1

Evaluación

BACHILLERATO

Índice

Prueba inicial (aritmética y álgebra) 4
1. Números reales 6
2. Ecuaciones, sistemas e inecuaciones 8

Prueba inicial (geometría) 10
3. Trigonometría 12
4. Vectores 14
5. Geometría analítica plana 16
6. Cónicas 18
7. Números complejos 20

Prueba inicial (análisis) 22
8. Funciones, límites y continuidad 24
9. Funciones elementales 26
10. Derivadas 28
11. Derivadas y representación gráfica 30
12. Integración 32

Prueba inicial (estadística y probabilidad) 34
13. Distribuciones bidimensionales 36
14. Combinatoria 38
15. Probabilidad 40
16. Distribuciones de probabilidad 42

Pruebas finales 44

Prueba inicial (aritmética y álgebra)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Efectúa con la calculadora las siguientes operaciones y expresa el resultado con una aproximación de milésimas.

a) $\sqrt{18{,}34}$ b) $234{,}6 \cdot \pi$ c) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ d) $\left(\dfrac{0{,}0035^{1,2} \cdot \sqrt{12{,}46}}{2{,}3507 - 1{,}45}\right)^2$

¿Cómo se expresa el resultado del apartado d con notación científica y tres cifras significativas?

2. Efectúa las siguientes operaciones con radicales, sin utilizar la calculadora, y expresa el resultado con radicales y en forma de potencia.

a) $3\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 3\sqrt{18}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}$ c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$

3. Indica el centro y el radio de los entornos representados.

a) 

b) 

4. Expresa con notación logarítmica las siguientes igualdades.

a) $8^x = 24{,}5$ b) $10^{2,3} = x$ c) $x^5 = 243$

5. Se consideran los polinomios $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ y $D(x) = x^2 + 3x$. Halla otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ para los que se verifique la igualdad $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$, siendo el grado $R(x) <$ grado $D(x)$.

6. Opera las expresiones siguientes y simplifica el resultado todo lo posible.

a) $\dfrac{2x - 1}{3} + \dfrac{5x + 2}{12} - \dfrac{2x - 3}{4}$

b) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1}$

c) $3 \cdot (2x - 1)^2 - 3 \cdot (2x - 1) \cdot (2x + 1)$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $3(x - 1)(x + 2) = 3x - 6$ b) $\left(x - \dfrac{4}{3}\right) \cdot \left(2x + \dfrac{1}{5}\right) = 0$

8. Si la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ tiene sus coeficientes enteros y sus raíces son $x_1 = \dfrac{4 + \sqrt{7}}{3}$ $x_2 = \dfrac{4 - \sqrt{7}}{3}$, calcula los coeficientes enteros a, b y c más pequeños posibles de la ecuación.

9. Sabemos que una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 8x + k = 0$ es $x_1 = 2$. Determina k y la otra solución.

10. El polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ es divisible entre $(x - 2)$ y al dividirlo entre $(x - 1)$ su resto es -1. Halla el valor numérico de dicho polinomio para $x = 3$.

11. Resuelve las inecuaciones siguientes y expresa su solución mediante intervalos.

a) $\dfrac{3x - 5}{4} - \dfrac{x + 2}{2} \leqslant \dfrac{2x - 5}{3} - 1$ b) $\dfrac{2x + 7}{x + 5} \leqslant 1$

1. a) $\sqrt{18{,}34} \approx 4{,}283$

b) $234{,}6 \cdot \pi \approx 737{,}018$

c) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

d) $\left(\dfrac{0{,}0035^{1{,}2} \cdot \sqrt{12{,}46}}{2{,}3507 - 1{,}45}\right)^2 \approx 0{,}000.$

En notación científica:

$\left(\dfrac{0{,}0035^{1{,}2} \cdot \sqrt{12{,}46}}{2{,}3507 - 1{,}45}\right)^2 \approx 196 \times 10^{-5}$

2. a) $3\sqrt{2} - 3\sqrt{8} + 3\sqrt{18} = 3\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 3\sqrt{2} =$

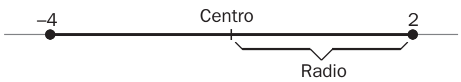
$= 6\sqrt{2} = 6 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{9 \cdot 8} = \sqrt[6]{72} = 72^{\frac{1}{6}}$

c) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{3}{2}} = \sqrt[12]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^3}$

$= \sqrt[12]{\dfrac{2^6 \cdot 3^7}{3^6 \cdot 2^7}} = \sqrt[12]{\dfrac{3}{2}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{12}}$

3. a)



Centro $a = \dfrac{-4 + 2}{2} = -1.$

Radio $r = 2 - (-1) = 3$

Se trata del entorno cerrado $E[-1, 3]$.

b) Centro $a = \dfrac{2{,}5 + 4{,}7}{2} = 3{,}6.$

Radio $r = 3{,}6 - 2{,}5 = 11.$

Se trata del entorno abierto $E(3{,}6;\ 1{,}1)$.

4. a) $8^x = 24{,}5 \Leftrightarrow x = \log_8 24{,}5 = \dfrac{\log 24{,}5}{\log 8}$

b) $10^{2{,}3} = x \Leftrightarrow 2{,}3 = \log x$

c) $x^5 = 243 \Leftrightarrow 5 = \log_x 243 = \dfrac{\log 243}{\log x}$

5. Se efectúa la división de polinomios $P(x) : D(x)$ y resulta: cociente $C(x) = 4x - 8$; resto $R(x) = 21x - 7$.

6. a) $\dfrac{2x - 1}{3} + \dfrac{5x + 2}{12} - \dfrac{2x - 3}{4} = \dfrac{7x + 7}{12}$

b) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x + 3} \cdot \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x - 2)^3} \cdot \dfrac{(x - 2)^2}{x^2 - 1} =$

$= \dfrac{(x + 1)(x - 2)(x - 1)(x + 3)(x - 2)^2}{(x + 3)(x - 1)(x + 1)(x - 2)^3} = 1$

c) $3(2x - 1)^2 - 3(2x - 1) \cdot (2x + 1) =$

$= 3(4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 1) = 6 - 12x$

7. a) $3(x - 1)(x + 2) = 3x - 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 = 3x - 6 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ solución doble

b) $\left(x - \dfrac{4}{3}\right) \cdot \left(2x + \dfrac{1}{5}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x - \dfrac{4}{3} = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3} \\ 2x + \dfrac{1}{5} = 0 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{10} \end{cases}$

8. La suma de las dos raíces es $\dfrac{4 + \sqrt{7}}{3} + \dfrac{4 - \sqrt{7}}{3} = \dfrac{8}{3}$,

y el producto, $P = \dfrac{4 + \sqrt{7}}{3} \cdot \dfrac{4 - \sqrt{7}}{3} = \dfrac{16 - 7}{9} = 1.$

La forma canónica de la ecuación $x^2 - Sx + P = 0$ nos conduce a:

$x^2 - \dfrac{8}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 3 = 0$

9. $x_1 + x_2 = 8 \Leftrightarrow 2 + x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 6$

$x_1 \cdot x_2 = k \Leftrightarrow 2 \cdot 6 = k \Rightarrow k = 12$

10. $\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 + 4a + 6 + b = 0 \\ 1 + a + 3 + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = -14 \\ a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$

El polinomio es $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, y el valor numérico pedido, $P(3) = 27 - 27 + 9 - 2 = 7$.

11. a) $\dfrac{3x - 5}{4} - \dfrac{x + 2}{2} \leqslant \dfrac{2x - 5}{3} - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(3x - 5) - 6(x + 2) \leqslant 4(2x - 5) - 12 \cdot 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5x \leqslant -5 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \qquad S = [1, +\infty)$

b) $\dfrac{2x + 7}{x + 5} \leqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x + 7}{x + 5} - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x + 2}{x + 5} \leqslant 0$

Raíz del numerador $x_1 = -2$; raíz del denominador $x_2 = -5$ Formamos la tabla de signos del numerador, el denominador y el cociente, y resulta la solución $S = (-5, -2]$.

	$-\infty$ … -5	-5 … -2	-2 … $-\infty$
x + 2	–	–	+
x + 5	–	+	+
cociente	+	–	+

1 Números reales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN / ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Obtener aproximaciones decimales de los números reales y saber determinar o acotar el error cometido.

1. Escribe los siguientes números reales mediante una expresión decimal utilizando cuatro cifras significativas. Indica la cota de error que se comete en cada caso y clasifica cada uno de los números según sea racional o irracional.

a) $\dfrac{456}{7}$ b) π^5 c) $\sqrt{25 - \dfrac{19}{4}}$ d) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

B. Hallar la fracción generatriz de los números decimales periódicos y representar números reales en la recta real.

2. Halla la fracción generatriz de los números decimales siguientes y exprésala en forma irreducible.

a) 0,123123123... b) 12,625 c) 7,0014444...

3. Representa exactamente en la recta real (utilizando instrumentos de dibujo) los siguientes números reales.

a) $\dfrac{25}{7}$ b) $-4 + \dfrac{2}{3}$ c) $\sqrt{13}$ d) $\sqrt{21}$

C. Representar intervalos de números reales y definir mediante intervalos ciertos subconjuntos de números reales.

4. a) Representa en la recta real los siguientes intervalos.

$I_1 = (-\infty, 4]$ $I_2 = [0, 5)$ $I_3 = (1, +\infty)$

b) Representa y expresa mediante un intervalo el conjunto numérico definido por la intersección de los tres intervalos anteriores, es decir, $I_1 \cap I_2 \cap I_3$.

D. Expresar mediante intervalos o entornos los subconjuntos de números reales que verifican una desigualdad.

5. Expresa como un entorno, indicando su centro y su radio, los siguientes conjuntos de números reales.

a) $A = (3, 17)$ b) $B = (-2{,}84; 4{,}06)$ c) $C = \{x \in \mathbf{R}, |x - 5| < 0{,}02\}$

E. Operar con radicales, efectuar simplificaciones de los mismos y expresarlos en forma de potencia.

6. Expresa como radicales semejantes y efectúa las sumas.

a) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 15\sqrt{3}$ b) $5\sqrt[3]{54} - 10\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{16}$

7. Comprueba, efectuando transformaciones adecuadas, que las siguientes expresiones radicales representan un mismo número real.

a) $\sqrt{\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) : \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ c) $\dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2} - 1$

F. Calcular números combinatorios y efectuar desarrollos con e binomio de Newton.

8. Calcula los números combinatorios y comprueba que $\dbinom{18}{6} + \dbinom{18}{11} = \dbinom{19}{7}$.

9. Calcula mediante el desarrollo del binomio de Newton: $\left(1 + \sqrt{2}\right)^8$

G. Operar con logaritmos, aplicar sus propiedades y transformar expresiones algebraicas en logarítmicas y viceversa.

10. Escribe el valor de los siguientes logaritmos justificando la respuesta.

a) $\log_7 49 =$ b) $\log 1000 =$ c) $\log_5 625 =$ d) $\log_2 \left(\dfrac{1}{32}\right) =$

11. Convierte las siguientes expresiones algebraicas en logarítmicas, tomando logaritmos neperianos en la primera y logaritmos decimales en la segunda.

a) $A = \sqrt{\dfrac{a^3 \cdot b}{3}}$ b) $B = \left(\dfrac{k^2}{10}\right)^3$

Soluciones

1. a) $\dfrac{456}{7} \approx 65{,}14$ Error $\in\, < 0{,}01$

b) $\pi^5 \approx 306{,}0$ $\in\, < 0{,}1$

c) $\sqrt{25 - \dfrac{19}{4}} = 4{,}500$ $\in\, = 0$

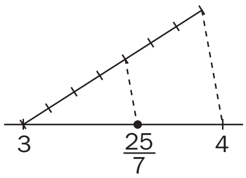
d) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ $\in\, < 0{,}001$

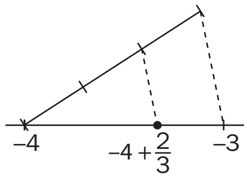
2. a) $0{,}123123\ldots = \dfrac{123}{999} = \dfrac{41}{333}$

b) $12{,}625 = \dfrac{12\,625}{1000} = \dfrac{101}{8}$

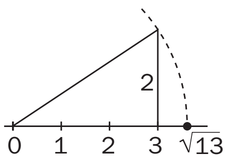
c) $7{,}001444\ldots = \dfrac{70\,014 - 7001}{9000} = \dfrac{63\,013}{9000}$

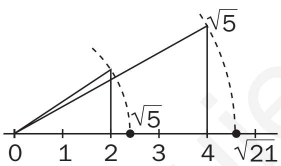
3. a) $\dfrac{25}{7} = 3 + \dfrac{4}{7}$ b) $-4 + \dfrac{2}{3}$





c) $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$ d) $\sqrt{21} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{5})^2}$





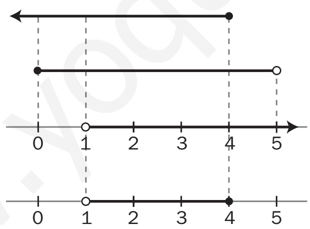
4. a) $(-\infty, 4]$

$[0, 5)$

$(1, +\infty)$

b) $I_1 \cap I_2 \cap I_3$

$(1, 4]$



5. a) $A = (3, 17)$ Centro $\dfrac{3 + 17}{2} = 10$

Radio $10 - 3 = 7$

$A = (3, 17) = E(10, 7)$

b) $B = (-2{,}84; 4{,}06)$ Centro $\dfrac{-2{,}84 + 4{,}06}{2} = 0{,}61$

Radio $0{,}61 - (-2{,}84) = 3{,}45$

$B = (-2{,}84; 4{,}06) = E(0{,}61; 3{,}45)$

c) $C = \{x \in \mathbf{R}, |x - 5| < 0{,}02\}$ Centro 5, Radio 0,02

$E(5; 0{,}02)$

6. a) $2\sqrt{27} + 5\sqrt{12} - 15\sqrt{3} = 2\sqrt{3^3} + 5\sqrt{2^2 3} - 15\sqrt{3} =$

