



1. Números racionales e irracionales

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente el volumen de un cubo de arista 2 m y escribe el valor exacto de la arista de un cubo de volumen 2 m^3

Solución:

$$V = 2^3 = 8 \text{ m}^3 \quad a = \sqrt[3]{2} \text{ m}$$

● Aplica la teoría

1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a) $5/3$ b) π c) $\sqrt{2}$ d) $1,23456\dots$

Solución:

- a) Racional. b) Irracional.
c) Irracional. d) Irracional.

2. Escribe cinco números racionales.

Solución:

$$9, -5, \frac{2}{3}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{8}$$

3. Escribe cinco números irracionales.

Solución:

$$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \pi, e$$

4. Escribe tres números racionales comprendidos entre $1/3$ y $1/2$

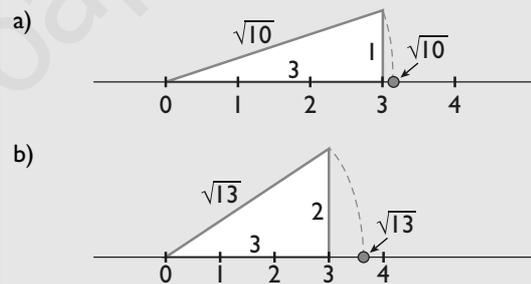
Solución:

$$\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{11}{24}$$

5. Representa gráficamente, de forma exacta:

- a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{13}$

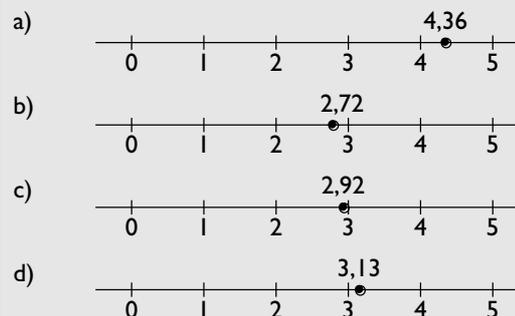
Solución:



6. Representa gráficamente, de forma aproximada:

- a) $\sqrt{19}$ b) e c) $\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[5]{300}$

Solución:



7. Calcula:

- a) $3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{3} : \left(\frac{8}{5} - 7\right)$ d) $\frac{4}{3} \left(\frac{5}{6} - 2 + \frac{3}{8}\right)$

Solución:

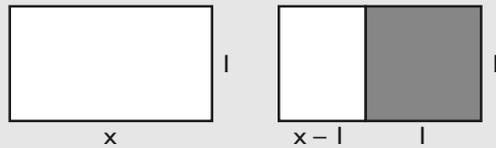
a) 19/6 b) 25/36 c) -20/81 d) -19/18

8. Halla de forma exacta la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm y escribe qué tipo de número es.

Solución: $\sqrt{2}$ cm Es un número irracional.

9. Un rectángulo mide de largo x y de alto 1; por un lado le cortamos un cuadrado de lado 1, y se obtiene un rectángulo semejante.

- a) ¿Cuánto mide x ?
 b) ¿Qué número conocido es x ?
 c) ¿ x es racional o irracional?

Solución:

$$a) \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

La solución negativa $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ no tiene sentido.

La solución es $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- b) Es el número áureo de oro.
 c) Es irracional.

2. La recta real

■ Piensa y calcula

Representa en la recta real, de forma aproximada, los números $\frac{3}{4}$ y $\sqrt{7} = 2,64575131\dots$

Solución:

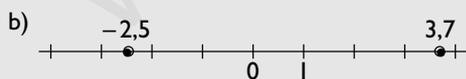
● Aplica la teoría

10. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

a) -3 y 2 b) -2,5 y 3,7

Solución:

$$d(-3, 2) = |2 - (-3)| = 5$$



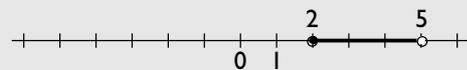
$$d(-2,5; 3,7) = |3,7 - (-2,5)| = 6,2$$

11. Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

a) $[2, 5)$ b) $(-2, 1)$ c) $(-3, +\infty)$ d) $(-\infty, 3]$

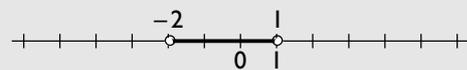
Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x < 5\}$



Intervalo semiabierto o semicerrado.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\}$



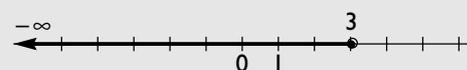
Intervalo abierto.

c) $\{x \in \mathbb{R}; x > -3\}$



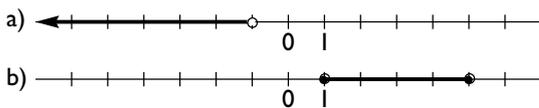
Semirrecta, intervalo abierto.

d) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 3\}$



Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

12. Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos:



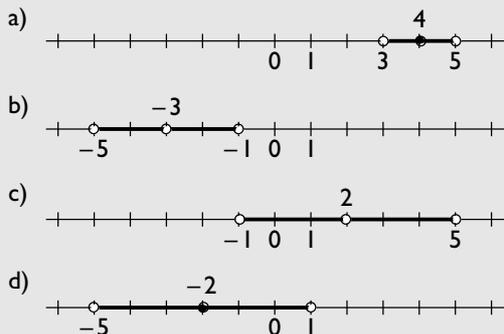
Solución:

