos:

a) ¿Cuántos habrá al cabo de 10 años?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?

c) Si debido a una enfermedad, la tasa de crecimiento cayera al 10%, ¿cuánto tiempo tardaría la población inicial en triplicarse?

a) $t = 10 \Rightarrow P(10) = 100 \cdot 1{,}5^{10} = 5766{,}5 \Rightarrow$ Habrá 5766 conejos

b) $100 \cdot 1{,}5^t = 30\,000 \Rightarrow 1{,}5^t = 300 \Rightarrow t = \dfrac{\log 300}{\log 1{,}5} = 14{,}06$ años

c) $100 \cdot 1{,}1^t = 300 \Rightarrow 1{,}1^t = 3 \Rightarrow t = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}1} = 11{,}53$ años

1.78. El valor de una vivienda, cuando han pasado t años desde su adquisición, es $V = k \cdot e^{\alpha \cdot t}$.

La vivienda se compró por 250 000 euros, y a los 10 años valía 450 000.

a) Calcula el valor de k y α.

b) Calcula el valor de la vivienda a los 20 años.

c) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir desde la compra, para que el valor de la vivienda se triplique?

d) Un trabajador que gana el salario medio puede comprar una vivienda de 90 metros cuadrados. Si el salario medio aumenta un 3% cada año, al cabo de 10 años, ¿cuál será la superficie de la vivienda que podría comprar el mismo trabajador? (supón que el resto de sus condiciones de vida no han variado.)

a) $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow k \cdot e^{\alpha \cdot 0} = k = 250\,000 \\ t = 10 \Rightarrow k \cdot e^{10\alpha} = 450\,000 \end{cases} \Rightarrow k = 250\,000 \Rightarrow e^{10\alpha} = \dfrac{450\,000}{250\,000} = 1{,}8 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{10}\ln 1{,}8 = 0{,}0588 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 250\,000 \cdot e^{0{,}0588t}$

b) $V = 250\,000 \cdot e^{0{,}0588 \cdot 20} \approx 810\,000$

c) $3V = V \cdot e^{0{,}0588t} \Rightarrow t = \dfrac{\ln 3}{0{,}0588} = 18{,}68$ años

d) Si el salario medio inicial es S_0, dentro de 10 años dispondrá de un salario $S = S_0 \cdot 1{,}03^{10} = 1{,}34 \cdot S_0$.

Inicialmente podía pagar con su salario 90 m^2, por lo que el precio del m^2 salía por $V_0 = \dfrac{S_0}{90}$.

Después de 10 años, el m^2 sale por $V = \dfrac{S_0}{90} \cdot e^{0{,}0588 \cdot 10} = 0{,}02\ S_0$.

Con su salario podrá comprar un piso de $\dfrac{1{,}34\ S_0}{0{,}02\ S_0} = 67$ m^2.

1.79. Según la escala de Richter, las magnitudes de los terremotos se obtienen mediante la fórmula:

$$M = \frac{\log E}{1{,}44} - 3{,}64$$

siendo E la energía liberada por el seísmo en julios.

La energía liberada por un terremoto de magnitud 6,4 fue 200 veces la energía liberada por una de sus réplicas. Calcula la magnitud de esta réplica.

Energía del terremoto: $6{,}4 = \dfrac{\log E}{1{,}44} - 3{,}64 \Rightarrow \log E = 14{,}4577 \Rightarrow E = 2{,}87 \cdot 10^{14}$ julios

Energía de la réplica: $E_r = \dfrac{2{,}87 \cdot 10^{14}}{200} = 1{,}43 \cdot 10^{12}$ julios

Magnitud de la réplica: $M_r = \dfrac{\log(1{,}43 \cdot 10^{12})}{1{,}44} - 3{,}64 = 4{,}8$

PROFUNDIZACIÓN

1.80. Sea a un número positivo y diferente de la unidad. Demuestra que la suma de a y su inverso es siempre superior a 2.

$a > 0$ y $a \neq 1$

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} - 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = a + \frac{1}{a} - 2 > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 2$$

1.81. Demuestra que si a, b y c son números positivos y diferentes, entonces se verifica la siguiente desigualdad.

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 9$$

Utilizando el ejercicio anterior:

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} =$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

1.82. Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

Supongamos que es racional y que, por tanto, lo podemos escribir mediante una fracción irreducible:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow a^2 \text{ es múltiplo de 3} \Rightarrow a \text{ es múltiplo de 3}$$

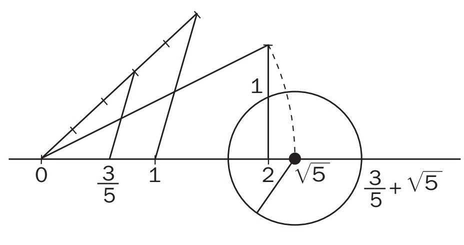
$a = 3\lambda \Rightarrow a^2 = 9\lambda^2 \Rightarrow 3b^2 = 9\lambda^2 \Rightarrow b^2 = 3\lambda^2 \Rightarrow b^2$ es múltiplo de $3 \Rightarrow b$ es múltiplo de 3.