$= 6\sqrt{3} + 10\sqrt{3} - 15\sqrt{3} = (6 + 10 - 15)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

b) $5\sqrt[3]{54} - 10\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{16} =$

$= 15\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$

7. $\sqrt{\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) : \left(1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} =$

$= \sqrt{\left(\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) : \left(\dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} =$

$= \sqrt{\dfrac{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2}) \cdot (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{\dfrac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}} =$

$= \dfrac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{(2 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2} - 2}{2} =$

$= \sqrt{2} - 1$

Pero también:

$\sqrt{\dfrac{(2 - \sqrt{2})^2}{4 - 2}} = \sqrt{\dfrac{4 + 2 - 4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

8. $\dbinom{18}{6} = \dfrac{18!}{6! \cdot 12!} = \dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 18\,564$

$\dbinom{18}{11} = \dfrac{18!}{11! \cdot 7!} = \dfrac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 31\,824$

$\dbinom{19}{7} = \dfrac{19!}{7! \cdot 12!} = \dfrac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 50\,388$

$18\,564 + 31\,824 = 50\,388$

9. $(1 + \sqrt{2})^8 = \dbinom{8}{0} + \dbinom{8}{1}\sqrt{2} + \dbinom{8}{2}(\sqrt{2})^2 + \dbinom{8}{3}(\sqrt{2})^3 +$

$+ \dbinom{8}{4}(\sqrt{2})^4 + \ldots + \dbinom{8}{8}(\sqrt{2})^8 =$

$= 1 + 8\sqrt{2} + 56 + 112\sqrt{2} + 280 + 224\sqrt{2} +$

$+ 224 + 64\sqrt{2} + 16 = 577 + 408\sqrt{2}$

10. a) $\log_7(49) = 2$ porque $7^2 = 49$

b) $\log(1000) = 3$ porque $10^3 = 1000$

c) $\log_5(625) = 4$ porque $5^4 = 625$

d) $\log_2\left(\dfrac{1}{32}\right) = -5$ porque $5^{-5} = \dfrac{1}{2^5} = \dfrac{1}{32}$

11. a) $\ln A = \ln\sqrt{\dfrac{a^3 \cdot b}{3}} = \ln\left(\dfrac{a^3 \cdot b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{a^3 \cdot b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}[\ln(a^3 \cdot b) - \ln 3] =$

$= \dfrac{1}{2}(3 \ln a + \ln b - \ln 3)$

b) $\log B = \log\left(\dfrac{k^2}{10}\right)^3 = 3 \cdot \log\left(\dfrac{k^2}{10}\right) =$

$= 3 \cdot (\log k^2 - \log 10) = 3 \cdot (2 \log k - 1) =$

$= 6 \log k - 3$

2 Ecuaciones, sistemas e inecuaciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Efectuar correctamente operaciones con polinomios y en particular la división entera.	**1.** El dividendo de una división entera de polinomios es $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + 5$ y se sabe que el cociente es $C(x) = x^2 - 3x + 1$. Calcula el polinomio divisor y halla el resto de la división.
B. Aplicar la regla de Ruffini para buscar las raíces enteras de un polinomio, hallar valores numéricos y descomponerlos en factores.	**2.** Halla las raíces del polinomio $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 3x + 18$ y efectúa la descomposición factorial del mismo, expresando todos los factores con números enteros. **3.** El valor numérico del polinomio $A(x) = x^3 + kx^2 - 5x + m$ para $x = 2$ es -15, y el resto de la división $A(x) : (x + 1)$ es 6. Calcula el valor de k y de m.
C. Simplificar y efectuar operaciones con fracciones algebraicas.	**4.** Simplifica las siguientes fracciones algebraicas. a) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 2x^3 + x^2}$ b) $\dfrac{x^3a^2 - a^2 - x^5 + x^2}{a^2x^2 + x^2 - a^2 - x^4}$ **5.** Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas y simplifica el resultado. a) $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right) : \dfrac{x^2 - y^2}{xy - y^2} =$ b) $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{xy}{x^2 - y^2}\right) =$
D. Resolver ecuaciones polinómicas, racionales, radicales, logarítmicas y exponenciales.	**6.** Resuelve las ecuaciones siguientes. a) $\dfrac{2x + 4}{3} - \dfrac{2\,(x - 4)}{5} = 3 - \dfrac{3x + 15}{15}$ b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$ **7.** Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones. a) $\log(x - 2) + \log(x - 3) = 1 - \log 5$ b) $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$
E. Resolver sistemas de ecuaciones polinómicas lineales y de segundo grado.	**8.** Resuelve por cualquier método los siguientes sistemas de ecuaciones. a) $\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ x - 5y = -8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{cases}$ **9.** Resuelve por el método de Gauss: $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 10 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$ **10.** La razón de dos números es $\dfrac{3}{4}$. Si se aumenta en 10 unidades cada uno de ellos, la razón aumenta $\dfrac{1}{12}$. ¿Cuáles son esos números?
F. Resolver inecuaciones polinómicas y racionales sencillas.	**11.** Resuelve las inecuaciones siguientes y representa el conjunto solución en la recta real. a) $\dfrac{2x - 3}{2} - (x + 1) \leqslant 3x - \dfrac{2 + x}{3}$ b) $\dfrac{x + 7}{2x + 5} \geqslant 1$

1. Como $P(x) = D(x) \cdot C(x) + R(x)$, también $P(x) = C(x) \cdot D(x) + R(x)$, por lo que $C(x)$ puede ser el divisor, y $D(x)$, el cociente.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -3x^3 & +x^2 & & +5 & x^2-3x+1 \\
-2x^4 & +6x^3 & -2x^2 & & & \overline{2x^2+3x+8} \\ \hline
 & 3x^3 & -x^2 & & & \\
 & -3x^3 & +9x^2 & -3x & & \\ \hline
 & & 8x^2 & -3x & & \\
 & & -8x^2 & +24x & -8 & \\ \hline
 & & & 21x & -3 &
\end{array}$$

Por tanto, $D(x) = 2x^2 + 3x + 8$, y $R(x) = 21x - 3$

2. $P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 3x + 18$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -13 & +3 & +18 \\
-1 & & -2 & +15 & -18 \\ \hline
 & 2 & -15 & +18 & \boxed{0} \\
6 & & +12 & -18 & \\ \hline
 & 2 & -3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 3x + 18 = (x + 1)(x - 6)(2x - 3)$

Raíces: $x_1 = -1$, $x_2 = 6$ y $x_3 = \dfrac{3}{2}$

3. $\begin{cases} A(2) = -15 \\ A(-1) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k + m - 2 = -15 \\ k + m + 4 = 6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 4k + m = -13 \\ k + m = 2 \end{cases}$

De donde se obtiene: $k = -5$ y $m = 7$.

4. a) $\dfrac{x^3 - x}{x^4 - 2x^3 + x^2} = \dfrac{x\,(x-1)\,(x+1)}{x^2\,(x-1)^2} =$

$= \dfrac{x+1}{x(x-1)} = \dfrac{x+1}{x^2 - x}$

b) $\dfrac{x^3a^2 - a^2 - x^5 + x^2}{a^2x^2 + x^2 - a^2 - x^4} = \dfrac{a^2(x^3-1) - x^2(x^3-1)}{a^2(x^2-1) - x^2(x^2-1)} =$

$= \dfrac{(x^3-1)\,(a^2-x^2)}{(x^2-1)\,(a^2-x^2)} = \dfrac{(x-1)\,(x^2+x+1)}{(x-1)\,(x+1)} =$

$= \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$

5. a) $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right) : \dfrac{x^2 - y^2}{xy - y^2} =$

$= \left(\dfrac{x+y}{y}\right) \cdot \left(\dfrac{y\,(x-y)}{(x+y)\,(x-y)}\right) = 1$

b) $\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) \cdot \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right) =$

$= \left(\dfrac{x^2 - y^2}{xy}\right) \cdot \left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right) \cdot \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2}\right) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$

6. a) $\dfrac{2x+4}{3} - \dfrac{2\,(x-4)}{5} = 3 - \dfrac{3x+15}{15}$

$5(2x + 4) - 6(x - 4) = 45 - 3x - 15$

$10x + 20 - 6x + 24 = 30 - 3x$

$7x = -14 \Rightarrow x = -2$

b) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = 6 - \sqrt{x+4}$

$2x - 1 = 36 + x + 4 - 12\sqrt{x+4}$

$(x - 41)^2 = \left(-12\sqrt{x+4}\right)^2$

$x^2 - 82x + 1681 = 144x + 576$

$x^2 - 226x + 1105 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 221 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

Comprobamos las soluciones:

$x_1 = 221 \rightarrow \sqrt{441} + \sqrt{225} \neq 6$ falso

$x_2 = 5 \rightarrow \sqrt{9} + \sqrt{9} = 6$ cierto

7. a) $\log(x - 2) + \log(x - 3) = 1 - \log 5$

$\log[(x-2)\,(x-3)] = \log\dfrac{10}{5}$

$(x-2)\,(x-3) = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

$x_1 = 1$ no vale porque no existe $\log(-1)$

b) $4^x - 2^{x+1} - 24 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0$

$2^x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} = \begin{cases} 4 \\ -6 \end{cases}$

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ $\qquad$ $2^x = -6$ no es posible.

8. a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 4y = 7 \\ x + 5y = -8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} -19y = 31 \\ 19x = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y = -\dfrac{31}{19} \\ x = \dfrac{3}{19} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = -1 \\ y^2 - 2x^2 = 7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y = 1 + 2x \\ (1 + 2x)^2 - 2x^2 = 7 \end{array}\right\}$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 3 \\ x_2 = -3 \rightarrow y_2 = -5 \end{cases}$

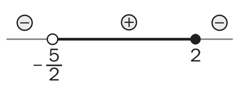
9. $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 10 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 5x + y = 12 \\ 5x = 10 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{a+10}{b+10} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 3b \\ 6a + 10 = 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 20 \end{cases}$

11. a) $\dfrac{2x-3}{2} - (x + 1) \leqslant 3x - \dfrac{2+x}{3} \Rightarrow x \geqslant -\dfrac{11}{16}$

b) $\dfrac{x+7}{2x+5} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+7}{2x+5} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+2}{2x+5} \geqslant 0$



$S = \left(-\dfrac{5}{2}, 2\right]$

Prueba inicial (geometría)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

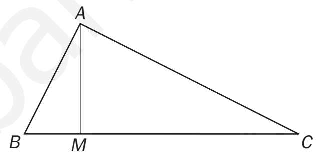
1. Expresa en grados sexagesimales y en radianes el ángulo que forman las agujas del reloj cuando son todas las horas en punto, desde las 0.00 hasta las 12.00. Considera los ángulos orientados desde la aguja de las horas hasta la de los minutos y en sentido antihorario.

2. Tenemos los siguientes datos: $\alpha = 18° \; 15' \; 23''$; $\beta = 85° \; 50' \; 8''$; sen $x = 0{,}1287$ y cos $y = -0{,}2308$ sabemos que $0° < x < 90° < y < 180°$. Halla, utilizando la calculadora, los siguientes ángulos y razones trigonométricas:

a) $\beta - \alpha$ b) $180° - (\alpha + \beta)$ c) El ángulo x d) El ángulo y e) tg β f) $\cos(\alpha + \beta)$

3. Determina los catetos, ángulos y área del triángulo rectángulo de hipotenusa $a = 20$ cm y ángulo $\widehat{B} = 30°$.

4. El triángulo ABC de la figura es rectángulo, $BM = 4$ cm y $MC = 9$ cm. Deduce razonadamente la longitud del segmento AM –perpendicular a BC–, la longitud de los tres lados del triángulo, su área y las razones trigonométricas fundamentales del ángulo $\widehat{C}$.



5. Sabiendo que el ángulo α verifica que $90° < \alpha < 180°$ y que sen $\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$, calcula su coseno y su tangente.

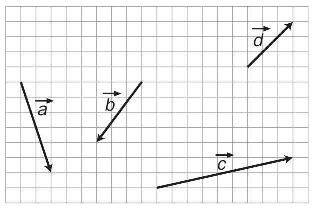
6. La longitud del lado de un octógono regular es de 12 cm. Halla:

a) El ángulo interior del octógono que forman dos lados consecutivos.

b) El radio de la circunferencia inscrita al octógono.

c) El área del octógono.

7. Indica las coordenadas de los vectores representados en la figura y calcula sus módulos. Utiliza como unidad el lado de la cuadrícula.



8. Se consideran los vectores libres $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (-4, 2)$ y $\vec{w} = (0, -4)$. Efectúa las siguientes operaciones.

a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$ b) $(3\vec{w}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$ c) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{u}$

9. ¿Cuál es el vector director de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-1, -1)$?
Escribe la ecuación general de la recta y determina su pendiente y su ordenada en el origen.

10. Las rectas $r: x + 3y - 2 = 0$ y $s: 2x + 7y - 3 = 0$ determinan un ángulo.

a) Determina el vértice de dicho ángulo.

b) Indica los vectores directores de las dos rectas.

c) Calcula la medida del ángulo que forman.

11. La recta de ecuación $3x - 5y - 30 = 0$ determina con los ejes de coordenadas un triángulo. Halla los vértices del triángulo y su área.

1.