- a) $(-\infty, 0)$ b) $[1, 5]$

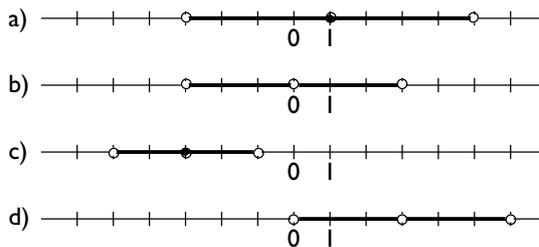
13. Representa gráficamente los siguientes entornos:

- a) $E(4, 1)$ b) $E^*(-3, 2)$ c) $E^*(2, 3)$ d) $E(-2, 3)$

Solución:



14. Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

- a) $E(1, 4)$ b) $E^*(0, 3)$ c) $E(-3, 2)$ d) $E^*(3, 3)$

3. Sucesiones de números reales

■ Piensa y calcula

Escribe tres términos más en las siguientes sucesiones:

- a) 2, 6, 10, 14, ... b) 1, 2, 4, 8, ... c) 3, -3, 3, -3, ... d) 1, 1, 2, 3, 5, ...

Solución:

- a) 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, ... b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... c) 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, ... d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

● Aplica la teoría

15. Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:

- a) 3, 7, 11, 15, ... b) 5, 10, 20, 40, ...
c) 1, 4, 9, 16, 25, ... d) 1, -3, 5, -7, 9, ...

Solución:

- a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...
b) 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, ...
c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...
d) 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, ...

16. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 2^n$ b) $a_n = 2n + 3$
c) $a_n = (-1)^n (n + 1)$ d) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solución:

- a) 2, 4, 8, 16
b) 5, 7, 9, 11
c) -2, 3, -4, 5
d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$

17. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ...
 b) 1, 4, 9, 16, 25, ...

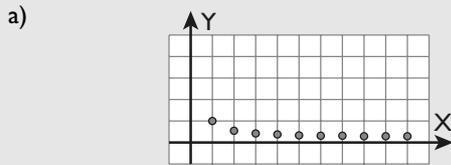
Solución:

- a) $a_n = 2n$ b) $a_n = n^2$

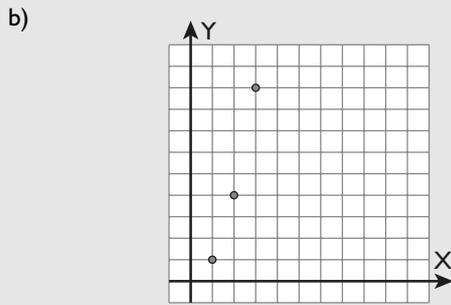
18. Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

- a) $a_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = n^2$
 c) $a_n = \frac{2n + 1}{n}$ d) $a_n = (-1)^n n$

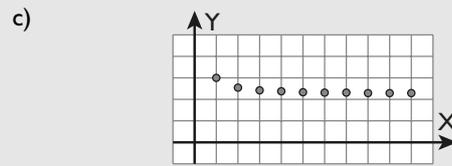
Solución:



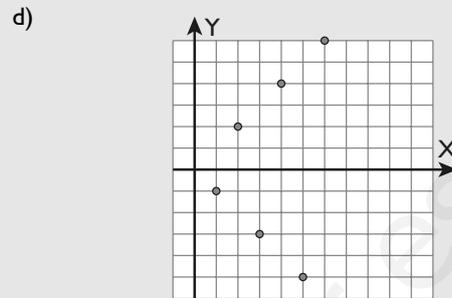
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n} = 2$$



No existe el $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n$

Los valores de la sucesión oscilan de negativo a positivo en cada término haciéndose cada vez más grandes en valor absoluto.

4. Radicales y operaciones

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $\sqrt[3]{8} = x$ b) $\sqrt[4]{x} = 10$ c) $\sqrt[5]{32} = 2$ d) $\sqrt[4]{81} = x$

Solución:

- a) $x = 2$ b) $x = 10000$ c) $x = 5$ d) $x = \pm 3$

● Aplica la teoría

19. Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt[5]{32}$

Solución:

- a) ± 2 b) -5
c) No tiene solución real. d) 2

20. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $7^{3/4}$ b) $5^{-1/4}$ c) $3^{-5/7}$ d) $2^{1/3}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{7^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

21. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[7]{5^2}$ b) $\frac{1}{\sqrt[6]{11^5}}$ c) $\sqrt[5]{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución:

- a) $5^{2/7}$ b) $11^{-5/6}$
c) $3^{1/5}$ d) $2^{-1/3}$

22. Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\sqrt{72}$

Solución:

- a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{2}$

23. Suma los siguientes radicales:

- a) $5\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + \sqrt{98}$ b) $4\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{625} - 2\sqrt[3]{135}$

Solución:

- a) $7\sqrt{2}$ b) $7\sqrt[3]{5}$

24. Opera los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{64}$
c) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{16}$

Solución:

- a) $2\sqrt[3]{30}$ b) $2\sqrt[5]{16}$
c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[5]{3/4}$

25. Las expresiones que están como potencia pásalas a radical y las que están como radical pásalas a potencia:

- a) $(\sqrt[5]{7})^2$ b) $\sqrt[3]{6^5}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $(\sqrt[7]{5})^2$