Como a y b son ambos múltiplos de 3, la fracción $\dfrac{a}{b}$ no es irreducible.

Se ha llegado a una contradicción con lo supuesto, lo cual quiere decir que es falso; por tanto, $\sqrt{3}$ no se puede escribir como una fracción; es decir, es irracional.

1.83. Representa en la recta real el número irracional $\dfrac{3}{5} + \sqrt{5}$.

Se dibujan $\dfrac{3}{5}$ y $\sqrt{5}$ y se suman con ayuda del compás.

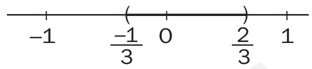


1.84. Desarrolla la expresión $|1 + |x||$ omitiendo los valores absolutos.

Como $1 + |x| > 0 \Rightarrow |1 + |x|| = 1 + |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1.85. Representa en la recta real el conjunto de valores reales x tales que $\left|2x - \frac{1}{3}\right| < 1$ y determínala mediante un intervalo.

$$\left|2x - \frac{1}{3}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{2x - \frac{1}{3}}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



1.86. En la siguiente tabla se representan de distinta forma varios conjuntos de números reales. Completa la tabla, representando, cuando sea posible, los diferentes conjuntos de cuatro formas diferentes.

Intervalos	Desigualdad	Valor absoluto	Gráficamente
	$\{-3 \leq x \leq 1\}$		
$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$			
		$\|x\| > 3$	
			0 5

Intervalos	Desigualdad	Valor absoluto	Gráficamente
$[-3, 1]$	$-3 \leq x \leq 1$	$\|x + 1\| \leq 2$	Falta 354336
$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$	$\{x < 1\} \cup \{x > 2\}$	$\|x - 1{,}5\| > 0{,}5$	Falta 354337
$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$	$\{x < -3\} \cup \{x > 3\}$	$\|x\| > 3$	Falta 354338
$[0, 5]$	$0 \leq x \leq 5$	$\|x - 2{,}5\| \leq 2{,}5$	0 5

1.87. Sabiendo que $\log_2 3$ es un número real comprendido entre 1,58 y 1,59, calcula dos números reales, lo más próximos posible, entre los que se encuentre el valor de $\log_2 27$.

$1{,}58 < \log_2 3 < 1{,}59 \Rightarrow 3 \cdot 1{,}58 < 3\log_2 3 < 3 \cdot 1{,}59 \Rightarrow 4{,}74 < \log_2 27 < 4{,}77$

1.88. Racionaliza el denominador de estas expresiones.

a) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}$

a) $$\frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{4 + 2 + 4\sqrt{2} - 3} = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{3 + 4\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(3 - 4\sqrt{2})}{(3 + 4\sqrt{2})(3 - 4\sqrt{2})} = \frac{6 - 8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{9 - 32} = \frac{-2 - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{-23}$$

b) $$\frac{1}{2 - \sqrt[3]{2}} = \frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{(2 - \sqrt[3]{2}) \cdot (4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{8 + 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{8}} =$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{8 - 2} = -\frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{6}$$

[Aplicando que $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.]

1.89. Calcula dos números enteros y positivos m y n tales que $\sqrt{8+\sqrt{60}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$.

$$\left(\sqrt{8+\sqrt{60}}\right)^2 = \left(\sqrt{m} + \sqrt{n}\right)^2 \Rightarrow 8 + 2\sqrt{15} = m + n + 2\sqrt{m \cdot n} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 8 \\ m \cdot n = 15 \end{cases} \Rightarrow m = 3,\ n = 5$$

1.90. a) Calcula los desarrollos de $(1 + x)^n$ y $(x + 1)^n$.

b) Escribe el coeficiente de x^n en el producto de los polinomios $(1 + x)^n \cdot (x + 1)^n$.

c) Con ayuda de la igualdad:

$$(1 + x)^n \cdot (x + 1)^n = (1 + x)^{2n}$$

y del coeficiente hallado en el apartado anterior, demuestra que:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

a) $(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$

$(x + 1)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}$

b) El coeficiente de x^n en $(1 + x)^n(x + 1)^n$ es $\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$.

c) El término de x^n en el desarrollo $(1 + x)^{2n}$ es $T_k = \binom{2n}{k-1}x^{k-1} \Rightarrow k - 1 = n \Rightarrow k = n + 1$

El coeficiente de x^n en el desarrollo $(1 + x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n+1-1} = \binom{2n}{n}$.

De los apartados *b* y *c* se deduce que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.