Hora	Grados	Radianes
00.00 12.00	0	0
01.00	30	$\frac{\pi}{6}$
02.00	60	$\frac{\pi}{3}$
03.00	90	$\frac{\pi}{2}$

Hora	Grados	Radianes
04.00	120	$\frac{2\pi}{3}$
05.00	150	$\frac{5\pi}{6}$
06.00	180	π
07.00	210	$\frac{7\pi}{6}$

Hora	Grados	Radianes
08.00	240	$\frac{4\pi}{3}$
09.00	270	$\frac{3\pi}{2}$
10.00	300	$\frac{5\pi}{3}$
11.00	330	$\frac{11\pi}{6}$

2. a) $\beta - \alpha = 67^\circ\ 34'\ 45''$

b) $180^\circ - (\alpha + \beta) = 75^\circ\ 54'\ 29''$

c) $x = \text{arcsen}(0{,}1287) = 7{,}394 = 7^\circ\ 23'\ 40''$

d) $y = \arccos(-0{,}2308) = 103{,}344 = 103^\circ\ 20'\ 39''$

e) $\text{tg}\ \beta \approx 13{,}734$

f) $\cos(104^\circ\ 5'\ 31'') = -0{,}243$

3. $b = a \cdot \text{sen}\ 30^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ cm,

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ cm, $\widehat{A} = 90^\circ$,

$\widehat{C} = 60^\circ$, $S = \frac{b \cdot c}{2} = 50\sqrt{3}$ cm^2

4. Por el teorema de la altura,

$AM^2 = BM \cdot MC \Rightarrow AM = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$ cm,

$BC = BM + MC = 4 + 9 = 13$ cm

Por el teorema del cateto,

$AB^2 = BC \cdot BM \Rightarrow AB = \sqrt{13 \cdot 4} = 2\sqrt{13}$ cm,

$AC = \sqrt{13 \cdot 9} = 3\sqrt{13}$ cm

Área $S = \frac{1}{2}(BC \cdot AM) = \frac{1}{2}(13 \cdot 6) = 39$ cm^2;

$\text{sen}\ \widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$; $\cos\ \widehat{C} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\text{tg}\ \widehat{C} = \frac{2}{3}$

5. Aplicamos la relación fundamental para calcular el coseno:

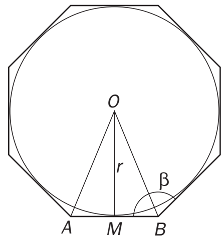
$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\ \alpha = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{21}{25}} = -\frac{2}{5}$.

Para la tangente:

$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{5} : \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

6. El ángulo central mide



$\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MOB} = 22{,}5^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{MBO} = 67{,}5^\circ$.

a) El ángulo interior

$\beta = 2 \cdot 67{,}5^\circ = 135^\circ$

b) $\text{tg}\ 67{,}5^\circ = \frac{r}{6} \Rightarrow r = 6 \cdot \text{tg}\ 67{,}5^\circ = 14{,}485$ cm

c) $S = 8 \cdot S_{ABO} = 8 \cdot \frac{AB \cdot r}{2} = 695{,}3$ cm^2

7. $\vec{a} = (2, -6)$ $\quad |\vec{a}| = +\sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\vec{b} = (-3, -4)$ $\quad |\vec{b}| = \sqrt{25} = 5$

$\vec{c} = (9, 2)$ $\quad |\vec{c}| = \sqrt{85}$

$\vec{d} = (3, 3)$ $\quad |\vec{d}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

8. a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = 2(3, -1) - 3(-4, 2) + (0, -4) =$
$= (6, -2) + (12, -6) + (0, -4) = (18, -12)$

b) $(3\vec{w}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u}) = (0, -12) \cdot (-10, 4) = -48$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} - \vec{w} \cdot \vec{u} = (-14) + (-8) - (4) =$
$= -26$

9. $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}] = \vec{b} - \vec{a} = (-1, -1) - (2, -3) = (-3, 2)$.

La ecuación de la recta es $\frac{x - 2}{-3} = \frac{y + 3}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2x + 3y + 5 = 0$.

La ecuación explícita es $y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$, de donde: pendiente $m = -\frac{2}{3}$; ordenada en el origen $n = -\frac{5}{3}$.

10. a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 7y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow V(5, -1)$

b) $\vec{u} = (-3, 1)$

$\vec{v} = (-7, 2)$

c) $\cos\ \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{21 + 2}{\sqrt{10}\sqrt{53}} = \frac{23}{\sqrt{530}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{23}{\sqrt{530}}\right) = 2^\circ\ 29'\ 22''$

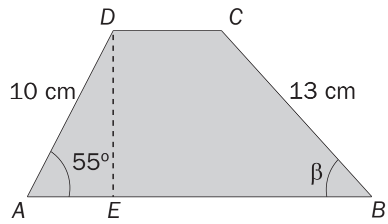
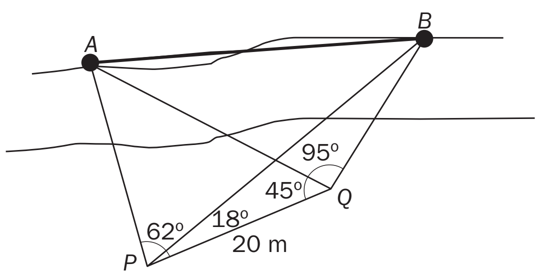
11. Vértices $O(0, 0)$

$A(10, 0)$

$B(0, -6)$

Área $S = \frac{1}{2}(10 \cdot 6) = 30$ u^2

3 Trigonometría

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo. Obtener ángulos y distancias en situaciones cotidianas.	**1.** Halla las longitudes de los segmentos *AE* y *DE* y el valor del ángulo β en la figura.  **2.** Cuando el ángulo de elevación del sol sobre el horizonte es de 40°, la sombra que proyecta una gran esfera es de 28 m. Calcula el diámetro de la esfera.
B. Relacionar entre sí las razones trigonométricas de un ángulo y con las razones de otros ángulos de diferentes cuadrantes.	**3.** Sabiendo que sen $\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ y que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, determina las restantes razones trigonométricas del ángulo α. **4.** Determina otros siete ángulos comprendidos entre 0° y 360° que tengan el seno o el coseno igual u opuesto al cos 121°.
C. Simplificar y comprobar expresiones trigonométricas y resolver ecuaciones trigonométricas sencillas.	**5.** Comprueba las identidades siguientes. a) $\frac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a} = \text{tg } a$ b) $\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y = 1 - 2\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)$ **6.** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica y expresa las soluciones en el sistema sexagesimal y en radianes. $2\cos x + 4\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 3$
D. Resolver triángulos de cualquier tipo aplicando los teoremas y propiedades adecuados para cada caso.	**7.** De cierto triángulo se conocen los siguientes elementos: $a = 12$ cm, $b = 10$ cm, y su área, que es $S = 40$ cm^2. Determina los ángulos, la longitud del tercer lado y la longitud de la altura sobre el lado mayor. **8.** En el triángulo *ABC* sabemos que $\widehat{B} = 2\widehat{A}$, $a = 8$ m y $b = 10$ m. Calcula el área, los ángulos y el lado *c* del triángulo.
E. Resolver problemas de geometría, topografía y de la vida ordinaria reduciéndolos a problemas de triángulos.	**9.** Las diagonales de un paralelogramo miden 12 y 20 cm, respectivamente, y el ángulo que forman es de 60°. Halla la longitud de los lados del paralelogramo, sus ángulos y su área. **10.** Para determinar la distancia entre dos puntos inaccesibles *A* y *B*, tomamos desde otros puntos *P* y *Q*, situados en el mismo plano que *A* y *B*, las medidas indicadas en la figura. Calcula la distancia entre los puntos *A* y *B*. 

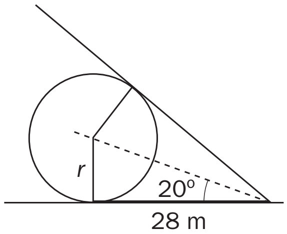
1. $AE = 10 \cdot \cos 55° = 5{,}74$ cm

$DE = 10 \cdot \text{sen } 55° = 8{,}19$ cm

$\text{sen } \beta = \dfrac{DE}{CB} = \dfrac{10 \cdot \text{sen } 55°}{13} = 0{,}6301\ldots$

$\beta = \text{arcsen}(0{,}6301\ldots) = 39°\ 3'\ 32''$

2.



$\text{tg } 20° = \dfrac{r}{28} \Rightarrow r = 28 \cdot \text{tg } 20° = 10{,}19$ m

El diámetro es $d = 2r = 20{,}38$ m.

3. $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$

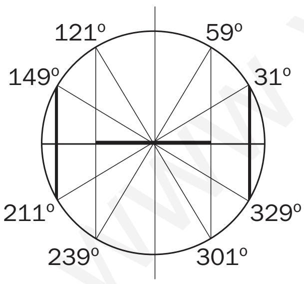
El signo es debido al cuadrante al que pertenece el ángulo.

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \dfrac{7}{16}} = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow \sec \alpha = -\dfrac{4}{3}$

$\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = -\dfrac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \text{cotag } \alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{7}} = -\dfrac{3\sqrt{7}}{7},$

$\text{cosec } \alpha = \dfrac{4}{\sqrt{7}} = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

4.



Utilizando las relaciones entre ángulos suplementarios, que difieren en 180°, opuestos y complementarios se obtiene:

$\cos 121° = -\cos 59° = \cos 239° = -\cos 301° =$

$= -\text{sen } 31° = -\text{sen } 149° = \text{sen } 211° = \text{sen } 329°$

5. a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 + \cos 2a} = \dfrac{2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a}{1 + \cos^2 a - \text{sen}^2 a} =$

$= \dfrac{2 \cdot \text{sen } a \cdot \cos a}{2 \cdot \cos^2 a} = \dfrac{\text{sen } a}{\cos a} = \text{tg } a$

b) $1 - \cos(x + y) \cdot \cos(x - y) =$
$= 1 - (\cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y)(\cos x \cos y +$
$+ \text{sen } x \text{ sen } y) = 1 - (\cos^2 x \cos^2 y - \text{sen}^2 x \text{ sen}^2 y) =$
$= 1 - [(1 - \text{sen}^2 x)(1 - \text{sen}^2 y) - \text{sen}^2 x \text{ sen}^2 y] =$
$= \text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y.$

6. $2 \cos x + 4 \text{ sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = 3$

Si tomamos $x = 2t$, resulta

$2 \cos 2t + 4 \text{ sen } t = 3$

$2(\cos^2 t - \text{sen}^2 t) + 4 \text{ sen } t = 3$

$2(1 - \text{sen}^2 t - \text{sen}^2 t) + 4 \text{ sen } t = 3$

$4 \text{ sen}^2 t - 4 \text{ sen } t + 1 = 0$

$\text{sen } t = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 30° \Rightarrow x_1 = 60° = \dfrac{\pi}{6} \\ t_2 = 150° \Rightarrow x_2 = 300° = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Las restantes soluciones se obtienen sumando a estas $360° \cdot k$ o $2k\pi$, $\forall k \in Z$.

7. $S = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \widehat{C} \Rightarrow \text{sen } \widehat{C} = \dfrac{2 \cdot 40}{12 \cdot 10} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{C} = 41°\ 48'\ 38''$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \Rightarrow c = 8{,}07$ cm

$\cos \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} \Rightarrow \cos \widehat{A} = 0{,}13 \Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{A} = 82°\ 31'\ 49''$

$\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 55°\ 39'\ 33''$

8. $\dfrac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \dfrac{b}{\text{sen } 2\widehat{A}} = \dfrac{b}{2 \cdot \text{sen } \widehat{A} \cdot \cos \widehat{A}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \widehat{A} = \dfrac{b}{2a} = \dfrac{10}{16}$

$\widehat{A} = \arccos^{-1}\left(\dfrac{10}{16}\right) = 51°\ 19' \Rightarrow \widehat{B} \approx 102°\ 38', \widehat{C} \approx 26°\ 3'$

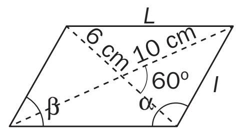
$c = \dfrac{a \cdot \text{sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{A}} = 4{,}5$ cm

$S = \dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } \widehat{C}}{2} = 17{,}57 \text{ cm}^2$

9. $l^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 60° \Rightarrow l = 8{,}72$ cm

$L^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 120° \Rightarrow L = 14$ cm

$\cos \alpha = \dfrac{l^2 + L^2 - 20^2}{2 \cdot l \cdot L} \Rightarrow$



$\alpha = 121°\ 37'\ 35''$

$\beta = 58°\ 22'\ 25''$

$S = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \cdot \text{sen } 60° = 103{,}92 \text{ cm}^2$

10. En APQ $\dfrac{20}{\text{sen } 55°} = \dfrac{AP}{\text{sen } 45°} \Rightarrow AP = 17{,}26$ m

En BPQ $\dfrac{PB}{\text{sen } 140°} = \dfrac{20}{\text{sen } 22°} \Rightarrow PB = 34{,}32$ m

En APB $AB^2 = AP^2 + PB^2 - 2 \cdot AP \cdot PB \cdot \cos 62° \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = 30{,}36$ m

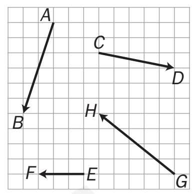
4 Vectores

CRITERIOS DE EVALUACIÓN / ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Hallar vectores equipolentes a uno dado y determinar las coordenadas (en la base canónica) del vector libre que definen los vectores equipolentes entre sí.

1. Considerando como unidad el lado de la cuadrícula, halla el par de números reales (coordenadas) que nos determina la dirección y sentido de cada uno de los vectores de la figura.

Calcula el módulo de cada uno.



2. Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{MN}$ son representantes del vector libre $\vec{u} = (-4, 2)$. Determina las coordenadas de los puntos A y N si $B(5, 1)$ y $M(-6, -2)$. ¿Cuál es el módulo de estos vectores?