Solución:

- a) $\sqrt[5]{7^2}$ b) $(\sqrt[3]{6})^5$
c) $(\sqrt[4]{5})^3$ d) $\sqrt[7]{5^2}$

26. Expresa con un solo radical las siguientes expresiones:

- a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt[6]{7}$ d) $\sqrt[12]{5}$

27. Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{7}{\sqrt[5]{13^3}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ d) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

Solución:

- a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{7\sqrt[5]{13^2}}{13}$
c) $\frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$ d) $7 - 4\sqrt{3}$

28. Halla la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 5 m, 4 m y 3 m

Solución:

$$\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ m}$$

5. Logaritmos

■ Piensa y calcula

Halla el valor de x en los siguientes casos:

- a) $2^3 = x$ b) $x^3 = 125$ c) $2^x = 32$ d) $10^3 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:

- a) $x = 8$ b) $x = 5$ c) $x = 5$ d) $x = 1\,000$ e) $x = 10$ f) $x = 6$

● Aplica la teoría

29. Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $2^6 = x$ b) $x^5 = 32$ c) $2^x = 128$
d) $10^6 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000$

Solución:

- a) $x = 64$ b) $x = 2$
c) $x = 7$ d) $x = 1\,000\,000$
e) $x = 10$ f) $x = 3$

30. Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 32$ b) $\log_3 1$ c) $\log_5 1/25$ d) $\log 100$

Solución:

- a) 5 b) 0
c) -2 d) 2

31. Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 50$ b) $\log_3 36$
c) $\log_5 98,75$ d) $\log 5\,678,24$

Solución:

- a) 5 b) 3
c) 2 d) 3

32. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos:

- a) $\log 725,263$ b) $\log 0,00356$
c) $L 24,6845$ d) $L 0,000765$

Solución:

- a) 2,8605
b) -2,4486
c) 3,2062
d) -7,1756

33. Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

- a) $\log 4$ b) $\log 5$ c) $\log 8$ d) $\log \sqrt{5}$

Solución:

- a) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$
b) $\log 5 = \log 10/2 = 1 - \log 2 = 0,6990$
c) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0,9030$
d) $\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} 0,699 = 0,3495$

34. Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla:

- a) $\log 2,5^{17}$ b) $\log 0,0234^{-25}$
c) $\log \sqrt[5]{87,012}$ d) $\log \sqrt[6]{0,0987}$

Solución:

- a) 6,7650
b) 40,7696
c) 0,3879
d) -0,1676

35. Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log_2 51,27$ b) $\log_3 8,431$
c) $\log_5 0,034$ d) $\log_7 1\,000$

Solución:

- a) 5,6800
b) 1,9406
c) -2,1010
d) 3,5499

Ejercicios y problemas

1. Números racionales e irracionales

36. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{3}{7}$ c) e d) $\sqrt{25}$

Solución:

- a) Irracional. b) Racional.
c) Irracional. d) Racional.

37. Escribe tres números racionales comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$

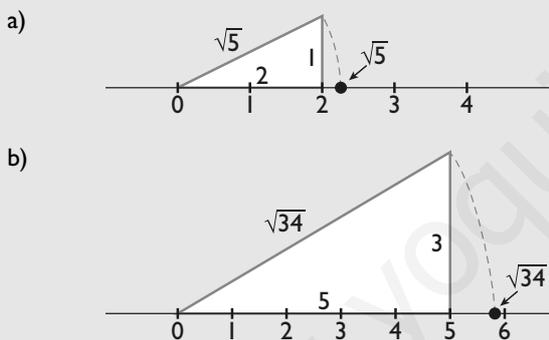
Solución:

$$\frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}$$

38. Representa gráficamente de forma exacta:

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{34}$

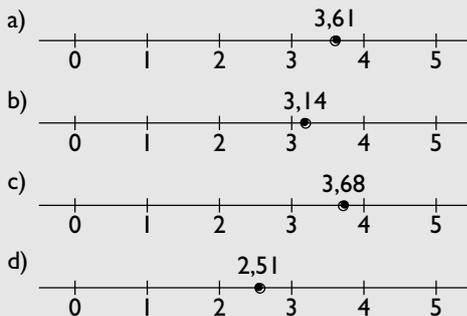
Solución:



39. Representa gráficamente de forma aproximada:

- a) $\sqrt{13}$ b) π
c) $\sqrt[3]{50}$ d) $\sqrt[5]{100}$

Solución:



40. Calcula:

- a) $\frac{3}{8} + 2 - \frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6}$
c) $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{6} - 5 + \frac{1}{2}\right)$ d) $\frac{5}{3} \left(\frac{1}{8} - 3 + \frac{13}{6}\right)$

Solución:

- a) $47/24$ b) $-1/24$ c) $-9/52$ d) $-85/72$

41. Halla de forma exacta la arista de un cubo de volumen 5 cm^3 y escribe qué tipo de número es.

Solución:

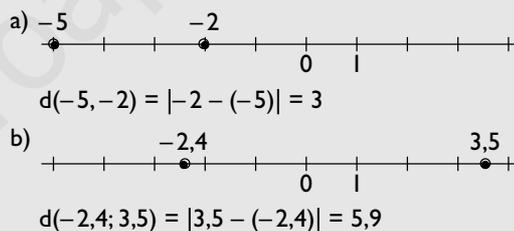
$\sqrt[3]{5} \text{ cm}$ es un número irracional.

2. La recta real

42. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

- a) -5 y -2 b) $-2,4$ y $3,5$

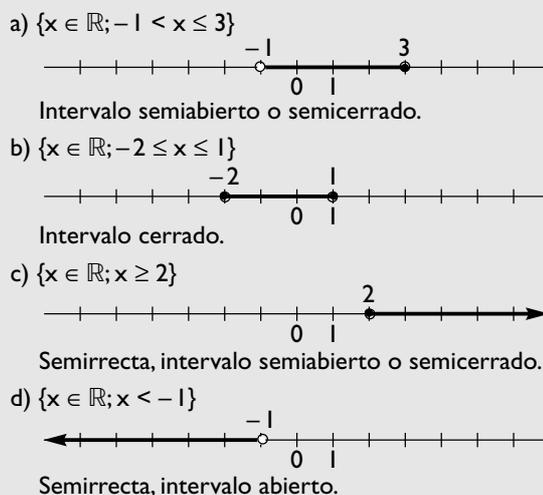
Solución:



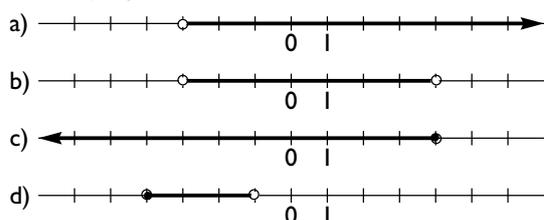
43. Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

- a) $(-1, 3]$ b) $[-2, 1]$
c) $[2, +\infty)$ d) $(-\infty, -1)$

Solución:



44. Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos y clasifícalos:



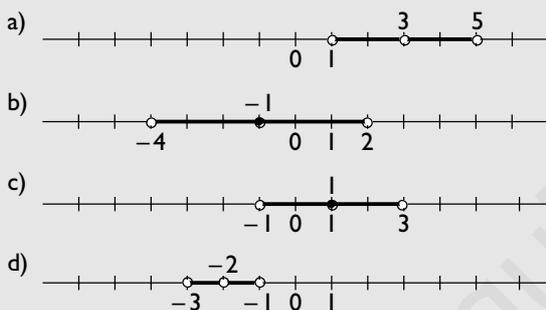
Solución:

- a) $(-3, +\infty)$ semirrecta, intervalo abierto.
- b) $(-3, 4)$ intervalo abierto.
- c) $(-\infty, 4]$ semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.
- d) $[-4, -1)$ intervalo semiabierto o semicerrado.

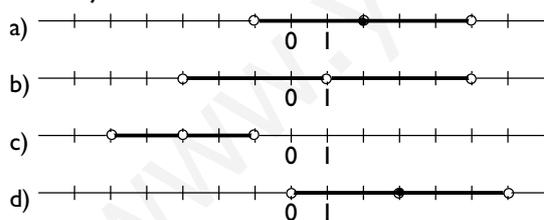
45. Representa gráficamente los siguientes entornos:

- a) $E^*(3, 2)$
- b) $E(-1, 3)$
- c) $E(1, 2)$
- d) $E^*(-2, 1)$

Solución:



46. Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

- a) $E(2, 3)$
- b) $E^*(1, 4)$
- c) $E^*(-3, 2)$
- d) $E(3, 3)$

3. Sucesiones de números reales

47. Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:

- a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
- b) $5, -7, 9, -11, 13, \dots$
- c) $3, 1, -1, -3, -5, \dots$
- d) $2, 5, 10, 17, \dots$

Solución:

- a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$
- b) $5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19, \dots$
- c) $3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11, \dots$
- d) $2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \dots$

48. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 5 + \frac{1}{10^n}$
- b) $a_n = 2n + 1$
- c) $a_n = (-1)^n n(n + 1)$
- d) $a_n = \frac{2n - 3}{n + 1}$

Solución:

- a) $5, 1; 5, 01; 5, 001; 5, 0001; \dots$
- b) $3, 5, 7, 9, \dots$
- c) $-2, 6, -12, 20, \dots$
- d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, \dots$

49. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots$

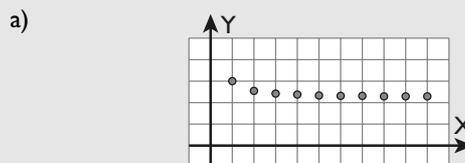
Solución:

- a) $a_n = 2n - 1$
- b) $a_n = \frac{1}{3n - 1}$

50. Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

- a) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$
- b) $a_n = 1 + 2n - \frac{1}{4}n^2$
- c) $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$
- d) $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n}$

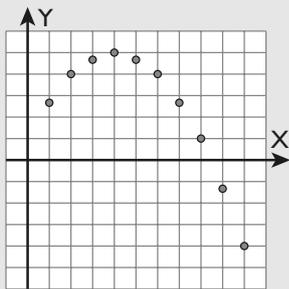
Solución:



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

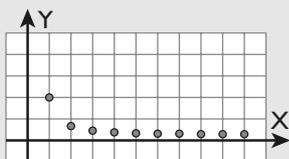
Ejercicios y problemas

b)