B. Utilizar los criterios de equipolencia para resolver problemas de paralelogramos.

3. Los puntos $A(-21, -7)$, $B(15, -15)$, $C(32, 0)$ y D son los vértices del paralelogramo $ABCD$. Determina las coordenadas del punto D, las coordenadas del centro del paralelogramo y la longitud de sus lados. ¿Cuáles serían las coordenadas del punto D si el paralelogramo fuera $ACBD$?

C. Operar correctamente con vectores libres (suma, producto por escalares y producto escalar).

4. Considerando los vectores libres $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (-4, 2)$ y $\vec{w} = (0, -4)$, efectúa las siguientes operaciones.

a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

b) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$

c) $(3\vec{w}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

d) $3(\vec{w} \cdot \vec{v}) - 6(\vec{w} \cdot \vec{u})$

5. Tenemos dos vectores libres: $\vec{u} = (-5, 2)$ y $\vec{v} = (k, -3)$. Calcula el valor de k en los siguientes casos.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 19$

b) $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$

c) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales.

d) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.

D. Expresar un vector como combinación lineal de otros.

6. Expresa el vector $\vec{t} = (11, 5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$. Si consideramos $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ como una base de V_2, ¿cuáles son las coordenadas del vector $\vec{t}$ en esa base? Representa gráficamente el vector $\vec{t}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

E. Calcular el ángulo entre dos vectores y determinar vectores ortogonales a uno dado.

7. Considerando el triángulo de vértices $A(-4, -2)$, $B(3, 0)$ y $C(1, 3)$, halla la medida de los tres ángulos del triángulo.

8. Si tenemos el vector $\vec{u} = (-5, 2)$, determina:

a) Un vector unitario con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$.

b) Dos vectores de módulo $\sqrt{116}$ y ortogonales al vector $\vec{u}$.

F. Hallar las coordenadas del vector que determinan dos puntos y las coordenadas de puntos a partir de su vector de posición.

9. Determina las coordenadas de cuatro puntos A, B, C y D que dividen el segmento MN en cinco partes iguales, conociendo $M(-7, 11)$ y $N(3, -4)$.

10. En una simetría central, de centro $C(5, -3)$, los puntos $P(11, 17)$ y Q son simétricos. ¿Cuáles serán las coordenadas del punto Q?

G. Efectuar demostraciones de relaciones geométricas utilizando vectores.

11. Demuestra vectorialmente que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

12. Sabiendo que el baricentro de un triángulo de vértices $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$ es el punto $G\left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$, demuestra que el baricentro divide cada mediana en dos segmentos, uno de doble longitud que el otro.

1. Coordenadas de $\overrightarrow{AB} = (-2, -6)$, porque su dirección y sentido es:

"dos cuadros a la izquierda y seis para abajo". Su módulo, por el teorema de Pitágoras, es:

$|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Coord. $\overrightarrow{CD} = (5, -1)$ Módulo $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{26}$

Coord. $\overrightarrow{EF} = (-3, 0)$ Módulo $|\overrightarrow{EF}| = 3$

Coord. $\overrightarrow{GH} = (-5, 4)$ Módulo $|\overrightarrow{GH}| = \sqrt{41}$

2. Coord. $\overrightarrow{AB} = (5 - a_1,\ 1 - a_2) = (-4, 2) \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 9 \\ a_2 = -1 \end{cases}$

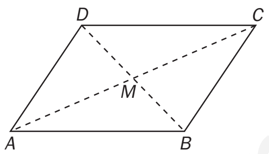
Coord. $\overrightarrow{MN} = (n_1 + 6,\ n_2 + 2) = (-4, 2) \Rightarrow \begin{cases} n_1 = -10 \\ n_2 = 0 \end{cases}$

Luego $A(9, -1)$ y $N(-10, 0)$.

El módulo es:

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{MN}| = |\vec{u}| = +\sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

3. En el paralelogramo $ABCD$, los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ son equipolentes.



$(d_1 + 21,\ d_2 + 7) = (17, 15)$

Luego $D(-4, 8)$

Análogamente, $\overrightarrow{AM}$ equip. $\overrightarrow{MC}$

$(m_1 + 21,\ m_2 + 7) = (32 - m_1,\ 0 - m_2) \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{11}{2} \\ m_2 = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$

Lados: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36^2 + (-8)^2} = \sqrt{1360} = 4\sqrt{85}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{514}$

En el paralelogramo $ACBD$, $\overrightarrow{AD}$ equip. $\overrightarrow{CB} \Rightarrow$

$(d_1 + 21,\ d_2 + 7) = (-17, -15) \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -38 \\ d_2 = -22 \end{cases}$

Luego el punto D sería $D(-38, -22)$.

4. a) $2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} =$
$= (6, -2) + (12, -6) + (0, -4) = (18, -12)$

b) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v} = (6, -2) \cdot (-4, 2) = -24 - 4 = -28$

c) $(3\vec{w}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u}) = (0, -12) \cdot (-10, 4) = -48$

d) $3(\vec{w} \cdot \vec{v}) - 6(\vec{w} \cdot \vec{u}) = 3(0 - 8) - 6(0 + 4) = -48$

5. a) $(-5,\ 2) \cdot (k,\ -3) = 19 \Rightarrow -5k - 6 = 19 \Rightarrow k = -5$

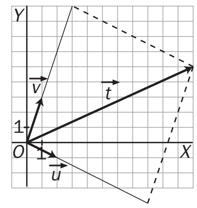
b) $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0 \Rightarrow$
$(-10 - k,\ 7) \cdot (k - 5,\ -1) = 0$
$(-10 - k)(k - 5) - 7 = 0 \Rightarrow k^2 + 5k - 43 = 0$

$k = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 172}}{2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{197}}{2}$

c) $(-5, 2) \cdot (k, -3)\ 0 \Rightarrow -5k - 6 = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{6}{5}$

d) $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \dfrac{-5}{k} = \dfrac{2}{-3} \Rightarrow 2k = 15 \Rightarrow k = \dfrac{15}{2}$

6. $\left.\begin{array}{r} 2x + y = 11 \\ -x + 3y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 4 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$



$\vec{t} = 4\vec{u} + 3\vec{v}$

Las coordenadas de $\vec{t} = (4, 3)_\beta$

7. $\cos \widehat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} =$

$= \dfrac{(7, 2) \cdot (5, 5)}{\sqrt{53}\sqrt{50}} = \dfrac{45}{\sqrt{2650}} \Rightarrow \widehat{A} = 29°\ 3'\ 17''$

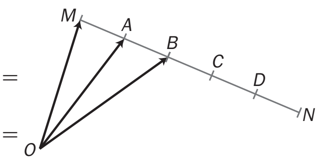
Análogamente, $\widehat{B} = 72°\ 15'\ 19''$ $\widehat{C} = 78°\ 41'\ 24''$

8. a) $\vec{u} = (-5, 2) \rightarrow \vec{x} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(\dfrac{-5}{\sqrt{29}}, \dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)$

b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ es $\vec{v} = (2, 5)$ porque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Los vectores pedidos serán:

$\pm\sqrt{116} \cdot \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \pm\dfrac{\sqrt{116}}{\sqrt{29}}(2, 5) = \pm 2(2, 5) = \pm(4, 10)$

9. $[\overrightarrow{OA}] = [\overrightarrow{OM}] + [\overrightarrow{MA}]$



$\vec{a} = \vec{m} + \dfrac{1}{5}(\vec{n} - \vec{m}) =$

$= (-7, 11) + (2, -3) =$

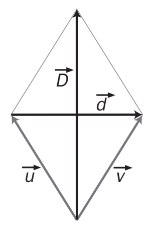
$= (-5, 8) \Rightarrow A(-5, 8)$

Análogamente, $\vec{b} = \vec{a} + \dfrac{1}{5}(\vec{n} - \vec{m}) \Rightarrow B(-3, 5)$

y los otros puntos, $C(-1, 2)$ y $D(1, -1)$.

10. $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CQ} \Rightarrow (-6, -20) = (x - 5,\ y + 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow Q(-1, -23)$

11. Siendo ***u*** y ***v*** los vectores que determinan los lados, entonces los vectores que determinan las diagonales son



$\vec{d} = \vec{v} - \vec{u}$ y $\vec{D} = \vec{u} + \vec{v}$,

y su producto escalar será:
$\vec{d} \cdot \vec{D} = (\vec{v} - \vec{u}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) =$
$= \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 = 0.$

Porque los lados son iguales.

12. $A'\left(\dfrac{b_1 + c_1}{2}, \dfrac{b_2 + c_2}{2}\right)$ es el punto medio de BC.

$\overrightarrow{AG} = \left(\dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3} - a_1, \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3} - a_2\right) =$

$= \left(\dfrac{-2a_1 + b_1 + c_1}{3}, \dfrac{-2a_2 + b_2 + c_2}{3}\right) = 2\overrightarrow{GA'}$

Pues $[\overrightarrow{GA'}] = \left(\dfrac{-2a_1 + b_1 + c_1}{6}, \dfrac{-2a_2 + b_2 + c_2}{6}\right)$

5 Geometría analítica plana

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Conocer y saber hallar las distintas formas de la ecuación de una recta, pasar de unas a otras y determinar con ellas puntos de la recta y su vector director.	**1.** En cada caso, halla las ecuaciones general y explícita de la recta e indica su pendiente y su ordenada en el origen. a) Pasa por $A(-2, 5)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (2, 1)$. b) Pasa por los puntos $A(0, 3)$ y $B(2, -1)$. **2.** Se considera la recta de ecuación $4x - 3y + 12 = 0$. Calcula: a) Un punto y un vector director de la misma. b) La ordenada en el origen, la pendiente y el ángulo que forma con el eje X.
B. Hallar el ángulo entre dos rectas.	**3.** Calcula el ángulo que forman las rectas r: $5x + 2y - 1 = 0$ y s: $y = \frac{1}{3}x - 8$. ¿Qué coordenadas tiene el vértice del ángulo que determinan?
C. Resolver problemas de paralelismo, perpendicularidad e intersección de rectas.	**4.** Las rectas r: $x - 2y + 7 = 0$ y s: $6x + ky + 12 = 0$ son paralelas. Calcula el valor del coeficiente k y las coordenadas de los puntos en los que las rectas cortan el eje Y. **5.** Dos lados de un paralelogramo están contenidos en las rectas r: $x + 2y - 3 = 0$ y s: $3x - 5y + 10 = 0$, y uno de los vértices es el punto $P(7, 1)$. Halla la ecuación de las dos rectas que definen los otros lados del paralelogramo **6.** Las rectas r: $x - 2y + 7 = 0$ y s: $6x + ky + 12 = 0$ son perpendiculares. Calcula el valor del coeficiente k y determina las coordenadas del punto en el que se cortan. **7.** Se tienen las rectas r_1: $2x + y - 10 = 0$ y r_2: $6x + 3y + 15 = 0$. a) Justifica que son paralelas. b) Halla la ecuación de la recta, que pasa por el origen y las corta perpendicularmente y los correspondientes puntos de corte.
D. Calcular proyecciones de puntos y segmentos sobre una recta.	**8.** Calcula las coordenadas del punto simétrico de $P(3, -2)$ respecto de la recta de ecuación $2x + y - 14 = 0$. **9.** ¿Qué longitud tiene la proyección del segmento AB sobre la recta $2x + 5y - 1 = 0$, si $A(7, 3)$ y $B(3, 6)$?
E. Hallar la distancia entre dos puntos, entre una recta y un punto y entre dos rectas.	**10.** Los vértices de un triángulo son los puntos $A(-3, 0)$, $B(5, -2)$ y $C(3, 7)$. Calcula la longitud de la altura del triángulo sobre el lado AB. **11.** Determina la ecuación de las rectas paralelas a r: $2x + y - 10 = 0$ y que distan de ella 3 unidades.
F. Determinar la ecuación de la mediatriz de un segmento y la de la bisectriz de dos rectas, como lugares geométricos.	**12.** Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(-3, 0)$ y $B(5, -2)$. **13.** Halla la ecuación de la bisectriz, de pendiente positiva, del ángulo que determinan las rectas r_1: $x + y - 5 = 0$ y r_2: $4x - 3y + 15 = 0$.

1. a) $\frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{1} \Rightarrow x - 2y + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 6$

Pendiente: $m = \frac{1}{2}$. Ordenada en el origen: $n = 6$

b) Vector director $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, -4)$

$\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow 2x + y - 3 = 0 \Rightarrow y = -2x + 3$

Pendiente: $m = -2$. Ordenada en el origen: $n = 3$

2. a) $4x - 3y + 12 = 0$ Si $x = 0 \Rightarrow y = 4$, luego un punto puede ser $A(0, 4)$, y el vector $\vec{u} = (3, 4)$.

b) $y = \frac{4}{3}x + 4$. Ordenada en el origen: $n = 4$.

Pendiente: $m = \frac{4}{3}$. Y como

$m = \text{tg } \alpha \Rightarrow \alpha = \text{arctg}\left(\frac{4}{3}\right) = 53° \, 7' \, 48''$

3. A partir de los vectores directores:

$\vec{u} = (-2, 5) \qquad \vec{v} = (3, 1)$

$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|-6+5|}{\sqrt{29}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{290}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 86° \, 38' \, 1''$

A partir de las pendientes: $m_1 = -\frac{5}{2} \qquad m_1 = \frac{1}{3}$

$\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{-\frac{5}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{5}{6}}\right| = 17 \Rightarrow \alpha = 86° \, 38' \, 1''$

El vértice del ángulo es el punto de intersección de ambas rectas, esto es, la solución del sistema:

$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ x - 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{19}{17}, \quad y = -\frac{39}{17}$

4. $\frac{1}{6} = \frac{-2}{k} \Rightarrow k = -12$

$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(0, \frac{7}{2}\right)$

$\begin{cases} 6x - 12y + 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(0, 1)$

5. Como P no pertenece a ninguna de las rectas dadas, tiene que pertenecer a las rectas que debemos hallar.

r': $x + 2y + C = 0$, paralela a r y que pasa por $P \Rightarrow$ $\Rightarrow 7 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -9$ y r': $x + 2y - 9 = 0$

Análogamente, s': $3x - 5y - 16 = 0$

6. $1 \cdot 6 + (-2) \cdot k = 0 \Rightarrow k = 3$

$\begin{cases} x - 2y + 7 = 0 \\ 6x + 3y + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -7 \\ 2x + y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

El punto de corte es $P(-3, 2)$.