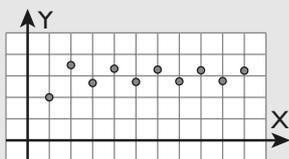
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 2n - \frac{1}{4}n^2 \right) = -\infty$$

c)



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$$

d)



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + (-1)^n \frac{1}{n} \right) = 3$$

4. Radicales y operaciones

51. Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\sqrt[7]{-128}$ d) $\sqrt[5]{243}$

Solución:

- a) ± 5 b) No tiene solución real. c) -2 d) 3

52. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $5^{-2/3}$ b) $3^{1/5}$ c) $2^{3/4}$ d) $7^{-1/5}$

Solución:

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ b) $\sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[4]{2^3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{7}}$

53. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{11}}$ c) $\sqrt[3]{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3^5}}$

Solución:

- a) $7^{3/5}$ b) $11^{-1/4}$ c) $5^{1/3}$ d) $3^{-5/3}$

54. Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{75}$

Solución:

- a) $4\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

55. Suma los siguientes radicales:

- a) $4\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$
b) $5\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{250}$

Solución:

- a) $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{2}$

56. Multiplica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{24}$ b) $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{128}$

Solución:

- a) $2\sqrt[4]{90}$ b) $2\sqrt[6]{2^4}$

57. Divide los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[5]{40} : \sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt[6]{24} : \sqrt[6]{36}$

Solución:

- a) $\sqrt[5]{8}$ b) $\sqrt[6]{2/3}$

58. Transforma los radicales siguientes. Los que están como potencia pásalos a radical y los que están como radical pásalos a potencia:

- a) $(\sqrt[3]{5})^2$ b) $\sqrt[5]{7^2}$ c) $\sqrt[7]{3^5}$ d) $(\sqrt[11]{13})^5$

Solución:

- a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $(\sqrt[5]{7})^2$ c) $(\sqrt[7]{3})^5$ d) $\sqrt[11]{13^5}$

59. Expresa en forma de un solo radical las siguientes expresiones:

- a) $\sqrt{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{3}$ b) 2 c) $\sqrt[6]{5}$ d) $\sqrt[12]{7}$

60. Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{5^2}}$
c) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

Solución:

- a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{3\sqrt[3]{5^5}}{5}$ c) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ d) $\frac{27+10\sqrt{2}}{23}$

5. Logaritmos

61. Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $3^3 = x$ b) $x^3 = 125$ c) $3^x = 81$
 d) $10^3 = x$ e) $x^2 = 100$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:

- a) $x = 27$ b) $x = 5$ c) $x = 4$
 d) $x = 1\,000$ e) $x = \pm 10$ f) $x = 6$

62. Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 1$ b) $\log_3 \frac{1}{9}$ c) $\log_5 25$ d) $\log 0,0001$

Solución:

- a) 0 b) -2 c) 2 d) -4

63. Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 27$ b) $\log_3 52,6$
 c) $\log_5 18,27$ d) $\log 78,24$

Solución:

- a) 4 b) 3 c) 1 d) 1

64. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log 86,233$ b) $\log 0,0874$
 c) $\log 765,023$ d) $\log 0,01234$

Solución:

- a) 1,9357 b) -1,0585
 c) 6,6399 d) -4,3949

65. Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log 5,7^{12}$ b) $\log 0,567^{-15}$
 c) $\log \sqrt[4]{345,98}$ d) $\log \sqrt[7]{0,00345}$

Solución:

- a) 9,0705 b) 3,6963
 c) 0,6348 d) -0,3517

66. Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log_2 7,3456$ b) $\log_3 45,987$
 c) $\log_5 0,3054$ d) $\log_7 0,056712$

Solución:

- a) 2,8769 b) 3,4847
 c) -0,7370 d) -1,4748

Para ampliar

67. ¿Qué números enteros tienen inverso entero?

Solución:

El 1 y el -1; cada uno es inverso de sí mismo.

68. Halla el opuesto y el inverso de:

- a) $\frac{2}{3}$ b) -5

Solución:

- a) El opuesto es $-\frac{2}{3}$ y el inverso es $\frac{3}{2}$
 b) El opuesto es 5 y el inverso es $-\frac{1}{5}$

69. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a) $5 - \sqrt{3}$ b) $\frac{3}{7} - \frac{3}{5}$ c) $\pi + e$ d) $\sqrt[3]{-64}$

Solución:

- a) Irracional. b) Racional.
 c) Irracional. d) Racional.

70. Escribe en forma de intervalo las siguientes desigualdades:

- a) $2 \leq x \leq 5$ b) $x > 3$ c) $-3 < x \leq 2$ d) $x < 4$

Solución:

- a) $[2, 5]$ b) $(3, +\infty)$
 c) $(-3, 2]$ d) $(-\infty, 4)$

71. Escribe en forma de entorno las siguientes desigualdades:

- a) $|x - 2| < 3$ b) $|x| < 2,5$
 c) $|x + 3| < 2$ d) $|x + 1| < 3,2$

Solución:

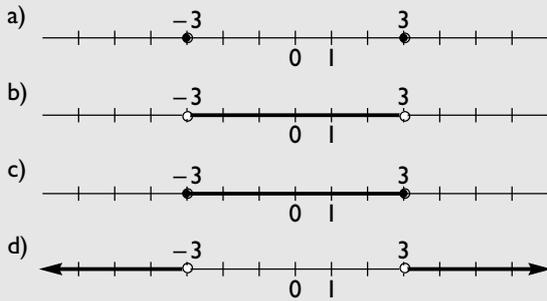
- a) $E(2, 3)$ b) $E(0; 2,5)$
 c) $E(-3, 2)$ d) $E(-1; 3,2)$