7. a) Son paralelas porque $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) Su pendiente es $m = -2$, luego la de la perpendicular será $m' = \frac{1}{2}$, y como pasa por $(0, 0)$, la ecuación es $y = \frac{1}{2}x$. Los puntos de corte son:

$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow P(4, 2)$

$\begin{cases} 2x + y = -5 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Rightarrow Q(-2, -1)$

8. Recta perpendicular a la dada que pasa por $P(3, -2)$, $x - 2y + C = 0, \quad 3 + 4 + C = 0 \Rightarrow C = -7$

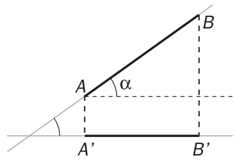
Por tanto, la recta es $x - 2y - 7 = 0$, y la proyección de P: $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ x - 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow P'(7, 0)$

Que es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

$\frac{x+3}{2} = 7 \Rightarrow x = 11 \qquad \frac{y-2}{2} = 0 \Rightarrow y = 2$

El punto buscado es $Q(11, 2)$.

9. $|\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos \alpha$



Pero $\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}$,

con $\vec{u}$ vector director de la recta dada. Luego

$|\overrightarrow{A'B'}| = \frac{|\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(-5, 2) \cdot (-4, 3)|}{\sqrt{29}} = \frac{26}{\sqrt{29}} =$

$= \frac{26\sqrt{29}}{29}$

10. La altura es la distancia de C a la recta que pasa por A y B.

r: $\frac{x+3}{8} = \frac{y}{-2} \Rightarrow x + 4y + 3 = 0$

$h = d(C, r) = \frac{|3 + 28 + 3|}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

11. $P(3, 4) \in r$, y su distancia a las rectas s y s', cuya ecuación será de la forma $2x + y + C = 0$, es 3.

$d(P, s) = d(P, s') = \frac{|6 + 4 + C|}{\sqrt{5}} = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow |10 + C| = 3\sqrt{5}$

de donde $C = -10 \pm 3\sqrt{5}$ y las rectas pedidas son $2x + y - 10 \pm 3\sqrt{5} = 0$.

12. Sea $X(x, y)$. Entonces: $d(A, X) = d(B, X) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$

$x^2 + y^2 + 6x + 9 = x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29$

$16x - 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow 4x - y - 5 = 0$

13. $\frac{|x + y - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{|4x - 3y + 15|}{5}$

$5(x + y - 5) = \pm\sqrt{2}(4x - 3y + 15)$

$(5 \pm 4\sqrt{2})x + (5 \mp 3\sqrt{2})y - 25 \pm 15\sqrt{2} = 0$

y la de pendiente positiva es

$(5 - 4\sqrt{2})x + (5 + 3\sqrt{2})y + (-25 - 15\sqrt{2}) = 0.$

6 Cónicas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Conocer y saber hallar la ecuación de una circunferencia determinada por alguno de sus elementos.	**1.** Determina la ecuación general de la circunferencia de la que se conoce: a) El centro $C(5, -1)$ y el radio $r = 3$. b) Los extremos de un diámetro son los puntos $A(-3, -1)$ y $B(3, 3)$.
B. Obtener los elementos de una çcircunferencia a partir de su ecuación.	**2.** Calcula la ecuación de la circunferencia concéntrica con $$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 7 = 0$$ y tangente a la recta $x - 2y - 8 = 0$. **3.** Calcula la longitud de las circunferencias siguientes. a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ b) $2x^2 + 2y^2 - 14x + 6y + 3 = 0$
C. Hallar la potencia de un punto respecto de una circunferencia y calcular el eje radical de dos circunferencias	**4.** Sean las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 11 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ y los puntos $A(-1, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(2, 2)$. Determina: a) La potencia de cada uno de los puntos respecto de cada circunferencia. b) La posición relativa de cada punto respecto de las dos circunferencias. c) El eje radical de las circunferencias.
D. Determinar la posición relativa de puntos y rectas respecto de una circunferencia.	**5.** Determina la posición relativa del punto $P(5, -2)$ y de la recta $7x - 13y + 9 = 0$ respecto de la circunferencia $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 100$, teniendo en cuenta su distancia al centro de la circunferencia. **6.** La recta $3x + 4y + 20 = 0$ corta la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$ en dos puntos M y N. Calcula: a) La longitud del segmento $\overline{MN}$. b) La ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{MN}$. NOTA: No es preciso determinar las coordenadas de los puntos M y N.
E. Calcular las ecuaciones de la elipse, la hipérbola y la parábola, y obtener sus elementos.	**7.** La ecuación $12x^2 - 3y^2 - 36 = 0$ corresponde a una cónica. a) Exprésala en su forma reducida e identifica de qué cónica se trata. b) Halla sus elementos (ejes, vértices, etc.). c) Represéntala gráficamente. **8.** Una elipse con centro en el origen de coordenadas y los focos en el eje de abscisas pasa por el punto $P\left(2, \sqrt{2}\right)$ y su excentricidad es $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Calcula su ecuación y efectúa su representación gráfica.
F. Determinar la posición relativa de las cónicas respecto a puntos, rectas y entre sí.	**9.** Determina si el punto $P\left(\dfrac{3}{2}, 3\right)$ es interior, exterior o pertenece a la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, utilizando las distancias desde el punto P hasta los focos de la elipse. **10.** Calcula qué valores debe tener m para que la recta $y = mx$ sea tangente a la parábola $(y - 1)^2 = 2(x - 3)$.

1. a) $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$

$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$

b) El centro es el punto medio de $\overline{AB} \Rightarrow C(0,\ 1)$, y el radio, $r = d(A,\ C) = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Así: $(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y - 12 = 0$

2. Concéntricas $\rightarrow$ mismo centro $C(2,\ -1)$

$$\text{Radio} = d(C,\ \text{recta}) \rightarrow \frac{|2 - 2(-1) - 8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + \frac{9}{5} = 0$$

3. a) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} C(2,\ 1) \\ r = \sqrt{5} \end{cases}$

Longitud de la circunferencia $L = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{5}$

b) $2x^2 + 2y^2 - 14x + 6y + 3 = 0$ equivale a:

$$x^2 + y^2 - 7x + 3y + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} C\left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right) \\ r = \sqrt{13} \end{cases}$$

$L = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{13}$

4. a) $Pot_A\ (C_1) = (-1)^2 + 2^2 + 4(-1) + 2 \cdot 2 - 11 = -6 < 0$

$Pot_B\ (C_1) = 1 + 16 + 4 + 8 - 11 = 18 > 0$

$Pot_C\ (C_1) = 4 + 4 + 8 + 4 - 11 = 9 > 0$

$Pot_A\ (C_2) = 1 + 4 - 12 + 5 = -2 < 0$

$Pot_B\ (C_2) = 1 + 16 - 24 + 5 = -2 < 0$

$Pot_C\ (C_2) = 4 + 4 - 12 + 5 = 1 > 0$

b) Las potencias negativas corresponden a puntos interiores, y las positivas, a puntos exteriores a la circunferencia correspondiente.

c) El eje radical se obtiene igualando las ecuaciones de C_1 y C_2:

$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 11 = x^2 + y^2 - 6y + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2y - 4 = 0$

5. Centro $C(-5,\ 3)$. Radio $r = 10$.

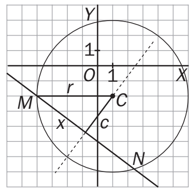
$d(P,\ C) = \sqrt{(5 + 5)^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{125} > 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ El punto P es exterior a la circunferencia.

$$d(C,\ \text{recta}) = \frac{|-35 - 39 + 9|}{\sqrt{7^2 + (-13)^2}} < 10 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ La recta es secante a la circunferencia.

6. a) Centro: $C(1,\ -2)$; radio: $r = 5$



$$c = d(C,\ \text{recta}) = \frac{|3 - 8 + 20|}{5} = 3$$

De la figura, aplicando Pitágoras:

$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Luego la longitud de $\overline{MN}$ es $2 \cdot 4 = 8$.

b) La mediatriz será la perpendicular a la recta dada que pasa por el centro de la circunferencia.

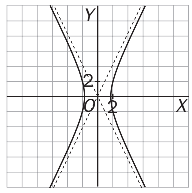
$4x - 3y + C = 0 \Rightarrow 4 + 6 + C = 0 \rightarrow C = -10$

Por tanto, la mediatriz es $4x - 3y - 10 = 0$.

7. a) $12x^2 - 3y^2 - 36 = 0 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{12} = 1$

Se trata de una hipérbola.

b) $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$,



$c = \sqrt{3 + 12} = \sqrt{15}$

Vértices $A\left(\sqrt{3},\ 0\right)$ $A'\left(-\sqrt{3},\ 0\right)$

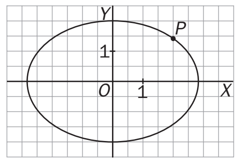
Focos $F\left(\sqrt{15},\ 0\right)$ $F'\left(-\sqrt{15},\ 0\right)$

Excentricidad $e = \sqrt{5}$

Asíntotas $y = \pm 2x$

8. La ecuación es de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\begin{cases} \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{c}{a} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 8 \rightarrow a = 2\sqrt{2} \\ b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \\ c^2 = 4 \rightarrow c = 2 \end{cases}$$



La ecuación es $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

9. El eje mayor está en la dirección del eje Y:

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

Focos $F\left(0,\ 2\sqrt{3}\right)$; $F'(0,\ -2\sqrt{3})$

$d(P,\ F) + d(P,\ F') =$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - 2\sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)^2} =$$

$= 1{,}57 + 6{,}64 = 8{,}21 > 2a = 8$

Por tanto, el punto es exterior a la elipse.

10. Se resuelve el sistema formado por las ecuaciones de la recta y de la parábola:

$$\begin{cases} y = mx \\ (y - 1)^2 = 2(x - 3) \end{cases} \Rightarrow (mx - 1)^2 = 2(x - 3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow m^2x^2 - 2(m + 1)x + 7 = 0$

Como la intersección ha de ser única para un valor dado de m, el discriminante de esta última ecuación será cero:

$4(m + 1)^2 - 28m^2 = 0 \Rightarrow (m + 1)^2 = 7\ m^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m + 1 = \pm\sqrt{7}m \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$$

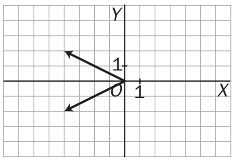
7 Números complejos

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Resolver ecuaciones de segundo grado con el discriminante negativo.	**1.** En cada caso, resuelve la ecuación y representa gráficamente sus soluciones. a) $x^2 + 8x + 20 = 0$ b) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$
B. Efectuar operaciones (suma, resta, producto, potencia y cociente) con números complejos en forma binómica.	**2.** Se consideran los complejos $z_1 = -3 + 4i$ y $z_2 = 1 + 3i$. Determina: a) El módulo de z_1, z_2, $(z_1 + z_2)$ y $(z_1 - z_2)$ b) El cociente $\frac{z_1 + z_2}{z_2}$ **3.** Determina un número complejo z que verifique $\frac{z \cdot (4 - 5i) + (-3 + i)}{1 - i} = 3 + 3i$ y calcula después z^4.
C. Obtener las partes reales, imaginaria, el módulo y el argumento de un número complejo con determinadas condiciones.	**4.** Halla en cada caso el valor del número real k para que el cociente $\frac{10 + 20i}{k - 3i}$ sea: a) Un número real. b) Un número complejo de módulo $2\sqrt{5}$. **5.** El argumento del número complejo $2 + ki$ es $\frac{5\pi}{3}$. ¿Cuál es su módulo?
D. Escribir un número complejo en todas las formas conocidas, sabiendo pasar de unas a otras.	**6.** Expresa en forma polar los siguientes números complejos. a) $2i$ b) -4 c) $-3 - \sqrt{27}i$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{7} - \frac{5}{7}i$
E. Operar correctamente en forma polar.	**7.** Se considera el complejo $z = -8 - 8\sqrt{3}i$. Determina: a) $\sqrt[4]{z}$ en forma polar. b) Los afijos de las raíces halladas en el apartado anterior. c) El área del polígono regular cuyos vértices son dichos afijos. **8.** Calcula $\left(-1 + \sqrt{3}i\right)^6$ y expresa el resultado en forma binómica.

1. a) $x^2 + 8x + 20 = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 80}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-8 \pm 4i}{2}$$

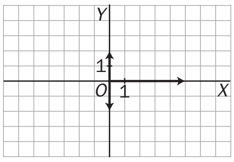
$$x = -4 \pm 2i \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 + 2i \\ x_2 = -4 - 2i \end{cases}$$



b) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20 = 0$

Se descompone mediante la regla de Ruffini:

$$(x - 5)\,(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 \\ x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = \pm 2i \end{cases}$$



2. a) $|z_1| = +\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$|z_2| = +\sqrt{1^2 + 3^2} = 10$

$|z_1 + z_2| = |-2 + 7i| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53}$

$|z_1 - z_2| = |-4 + i| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

b) $$\frac{z_1 + z_2}{z_2} = \frac{-2 + 7i}{1 + 3i} = \frac{(-2 + 7i)(1 - 3i)}{(1 + 3i)(1 - 3i)} =$$

$$= \frac{-2 + 6i + 7i + 21}{1 + 9} = \frac{19}{10} + \frac{13}{10}i$$

3. $$\frac{z \cdot (4 - 5i) + (-3 + i)}{1 - i} = 3 + 3i$$

Despejando z

$$z = \frac{(3 + 3i)(1 - i) - (-3 + i)}{(4 - 5i)} = \frac{9 - i}{4 - 5i} =$$

$$= \frac{(9 - i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{41 + 41i}{41} = 1 + i$$

$z^4 = [(1 + i)^2]^2 = (2i)^2 = -4$

4. Se calcula el cociente

$$\frac{10 + 20i}{k - 3i} = \frac{(10 + 20i)(k + 3i)}{k^2 + 9} =$$

$$= \frac{10k - 60}{k^2 + 9} + \frac{(20k + 30)}{k^2 + 9}i$$

a) Para que sea un número real, su parte imaginaria tiene que ser nula.

$$20k + 30 = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$$

b) Como $\left|\dfrac{10 + 20i}{k - 3i}\right| = \dfrac{|10 + 20i|}{|k - 3i|} = \dfrac{\sqrt{500}}{\sqrt{k^2 + 9}}$, resulta

$$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{k^2 + 9}} = 2\sqrt{5} \Rightarrow 10\sqrt{5} = 2\sqrt{5}\sqrt{k^2 + 9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \pm 4$$

5. $$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{k}{2} \Rightarrow -\sqrt{3} = \frac{k}{2} \Rightarrow k = -2\sqrt{3}$$

$$\left|2 - 2\sqrt{3}i\right| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

6. a) $2i = 2_{90^\circ} = 2_{\frac{\pi}{2}}$

b) $-4 = 2_{180^\circ} = 4_{\pi}$

c) $-3 - \sqrt{27}\,i \Rightarrow$

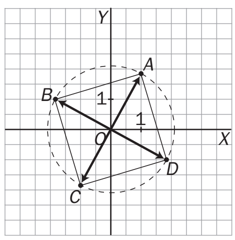
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{módulo} = \sqrt{9 + 27} = 6 \\ \text{argumento} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\sqrt{27}}{-3}\right) = 240^\circ = \dfrac{4\pi}{3} \end{cases}$$

d) $$\frac{5\sqrt{3}}{7} - \frac{5}{7}i \Rightarrow \begin{cases} \text{módulo} = \sqrt{\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{7}\right)^2} = \dfrac{10}{7} \\ \text{argumento} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\frac{5}{7}}{\frac{5\sqrt{3}}{7}}\right) = 330^\circ = \dfrac{7\pi}{6} \end{cases}$$

7. $z = -8 - 8\sqrt{3}i = 16_{240^\circ}$

a) $$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16_{240^\circ}} = \begin{cases} z_1 = 2_{60^\circ} = 2_{\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}i \\ z_2 = 2_{150^\circ} = 2_{\frac{5\pi}{3}} = -\sqrt{3} + i \\ z_3 = 2_{240^\circ} = 2_{\frac{4\pi}{3}} = -1 - \sqrt{3}i \\ z_4 = 2_{330^\circ} = 2_{\frac{7\pi}{3}} = \sqrt{3} - i \end{cases}$$

b)



$A(1, \sqrt{3})$ $\qquad$ $C(-1, -\sqrt{3})$

$B(-\sqrt{3}, 1)$ $\qquad$ $D(\sqrt{3}, -1)$

c) $$S = \frac{(\text{diagonal})^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8\text{u}^2$$

8. $(-1 + \sqrt{3}i)^6 = (2_{120^\circ})^6 = (2^6)_{6 \cdot 120^\circ} = 64_{720^\circ} = 64_{0^\circ} = 64$

Prueba inicial (análisis)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. La arista de la base de un prisma recto de base cuadrada mide x cm, y las aristas laterales son el triple de las aristas de la base.

a) Escribe la función que permite calcular el área lateral del prisma cuando se conoce x.

b) Escribe la función que determina el área total del prisma en función de la arista x.

c) Expresa el volumen del prisma en función de x.

d) Calcula las áreas lateral y total y el volumen del prisma si la arista de la base mide 5 cm.

2. Dada la función de variable natural $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$, calcula los siguientes valores:

a) $f(56)$ b) $f(101)$ c) $(f \circ f \circ f)(422)$

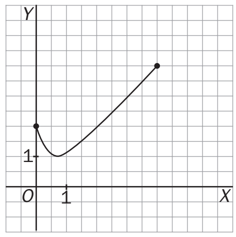
3. Calcula el dominio de las funciones de variable real:

a) $f(x) = x^2 - 4$ b) $g(x) = \frac{x-2}{x^2 - x - 2}$ c) $h(x) = \sqrt{8 - 3x}$

4. Efectúa con las funciones $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \frac{3}{x+4}$ y $h(x) = \sqrt{x}$ las siguientes operaciones.

a) $(f + g)(-1)$ c) $(f \circ g)(2)$ e) $(h \circ f)(3)$ g) $(gf)(x)$

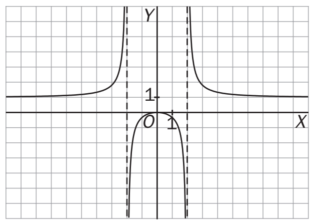
b) $(hf)(4)$ d) $(g \circ h)(9)$ f) $(f + g)(x)$ h) $(g \circ f)(x)$



5. La gráfica representada corresponde a una función $f(x)$. ¿Cuál es su dominio? ¿Qué recorrido tiene?

6. Los cortes con los ejes de una función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ son $A(1, 0)$, $B(5, 0)$ y $C(0, 3)$. Halla sus coeficientes y determina las coordenadas del vértice.

7. Representa gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } -6 \leqslant x < -2 \\ |x| & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -x + 4 & \text{si } 2 < x \leqslant 6 \end{cases}$ e indica su dominio, recorrido, máximos mínimos relativos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento.



8. En la función representada a la derecha, determina:

a) Dominio y recorrido.

b) Asíntotas.

c) Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

9. Justifica si las siguientes parejas de funciones son iguales o no.

a) $f(x) = \sqrt{x^2}$ $g(x) = x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$ $g(x) = (x + 1)(x - 2)$

c) $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{2-x}\right)$ $g(x) = \log(x + 3) - \log(2 - x)$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x - 10}{x - 2}}$ $g(x) = \frac{\sqrt{-2x - 10}}{\sqrt{x - 2}}$

10. Determina los siguientes límites de sucesiones.

a) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 + 2n}{n}\right)^n$ b) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 + 2n}{2 + 3n}\right)^{n-1}$ c) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

11. Halla los siguientes límites de funciones.

a) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$ b) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}\right)$ c) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}\right)$

12. Halla el valor de k para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ k - 5x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua.

1. a) $A_L(x) = 4 \cdot (x \cdot 3x) = 12x^2$ cm^2

b) $A_T(x) = 2x^2 + 12x^2 = 14x^2$ cm^2

c) $V(x) = x^2 \cdot 3x = 3x^3$ cm^3

d) $A_L(5) = 12 \cdot 5^2 = 300$ cm^2

$A_T(5) = 14 \cdot 5^2 = 350$ cm^2

$V(5) = 3 \cdot 5^3 = 375$ cm^3

2. a) $f(56) = \dfrac{56}{2} = 28$

b) $f(101) = \dfrac{101 + 1}{2} = 51$

c) $f(f \circ f \circ f)(422) = f[f(f(422))] = f(f(211)) =$
$= f(106) = 53$

3. a) $D_f = \mathbb{R}$

b) $D_g = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - x - 2 \neq 0\} =$
$= (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$

c) $D_h = \{x \in \mathbb{R},\ 8 - 3x > 0\} = \left(-\infty, \dfrac{8}{3}\right]$.

4. a) $(f + g)(-1) = f(-1) + g(-1) = (-3) + 1 = -2$

b) $(hf)(4) = h(4) \cdot f(4) = 2 \cdot 12 = 24$

c) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} - 4 = -\dfrac{15}{4}$

d) $(g \circ h)(9) = g(h(9)) = g(3) = \dfrac{3}{7}$

e) $(h \circ f)(3) = \sqrt{5}$

f) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 4) + \dfrac{3}{x + 4} =$
$= \dfrac{x^3 + 4x^2 - 4x - 13}{x + 4}$

g) $(gf)(x) = g(x) \cdot f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x + 4}$

h) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 4) = \dfrac{3}{x^2}$

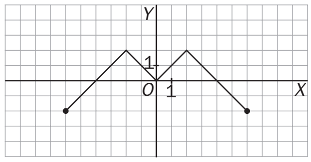
5. Dominio $D = [0, 4]$.
Recorrido $R(f) = [1, 4]$

6. Raíces $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.
La función será $f(x) = a(x - 1)(x - 5)$, y como pasa por $(0, 3) \Rightarrow 3 = 5a \Rightarrow a = \dfrac{3}{5}$.

Sustituyendo y operando resulta:

$f(x) = \dfrac{3}{5}(x - 1)(x - 5) = \dfrac{3}{5}x^2 - \dfrac{18}{5}x + 3$

7. Dominio $D = [-6, 6]$.
Recorrido $R(f) = [-2, 2]$



Máximos relativos para
$x = -2$, $x = 2$
$M_1(-2, 2)$ $M_2(2, 2)$

Mínimos relativos para
$x = -6$, $x = 0$
$x = 6$ $m_1(-6, -2)$ $m_2(0, 0)$ $m_3(6, -2)$

Crecimiento: $(-6, -2) \cup (0, 2)$.
Decrecimiento: $(-2, 0) \cup (2, 6)$

8. a) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Recorrido: $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas verticales en $x = -2$ y $x = 2$; asíntota horizontal $y = 1$

c) Creciente: $(-\infty, 0] - \{-2\}$.
Decreciente: $[0, +\infty) - \{2\}$.
Máximo relativo en $(0, 0)$.

9. a) $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq g(x) = x$.
También puede verse que $f(-3) = 3$ mientras que $g(-3) = -3$.

b) $f(x) = x^2 - x - 2 = g(x) = (x + 1) \cdot (x - 2)$

c) $f(x) = \log\left(\dfrac{x + 3}{2 - x}\right) = g(x) = \log(x + 3) - \log(2 - x)$
porque tienen el mismo dominio, que es $(-3, 2)$.

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x - 10}{x - 2}} \neq g(x) = \dfrac{\sqrt{-2x - 10}}{\sqrt{x - 2}}$
porque $D_f = [-5, 2)$ y la función $g(x)$ no existe para ningún x.

10. a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1 + 2n}{n}\right)^n = 2^{+\infty} = +\infty$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1 + 2n}{2 + 3n}\right)^{n - 1} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

11. a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}\right) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x + 1)}{(x - 2)} = \dfrac{1}{4}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}\right) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} =$
$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

12. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Rightarrow 8 = k - 10 \Rightarrow k = 18$

8 Funciones, límites y continuidad

CRITERIOS DE EVALUACIÓN | **ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN**

A. Obtener el dominio y el recorrido de funciones.

1. En un círculo de 8 cm de radio se inscribe un rectángulo de base $2x$. Expresa en función de la base el área del rectángulo ¿Cuál es el dominio de esta función?

2. Halla el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 - \sqrt{x - 3}$ b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x - 3}$

3. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 2x$ b) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

B. Hallar las funciones que resultan al efectuar operaciones con otras funciones más elementales, así como determinar la correspondencia inversa de una función dada.

4. Dadas la funciones $f(x) = \dfrac{2}{x - 3}$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^2 + 1$, calcula:

a) $[(f + h) \circ g](4)$ b) $(h \circ g \circ h)(x)$ c) $(f \circ h \circ g)(x)$

5. Las siguientes funciones se obtienen como composición de otras elementales como son $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = \operatorname{sen} x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = \ln x$, $f_5(x) = 2x - 1$. Indica cómo se han obtenido:

a) $g(x) = 2 \operatorname{sen}\sqrt{x - 1}$ c) $j(x) = \operatorname{sen}^2 x$

b) $h(x) = \ln \sqrt{\operatorname{sen}(2x - 1)}$ d) $k(x) = \operatorname{sen}(\ln(x^2))$

6. Halla la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$.

C. Obtener los límites laterales de una función en un punto y determinar la existencia o no existencia del límite.

7. Calcula los siguientes límites de funciones polinómicas.

a) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x - 3)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 4x)$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 + x^3 + 2)$

8. Calcula los límites laterales siguientes.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 2}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x - 2}{x^2}$

D. Calcular límites de funciones y de sucesiones, resolviendo indeterminaciones.

9. Calcula los límites de las funciones y sucesiones racionales siguientes.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (x + 1)^2}{x^2 - x}$ b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n - 2n^2}{n^2 + n + 1}$

10. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$

E. Determinar y clasificar las discontinuidades de una función definida a trozos o no y esbozar su gráfica.

11. Una función $f(x)$ está dada por la expresión $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3}$ si $x \neq 3$. ¿Cómo elegirías el valor de $f(3)$ para que la función fuera continua en ese punto? ¿Quedaría algún otro punto de discontinuidad? ¿Qué tipo de discontinuidad presenta?

12. Calcula los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea continua para todo valor real. Represéntala.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ ax + b & \text{si} \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ -2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

F. Buscar y determinar las asíntotas de una función, así como su posición relativa respecto de la curva.

13. Determina las asíntotas paralelas al eje de ordenadas (verticales) de las funciones y la posición de la curva respecto a ellas.