72. Representa gráficamente los conjuntos dados por las siguientes expresiones:

- a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| \leq 3$ d) $|x| > 3$

Ejercicios y problemas

Solución:



73. Suma los siguientes radicales:

- a) $3a\sqrt{8a^3} - 5\sqrt{18a^5} + 7a\sqrt{50a^3}$
 b) $7\sqrt[3]{16x^8} + 5\sqrt[3]{54x^5} - 2\sqrt[3]{128x^2}$

Solución:

- a) $26a^2\sqrt{2a}$ b) $(14x^2 + 15x - 8)\sqrt[3]{2x^2}$

74. Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ d) $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$

Solución:

- a) \sqrt{a} b) $\frac{b\sqrt[3]{a^5}}{a}$ c) $\frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}$ d) $\frac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$

75. Calcula, aplicando la fórmula de cambio de base, los siguientes logaritmos y redondea el resultado a cuatro decimales:

- a) $\log_{1/2} 15,87$ b) $\log_{1/3} 345,769$
 c) $\log_{1/5} 0,0006$ d) $\log_{0,1} 0,005439$

Solución:

- a) -3,9882 b) -5,3211 c) 4,6094 d) 2,2645

Con calculadora

76. Halla con la calculadora el valor de los siguientes números redondeando a 5 cifras:

- a) π b) e c) $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d) $\sqrt[3]{5}$

Solución:

- a) 3,14159 b) 2,71828 c) 1,61803 d) 1,25850

77. Halla el valor de los siguientes resultados y redondea el resultado a cinco decimales:

- a) $1,000001^{1\,000\,000}$ b) $0,9999991\,000\,000$

Solución:

- a) 2,71828 b) 0,36788

78. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos; redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log \pi$ b) $\log e$ c) $L \pi$ d) $L 10$

Solución:

- a) 0,4971 b) 0,4343 c) 1,1447 d) 2,3026

79. Utilizando la calculadora, halla:

- a) π^π b) e^e c) π^e d) e^π

Solución:

- a) 36,4622 b) 15,1543 c) 22,4592 d) 23,1407

Problemas

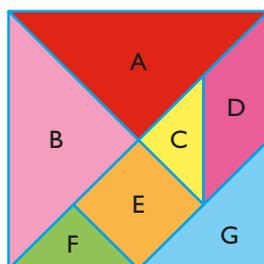
80. Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de diámetro 1 m. ¿Qué clase de número es?

Solución:

$$L = \pi m$$

Es un número irracional.

81. La siguiente figura se conoce con el nombre de tangram chino. Si el lado del cuadrado mide 1 m, halla el área de cada una de las figuras que lo componen.



Solución:

$$A = B = 1/4 \text{ m}^2$$

$$C = F = 1/16 \text{ m}^2$$

$$D = E = G = 1/8 \text{ m}^2$$

82. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número π

Solución:

(3, 4)

83. La longitud de una finca rectangular es 15 m y el perímetro es inferior a 50 m. ¿Qué valores puede tomar el ancho de la finca?

Solución:

$$2x + 30 \leq 50 \Rightarrow 0 < x \leq 10$$

84. Calcula las siguientes potencias redondeando los resultados a cinco decimales. ¿A qué número real muy conocido se aproximan los valores que se van obteniendo?

- a) $1,1^{10}$ b) $1,01^{100}$
c) $1,001^{1000}$ d) $1,0001^{10000}$
e) $1,00001^{100000}$ f) $1,000001^{1000000}$

Solución:

- a) 2,59374 b) 2,70481 c) 2,71692
d) 2,71815 e) 2,71827 f) 2,71828

Se aproximan hacia el número e

85. Halla la fórmula del área de un triángulo equilátero cuyo lado mide **a** cm

Solución:

$$\text{Área} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

86. Halla la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide **x** m

Solución:

$$d = x\sqrt{2} \text{ m}$$

87. Demuestra que el producto de dos números irracionales no es siempre irracional, resolviendo el siguiente contraejemplo: halla un número irracional que al multiplicarlo por el número irracional $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ sea racional.

Solución:

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$$

88. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\log 525$

Solución:

$$(2, 3)$$

89. De dos números se sabe que $\log x + \log y = 0$. ¿Qué relación hay entre **x** e **y**?

Solución:

$$\log xy = \log 1$$

$$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Es decir, son inversos.

90. Sabiendo que $\log 5 = 0,6990$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 2$

b) $\log 25$

c) $\log 4$

d) $\log \sqrt{5}$

Solución:

a) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = 1 - \log 5 = 0,3010$

b) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 1,3980$

c) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$

d) $\log \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2} = 0,3495$

91. Una célula se reproduce por bipartición cada hora. ¿Cuántos días tardará en sobrepasar el billón?

Solución:

$$2^x = 10^{12}$$

$$x \log 2 = 12$$

$$x = \frac{12}{\log 2} = 39,86$$

Tardará casi 2 días.

92. Un coche deportivo cuesta 70 000 € y se devalúa cada año un 15 %. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 10 000 €?