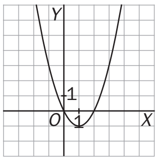
a) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{1 - x}{(x - 3)^2}$

14. Calcula la asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 7}{x^2 + 1}$, su posición relativa respecto a la curva y los puntos de corte si los hubiere.

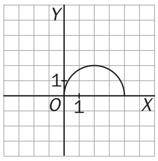
1. $S = 4x \cdot \sqrt{64 - x^2}$ Dominio $D = (0, 8)$. Para $x = 0$ o $x = 8$, el rectángulo se reduce a un segmento.

2. a) $D = (-\infty, 3]$
b) $D = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$
c) $D = \mathbf{R} - \{-1, 3\}$

3. a) $D = (-\infty, +\infty)$
Recorrido $[-1, +\infty)$



b) $D = [0, 4]$
Recorrido $[0, 2]$



4. a) $[(f + h) \circ g](4) = f[g(4)] + h[g(4)] = f(2) + h(2) = 1$
b) $(h \circ g \circ h)(x) = h\big[g\big(h(x)\big)\big] = \big(\sqrt{x^2+1}\big)^2 + 1 = x^2 + 2$
c) $(f \circ h \circ g)(x) = f\big[h\big(g(x)\big)\big] = \dfrac{2}{\big[(\sqrt{x})^2 + 1\big] - 3} = \dfrac{2}{x - 2}$

5. a) $g(x) = (f_5 \circ f_2 \circ f_1)(x) = 2\text{sen}\sqrt{x} - 1$
b) $h(x) = (f_4 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_5)(x) = \ln[(f_1 \circ f_2 \circ f_5)(x)] =$
$= \ln\sqrt{(f_2 \circ f_5)(x)} = \ln\sqrt{\text{sen}(f_5(x))} = \ln\sqrt{\text{sen}(2x - 1)}$
c) $j(x) = \text{sen}^2\, x = (\text{sen}\, x)^2 = f_3(\text{sen}\, x) = (f_3 \circ f_2)(x)$
d) $k(x) = \text{sen}(\ln(x^2)) = (f_2 \circ f_4 \circ f_3)(x)$

6. $y = \dfrac{2x + 4}{x - 1} \Leftrightarrow xy - y = 2x + 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{y + 4}{y - 2}$
La función es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 4}{x - 2}$

7. a) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x - 3) = -4$
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 4x) = +\infty$
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^5 + x^3 + 2) = -(-\infty) = +\infty$

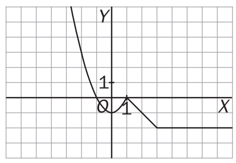
8. a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x + 2)}{(x + 2) \cdot (x - 2)} = \dfrac{4}{4 \cdot 0^+} = +\infty$
b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{(x + 2)}{(x + 2) \cdot (x - 2)} = \dfrac{4}{4 \cdot 0^-} = -\infty$
c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$
d) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x + 2}{x^2} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

9. a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (x+1)^2}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x^2 - 2x}{x^2 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x - 2}{x - 1} = 2$
b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{(x + 2)} = \lim\limits_{x \to -2} (x + 2) = -4$
c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n - 2n^2}{n^2 + n + 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2\left(\dfrac{3}{n} - 2\right)}{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} =$
$= \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left(\dfrac{3}{n} - 2\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{0 - 2}{1 + 0 + 0} = -2$

10. a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2}\,\dfrac{\sqrt{1 + 2x} + 3}{\sqrt{1 + 2x} + 3} =$
$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{[(1 + 2x) - 9]\big(\sqrt{x} + 2\big)}{(x - 4)\big(\sqrt{1 + 2x} + 3\big)} =$
$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2(x - 4)\big(\sqrt{x} + 2\big)}{(x - 4)\big(\sqrt{1 + 2x} + 3\big)} = \dfrac{2 \cdot (2 + 2)}{3 + 3} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right) =$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1}} =$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right)} = \dfrac{2}{1 + 1} = 1$

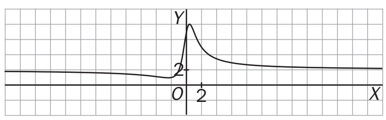
11. El dominio de $f(x)$ es $D = \mathbf{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}, 3\right\}$
$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 - 5x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(2x + 1)(x - 3)} = \dfrac{4}{7}$
Para que sea continua en $x = 3$ $f(3) = \dfrac{4}{7}$
$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{x + 1}{2x + 1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{0^-} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} \dfrac{x + 1}{2x + 1} = \dfrac{\frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$
En $x = -\dfrac{1}{2}$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.

12. Si $x \neq 1, 3$, f es continua al estar definida por polinomios. Para que sea también continua en 1 y en 3 debe cumplirse:
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 0 = a + b$
$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow 3a + b = -2$
$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$



13. a) $x = -1$: $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{x^2 - 1} = +\infty$; $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2}{x^2 - 1} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2}{x^2 - 1} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{x^2 - 1} = +\infty$
b) $x = 3$: $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1 - x}{(x - 3)^2} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1 - x}{(x - 3)^2} = -\infty$

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + 5x + 7}{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow y = 2$ es la asíntota
Cuando $x \to -\infty$ $y \to 2^-$ y si $x \to +\infty$ $y \to 2^+$
$2 = \dfrac{2x^2 + 5x + 7}{x^2 + 1} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 2x^2 + 5x + 7 \Rightarrow x = -1$



9 Funciones elementales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN | **ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN**

A. Representar de una forma aproximada la gráfica de una función teniendo en cuenta el dominio, los puntos de corte con los ejes, el signo y las asíntotas.

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 5}$ b) $g(x) = \sqrt{2 - 5x}$ c) $k(x) = \sqrt{\dfrac{x + 5}{2x - 3}}$

2. Para las funciones siguientes, determina los puntos de corte con los ejes, el signo, las asíntotas y esboza su representación gráfica.

a) $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x - 5)$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$

B. Averiguar si una función es simétrica o periódica, y en su caso, indicar el tipo de simetría y el perÌodo principal.

3. Justifica que la función $f(x) = 2(x - E(x))$ es periódica. Calcula el período principal y efectúa la representación gráfica para $0 \leqslant x \leqslant 5$.

*La función $E(x)$ "parte entera de x" representa al mayor número entero, n, tal que $n \leqslant x$.

4. Indica y justifica el tipo de simetría que tienen las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 + 5x$ b) $g(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$ c) $h(x) = 2^x - 2^{-x}$

C. Dibujar, de manera aproximada, la gráfica de una función polinómica fácilmente factorizable y encontrar la expresión algebraica de una función polinómica de la que conocemos un número suficiente de datos.

5. La siguiente tabla de valores corresponde a una función polinómica de segundo grado. Determina su expresión y completa la tabla de valores.

x	1	2	3	4		6
y	−1	0	3		80	

D. Reconocer y esbozar las gráficas de funciones logarítmicas, exponenciales y racionales.

6. Se considera la función $f(x) = 3 - 2^x$. Determina:

a) Su recorrido

b) Los puntos de corte con los ejes

c) Su representación gráfica

7. Representa gráficamente la función $y = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$ utilizando para ello los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, el signo y, si fuera preciso, una pequeña tabla de valores.

8. Estudia el signo y esboza la gráfica de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{(x + 3)^2(x - 3)^2}{x^2(x - 1)}$ b) $g(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 4x + 4}$

E. Identificar e interpretar las constantes de funciones trigonométricas del tipo $y = b + A \cdot \text{sen}(\omega(x - c))$ y efectuar su representación gráfica.

9. La profundidad del agua en un puerto, medida en metros, viene dada por la función $f(t) = 4 \text{ sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) + 7$, en donde la variable t está en horas.

a) Determina la profundidad máxima, mínima y media del puerto.

b) Halla el período de la función e interpreta el resultado.

c) ¿Qué profundidad tendrá el agua del puerto para $t = 30$ horas?

d) Representa gráficamente la función para $0 \leqslant t \leqslant 24$.

10. Se considera la función $f(x) = -2 + \cos 2x$, definida en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Calcula su recorrido. Determina su función inversa y, a partir de la gráfica de la función $f(x)$, deduce cómo será la gráfica de la función $f^{-1}(x)$.

F. Construir funciones por traslación y dilatación de otras.

11. A partir de la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$, dibuja la de la función $g(x) = 4\,[f(2x) - 3]$.

Soluciones

1. a) $D = \mathbb{R} - \{5\}$

b) $2 - 5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \dfrac{2}{5} \Rightarrow D = \left(-\infty, \dfrac{2}{5}\right]$

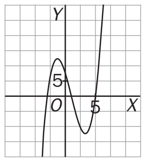
c) $\dfrac{x + 5}{2x - 3} \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -5$ ó $x < \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = (-\infty, -5]$ o $\left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

2. a) Cortes con los ejes (0, 15), (−3, 0), (1, 0), (5, 0)

Signo ⊖ ⊕ ⊖ ⊕ (−3, 1, 5)

No tiene asíntotas.

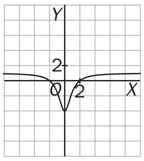


b) Cortes con los ejes (0, −4), (−2, 0), (2, 0)

Signo ⊕ ⊖ ⊕ (−2, 2)

Asíntota horizontal $y = 1$

porque $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 1} = 1$

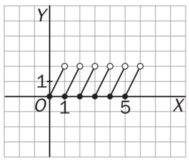


3. El período es $T = 1$, porque

$f(x + 1) = 2 \cdot [(x + 1) - E(x + 1)] =$

$= 2 \cdot [(x + 1) - (1 + E(x))] =$

$= 2 \cdot [(x - E(x))] = f(x)$



4. a) $f(x) = (-x)^3 + 5(-x) = -x^5 - 5x = -f(x)$ Impar

b) $g(-x) = \dfrac{5}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{5}{x^2 + 1} = g(x)$ Par

c) $h(-x) = 2^{-x} - 2^{+x} = -(2^x - 2^{-x}) = -h(x)$ Impar

5. La función es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 0 \\ f(3) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -1 \\ 3a + b = 1 \\ 5a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a = 1, b = -2, c = 0$

La función es $y = x^2 - 2x$, y los valores que faltan son $f(4) = 16 - 8 = 8$ $\quad f(6) = 36 - 12 = 24$

$x^2 - 2x = 80 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 10 \end{cases}$ porque $\begin{matrix} f(-8) = 80 \\ f(10) = 80 \end{matrix}$

6. a) $2^x > 0 \Rightarrow -2^x < 0 \Rightarrow 3 - 2^x < 3$

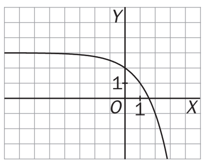
El recorrido es $(-\infty, 3)$.

b) Si $x = 0 \Rightarrow y = 3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$ $\quad P(0, 2)$

Si $y = 0 \Rightarrow 0 = 3 - 2^x \Leftrightarrow 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2(3) = 1{,}58$

El punto será $Q(\log_2(3), 0)$.

c) La gráfica con asíntota $y = 3$ cuando $x \to -\infty$



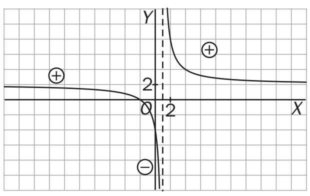
7. Puntos de corte $P(0, -4)$ $Q(-2, 0)$

Asíntotas:

Vertical $\quad x = 1$

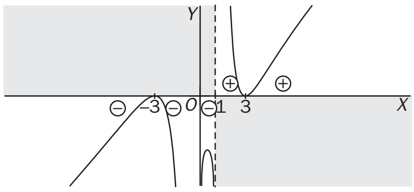
Horizontal $\quad y = 2$

Signo: en la gráfica.

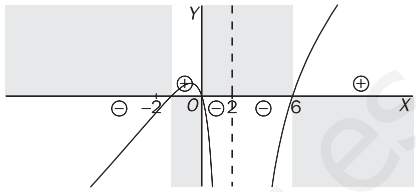


8. Las escalas verticales no son reales.

a)



b) $g(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 - 12x}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{x(x + 2)(x - 6)}{(x - 2)^2}$



9. a) Como el valor del seno de un ángulo verifica que $-1 \leqslant \text{sen}\,\alpha \leqslant 1$, entonces

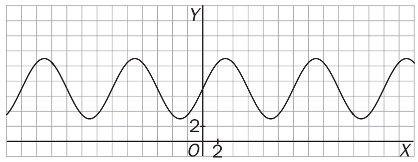
$-4 \leqslant 4\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) \leqslant 4\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right) + 7 \leqslant 11$

mínimo 3 m, máximo 11 m, medio 7 m

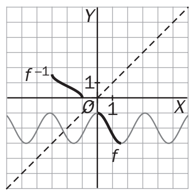
b) $T = \dfrac{2\pi}{\left(\dfrac{\pi}{6}\right)} = 12$ horas. Cada 12 horas sube la marea y cada 12 horas baja.

c) $t = 30$ h $\Rightarrow y = 4\,\text{sen}(5\pi) + 7 = 7$ m

d)



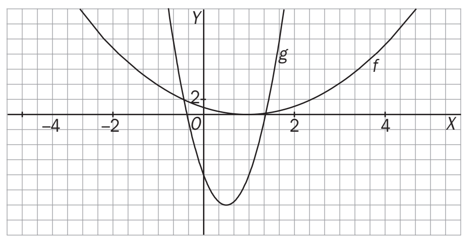
10. Recorrido $[-3, -1]$; $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\text{arc}\cos(x + 2)$



11. $f(2x)$ es la gráfica de $f(x)$ comprimida horizontalmente en un factor 2.

$f(2x) - 3$ tiene por gráfica la anterior trasladada 3 unidades hacia abajo.

$4[f(2x) - 3]$ corresponde a la gráfica de la anterior ampliada verticalmente en un factor 4.