Solución:

$$70\,000 \cdot 0,85^x = 10\,000$$

$$7 \cdot 0,85^x = 1$$

$$\log 7 + x \log 0,85 = 0$$

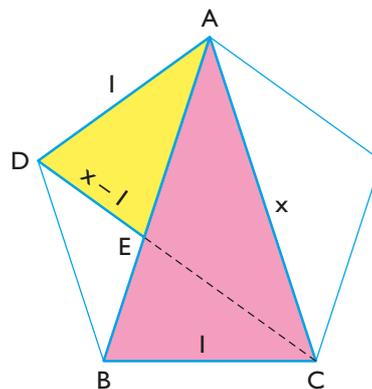
$$x \log 0,85 = -\log 7$$

$$x = -\frac{\log 7}{\log 0,85} = 11,97$$

Tardará casi 12 años.

Para profundizar

93. Sabiendo que los triángulos ABC y ADE son semejantes, calcula el valor de **x**. ¿Qué número conocido es **x**? ¿Es racional o irracional?



Ejercicios y problemas

Solución:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solución negativa $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ no sirve.

La solución es $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es el número áureo o de oro.

Es irracional.

94. Los números racionales son densos. Veamos dos formas de demostrarlo:

a) Halla la media aritmética entre $2/3$ y $4/5$, comprueba que es racional y que está en el intervalo $(2/3, 4/5)$

b) Halla el número que se obtiene al sumar entre sí los numeradores y los denominadores de $2/3$ y $4/5$, comprueba que es racional y que está en el intervalo $(2/3, 4/5)$

Solución:

a) $2/3 = 0,6666666666$ b) $2/3 = 0,6666666666$
 $11/15 = 0,7333333333$ $6/8 = 3/4 = 0,75$
 $4/5 = 0,8$ $4/5 = 0,8$

95. Escribe el menor intervalo cerrado, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número e

Solución:

[2, 3]

96. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número áureo, o de oro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Solución:

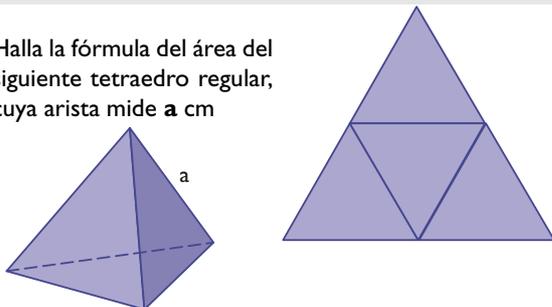
(1, 2)

97. La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ kg, y la del Sol, $1,98 \cdot 10^{30}$ kg. ¿Cuántas veces es mayor la masa del Sol que la de la Tierra?

Solución:

$$1,98 \cdot 10^{30} : (5,98 \cdot 10^{24}) = 331\ 103,68 \text{ veces}$$

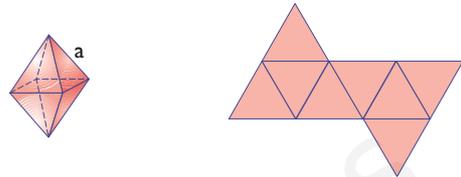
98. Halla la fórmula del área del siguiente tetraedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = a^2\sqrt{3}$$

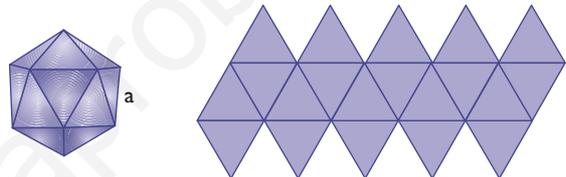
99. Halla la fórmula del área del siguiente octaedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = 2a^2\sqrt{3}$$

100. Halla la fórmula del área del siguiente icosaedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = 5a^2\sqrt{3}$$

101. Halla el volumen de un tetraedro cuya arista mide a cm

Solución:

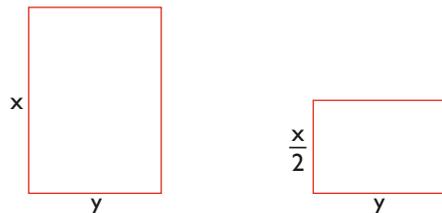
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

102. Halla el volumen de un octaedro cuya arista mide a cm

Solución:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

103. Un papel A0 mide 1 m^2 , y cuando se corta a la mitad da origen a un A1 que tiene la particularidad de que es semejante al anterior.

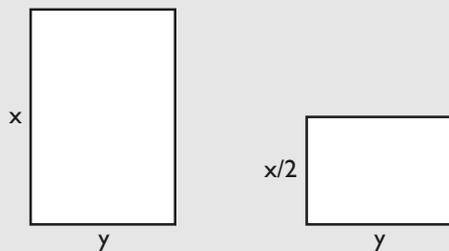


a) Calcula de forma exacta la longitud y la anchura de un papel de formato A0

- b) Un A2 es la mitad de un A1, un A3 es la mitad de un A2, y un A4 es la mitad de un A3. Calcula de forma aproximada hasta los milímetros las dimensiones de un A4 (el A4 es el sustituto del folio, por la semejanza entre todos los A...; esta semejanza permite hacer fotocopias reduciendo o ampliando y manteniendo las proporciones del texto y/o dibujo y los márgenes).

Solución:

a)



$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x/2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = y^2$$

Además: $xy = 1 \Rightarrow y = 1/x$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2$$

$$x = \sqrt[4]{2}, y = 1/\sqrt[4]{2}$$

b) 297 mm × 210 mm

Solución:

a) $\log 30 = \log 3 \cdot 10 = \log 3 + \log 10 = 1,4771$

b) $\log 900 = \log 3^2 \cdot 100 = 2 \log 3 + \log 100 = 2,9542$

c) $\log \sqrt{1/3} = -\frac{\log 3}{2} = -0,2386$

d) $\log \sqrt[5]{270} = \frac{\log(3^3 \cdot 10)}{5} = \frac{3 \log 3 + \log 10}{5} = 0,4863$

105. Sabiendo que $\log 45 = 1,6532$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 4,5$

b) $\log 450$

c) $\log \sqrt{45}$

d) $\log \sqrt[3]{4500}$

Solución:

a) $\log 4,5 = 0,6532$

b) $\log 450 = 2,6532$

c) $\log \sqrt{45} = 0,8266$

d) $\log \sqrt[3]{4500} = \frac{3,6532}{3} = 1,2177$

104. Sabiendo que $\log 3 = 0,4771$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 30$

b) $\log 900$

c) $\log \sqrt{1/3}$

d) $\log \sqrt[5]{270}$

Paso a paso

106. Calcula: $\frac{4}{3} \left(\frac{5}{6} - 2 + \frac{3}{8} \right)$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

107. Halla la expresión decimal con 14 dígitos del siguiente número y clasifícalo como periódico o irracional:

$$\frac{51}{22}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

108. Calcula los 10 primeros términos de la siguiente sucesión:

$$a_n = 5n - 2$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

109. Calcula:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-2}{n}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

110. Calcula: $\sqrt{50} - 4\sqrt{18} + 7\sqrt{8}$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

111. Racionaliza: $\frac{5}{\sqrt{6} + \sqrt{7}}$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

112. Calcula: $\log_3 29$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

113. En una proporción continua los extremos son x y $x-1$, y los medios, 1. Halla el valor positivo de x . ¿Qué clase de número es?

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

114. **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es, elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

115. Calcula:

a) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$

b) $\frac{4}{3} : \left(\frac{8}{5} - 7 \right)$

Solución:

a) $\frac{25}{36}$

b) $-\frac{20}{81}$

116. Halla las expresiones decimales, con 14 dígitos, de los siguientes números y clasifícalos como periódicos o irracionales:

a) $\frac{531}{110}$

b) $\sqrt[3]{5^3}$

c) $\frac{251}{7}$

d) π

Solución:

a) 4,827272727272727

Periódico \Rightarrow Racional

b) 1,9932353156382018

No periódico \Rightarrow Irracional

c) 35,857142857142857142

Periódico \Rightarrow Racional

d) 3,1415926535914039

No periódico \Rightarrow Irracional

117. Calcula los 10 primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 2^n$ b) $a_n = 2n + 3$
 c) $a_n = (-1)^n (n + 1)$ d) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solución:

- a) 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024
 b) 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23
 c) -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, -10, 11
 d) $3/2, 3/4, 3/8, 3/16, 3/32, 3/64, 3/128, 3/256, 3/512, 3/1024$

118. Calcula los límites siguientes:

- a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2$
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n}$ d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 + 5}{n^2 - 4n + 1}$

Solución:

- a) 0
 b) $+\infty$
 c) 2
 d) 3

119. Calcula:

- a) $7\sqrt{27} - 5\sqrt{192} + 2\sqrt{507}$
 b) $2\sqrt{125} - 14\sqrt{320} + 3\sqrt{500}$

Solución:

- a) $7\sqrt{3}$
 b) $-72\sqrt{5}$

120. Racionaliza:

- a) $\frac{10}{\sqrt{5}}$
 b) $\frac{5}{\sqrt{14} - \sqrt{13}}$

Solución:

- a) $2\sqrt{5}$
 b) $5\sqrt{14} + 5\sqrt{13}$

121. Calcula:

- a) L 87,34
 b) $\log 456,208$
 c) $\log_2 0,00345$
 d) $\log_{27} 890,45$

Solución:

- a) 4,4698
 b) 2,659
 c) -8,179
 d) 2,060

Plantea los siguientes problemas y resuélvelos con ayuda de *Wiris* o *DERIVE*:

122. Halla la arista de un cubo de 5 dm^3 de volumen.

Solución:

Arista: 1,71 dm

123. Mediante *ensayo-acierto* halla el término general de las siguientes sucesiones y luego calcula los 10 primeros términos para comprobarlo.

- a) 3, 7, 11, 15, ...
 b) 5, 10, 20, 40, ...
 c) 1, 4, 9, 16, 25, ...
 d) 1, -3, 5, -7, 9, ...

Solución:

- a) $a_n = 4n - 1$
 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39
 b) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$
 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280, 2560
 c) $a_n = n^2$
 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100
 d) $a_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$
 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19

124. Un yate cuesta $4,5 \cdot 10^5 \text{ €}$ y se devalúa cada año un 18 %. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 10 000 €?

Solución:

$$4,5 \cdot 10^5 \cdot 0,82^x = 10\,000$$

$$x = 19,18188200 \text{ años.}$$