10 Derivadas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo y la tasa de variación instantánea en un punto.	**1.** Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 + x + 3$ en los intervalos $[-2, -1]$ y $[1, 3]$. **2.** Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x+5}$ en el intervalo $[x, x + h]$. **3.** El espacio, en metros, recorrido por un móvil viene expresado por la función $s(t) = 4t^2 - t$, t en segundos. a) Halla la velocidad media del móvil en los tres primeros segundos de recorrido. b) Obtén la velocidad instantánea para $t = 1$ segundo.
B. Determinar la derivada de una función en un punto e interpretarla como la pendiente de la tangente a una curva en un punto y calcular su ecuación.	**4.** Obtén, aplicando la definición, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = 2$. ¿Cuál es la ecuación de la tangente? ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje X? **5.** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 0$. ¿En qué punto corta esta recta al eje X?
C. Estudiar y determinar las condiciones de continuidad y de derivabilidad de una función.	**6.** La función $f(x) = x\|x - 2\|$ es continua en toda la recta real. Justifica que en cambio no es derivable en $x = 2$, calculando las derivadas laterales en ese punto $f'(2^-)$ y $f'(2^+)$.
D. Obtener, mediante la aplicación de las reglas de derivar, la derivada de funciones que se consiguen operando con funciones elementales.	**7.** Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ de las que se conoce $f(-2) = 3$, $g(-2) = -1$, $g'(-2) = 7$, $g'(3) = -5$, $f'(3) = 0$ y $f'(-2) = 6$, $f'(-1) = -3$, calcula: a) $(f + g)'(3)$ b) $(f \cdot g)'(-2)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(-2)$ d) $(f \circ g)'(-2)$ e) $(g \circ f)'(-2)$ **8.** Halla la función derivada de las siguientes funciones. a) $f(x) = (3x - 4)(2 - 5x)$ b) $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ c) $h(x) = (x^2 - 3x + 5)^5$
E. Determinar los extremos relativos de una función y los intervalos de monotonía.	**9.** Estudia los intervalos de crecimiento, decrecimiento y extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$. **10.** Calcula los valores de a y b para que la función $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ tenga un mínimo relativo en el punto $(1, -1)$. **11.** Determina el dominio, el crecimiento y los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.
F. Plantear y resolver problemas de optimización, en especial los relacionados con la geometría.	**12.** Descompón el número 8 en dos sumandos no negativos tales que la suma del cubo del primero con el triple del segundo sea mínima. ¿Cuál sería la descomposición que hace máxima la citada suma? **13.** Determina las dimensiones del mayor rectángulo (de área máxima) inscrito en el triángulo isósceles de lado desigual 8 cm y altura sobre ese lado de 10 cm. ¿Cuál es esa área?

1. TVM $f[-2, -1] = \dfrac{f(-1) - f(-1)}{-1 - (-2)} = \dfrac{4 - 9}{1} = -5$;

TVM $f[1, 3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{24 - 6}{2} = 9$

2. TVM $f[x, x + h] = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \dfrac{\dfrac{3}{x + h + 5} - \dfrac{3}{x + 5}}{h} = \dfrac{-3}{(x + 5) \cdot (x + h + 5)}$

3. a) $v_m = \dfrac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \dfrac{33}{3} = 11$ m/s

b) $v_i = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{s(1 + h) - s(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (4h + 7) = 7$ m/s

4. $m = f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[2(2 + h)^2 - 3(2 + h)] - (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2)}{h} = 5$

$y - f(2) = m(x - 2) \Rightarrow y - 2 = 5(x - 2)$

$\operatorname{tg} \alpha = 5 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(5) = 78° \, 41' \, 24''$

5. $f(0) = 1$, $f'(x) = \dfrac{-1}{(x + 1)^2}$, $= f'(0) = -1$;

la ecuación de la recta tangente es
$y - 1 = -1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = -x + 1$.

Punto de corte $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow P(1, 0)$

6. $f(x) = x \cdot |x - 2|$

$f'(2^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(2 + h)\,|h|}{h} = -2$

$f'(2^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(2 + h)\,|h|}{h} = +2$

No es derivable porque las derivadas laterales son distintas.

7. a) $(f + g)'(3) = f'(3) + g'(3) = 0 + (-5) = -5$

b) $(f \cdot g)'(-2) = f'(-2) \cdot g(-2) + f(-2) \cdot g'(-2) =$

$= 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 = -6 + 21 = 15$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(-2) = \dfrac{f'(-2) \cdot g(-2) - f(-2) \cdot g'(-2)}{[g(-2)]^2} =$

$= \dfrac{6 \cdot (-1) - 3 \cdot 7}{(-1)^2} = \dfrac{-6 - 21}{1} = -27$

d) $(f \circ g)'(-2) = f'(g(-2)) \cdot g'(-2) = f'(-1) \cdot g'(-2) =$

$= (-3) \cdot 7 = -21$

e) $(g \circ f)'(-2) = g'(f(-2)) \cdot f'(-2) = g'(3) \cdot f'(-2) =$

$= (-5) \cdot 6 = -30$

9. a) $f'(x) = 3(2 - 5x) + (3x - 4)(-5) = -30x + 26$

b) $g'(x) = \dfrac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 - 1)}{x^2} = \dfrac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

c) $h'(x) = 5(x^2 - 3x + 5)^4 \cdot (2x - 3)$.

9. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ $\quad 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

	$-\infty$ … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

$f(x)$ creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 2)$
Máximo relativo para $x = 0$ $\quad M(0, 0)$
Mínimo relativo para $x = 2$ $\quad m(2, -4)$

10. $f(x) = x^4 + ax^2 + b \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2ax$
$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b = -1 \\ 4 + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$
Es un mínimo relativo porque $f''(1) = 8 > 0$.

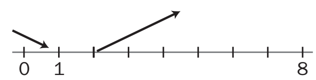
11. $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$

	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
x	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

$f(x)$ creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$

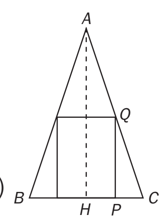
Máximo relativo para $x = 0$: $\quad M\left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$

12. Llamamos x al primer sumando y $(8 - x)$ al otro.
$S = x^3 + 3(8 - x)$ con dominio $[0, 8]$ $\quad S' = 3x^2 - 3$
$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, pero solo $x = 1$ pertenece a D.



Para $x = 1$ y $(8 - x) = 7$ hay un mínimo.
$S_{min} = 1^3 + 3 \cdot 7 = 22$
La descomposición que hace máxima la suma es $x = 0$ y $(8 - x) = 8$. En este caso, $S_{max} = 8^3 = 512$.

13. Siendo $HP = x$ y $PQ = y$, tenemos por semejanza de triángulos:



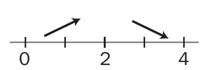
$\dfrac{y}{4 - x} = \dfrac{10}{4} \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}(4 - x)$

El área es:

$S = 2x \cdot y = 2x \cdot \dfrac{5}{2}(4 - x) = 5x(4 - x)$

$S' = -10x + 20$. De donde
$-10x + 20 = 0 \Rightarrow x = 2$

El área es máxima para
$x = 2$ y resulta $S_{max} = 5 \cdot 2 \cdot (4 - 2) = 20$ cm².



11 Derivadas y representación gráfica

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Obtener la función derivada de cualquier función y calcular el valor de la derivada en cualquier punto.

1. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^6 - 3x^3 + 9x}{3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

e) $f(x) = (3 \text{ sen } x - 2 \cos x)$

f) $f(x) = (-e^x + \text{tg } x)$

g) $f(x) = (e^x + e^{2x})$

h) $f(x) = x^2 \ln x$

2. Calcula la derivada de las funciones siguientes en los puntos indicados.

a) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$ en $x = 2$ b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x - 5}\right)$ en $x = 2$ y en $x = -1$

B. Determinar los puntos en los que las derivadas de una función cumplen una determinada condición.

3. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 + ax + 1$ tenga un máximo en $x = -1$. Para este valor de a, determina en qué punto de la gráfica de f la recta tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante y escribe la ecuación de dicha recta tangente.

4. Determina los valores de a, b y c en la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sabiendo que tiene un punto de inflexión para $x = 2$, la tangente en el punto de abscisa $x = 4$ es paralela a la recta $y = -15(x + 2)$ y pasa por el punto $P(1, -25)$.

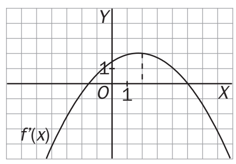
C. Determinar los extremos relativos de una función y los intervalos de monotonía.

5. Determina las raíces, los intervalos de monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2}$ b) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4x}$

D. Determinar los puntos de inflexión de una función y los intervalos de curvatura.

6. La gráfica de la figura corresponde a la derivada de la función $f(x)$. Determina los intervalos de monotonía de la función $f(x)$, los puntos en los que se encuentran sus extremos relativos, la curvatura y los puntos de inflexión.



7. Estudia la monotonía y curvatura, y determina los extremos relativos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - 2}$ b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 1}$ c) $f(x) = x\, e^x$

E. Realizar el estudio completo de las características y los puntos notables de una función.

8. Realiza el estudio completo (dominio, puntos de corte con los ejes, simetría, asíntotas, monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión) y representa gráficamente las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) $f(x) = \dfrac{2x - 6}{x + 1}$

c) $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x \quad x \in [0, 2\pi]$

F. Efectuar la representación gráfica completa de una función tanto polinómica como racional.

9. Efectúa la representación gráfica de estas funciones, calculando para ello las características que consideres importantes en cada una de ellas.

a) $f(x) = 4x - x^2$

b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x + 3}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$

e) $f(x) = \ln(x + 1)$

f) $f(x) = e^{-x^2}$

1. a) $f''(x) = 2x^5 - 3x^2 + 3$

b) $f''(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}$

c) $f''(x) = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

d) $f''(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} = 1$

e) $f''(x) = 3 \cos x + 2 \text{ sen } x$

f) $f''(x) = -e^x + \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $f''(x) = e^x + 2e^{2x}$

h) $f''(x) = 2x \ln x + x$

2. a) $f'(x) = \dfrac{-5}{(x - 3)^2} \Rightarrow f'(2) = \dfrac{-5}{(-1)^2} = -5$

b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x - 5}\right)$ Con $D = (-\infty, 0) \cup (5, +\infty)$

$g'(x) = -\dfrac{5}{x(x - 5)}$

$g'(2)$ no existe porque $2 \notin D$

$g'(-1) = \dfrac{-5}{-1(-1 - 5)} = -\dfrac{5}{6}$

3. Al ser derivable en todo R y tener un máximo en $x = -1$, será $f'(-1) = 2(-1) + a = 0 \Rightarrow a = 2$.

La bisectriz del primer cuadrante $y = x$ tiene pendiente $m = 1$; por tanto, $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 2x + 2 = 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

$f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$. La recta tangente es $y - \dfrac{1}{4} = x + \dfrac{1}{2}$, o bien $4x - 4y + 3 = 0$.

4. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b, \quad f''(x) = 6x + 2a$

$$\begin{cases} f''(2) = 0 \\ f'(4) = -15 \\ f(1) = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 + 2a = 0 \\ 48 + 8a + b = -15 \\ 1 + a + b + c = -25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -15 \\ c = -5 \end{cases}$$

5. a) $f(x) = \dfrac{x - 2}{2x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4 - x}{2x^3}$

Raíz: $x = 2$, discontinuidad en $x = 0$

Creciente si $x \in (0, 4) (f' > 0)$

Decreciente si $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) (f' < 0)$

En $x = 4$ hay un máximo relativo.

b) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x$

Raíces $0 = x^4 - 8x^2 - 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Creciente si $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty) (f' > 0)$

Decreciente si $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2) (f' < 0)$

En $x = \pm 2$ mínimos relativos y en $x = 0$ un máximo relativo.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{4x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{4x^2}$

Raíces $x = \pm 1$

Creciente en todo el dominio, al ser $f' > 0$.

6. Es decreciente en $(-\infty, -1{,}5) \cup (5, +\infty)$ porque $f'(x) < 0$.

Es creciente en $(-1{,}5; 5)$ porque $f'(x) > 0$.

En $x = -1{,}5$ hay un mínimo relativo porque $f'(x) = 0$ y cambia de decreciente a creciente.

En $x = 5$ hay un máximo relativo porque $f'(x) = 0$ y cambia de creciente a decreciente.

Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$ porque f'' es creciente y, por tanto, su derivada $f''(x) > 0$.

Es cóncava hacia abajo en $(2, +\infty)$ porque f'' es decreciente y, por tanto, su derivada $f''(x) < 0$.

En $x = 2$ hay un punto de inflexión, al cambiar la curvatura y tener un máximo $f' \Rightarrow f''(x) = 0$.

7. a) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - 2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x}{(x - 2)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{16}{(x - 2)^3}$

Creciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Decreciente en $(0, 2) \cup (2, 4)$

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ y hacia arriba en $(2, +\infty)$. En $x = 0$ hay un máximo relativo en $x = 4$ hay un mínimo relativo. No hay puntos de inflexión.

b) $f'(x) = \dfrac{-4 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{8x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$

Dominio: R $- \{-1, 1\}$

Decreciente en todo el dominio porque $f'(x) < 0$

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y hacia arriba en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. En $x = 0$ hay inflexión.

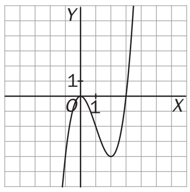
c) $f'(x) = (x + 1)\, e^x \Rightarrow f''(x) = (x + 2)\, e^x$

Decrece en $(+\infty, -1)$ y crece en $(-1, +\infty)$.

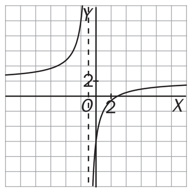
En $x = -1$ presenta un mínimo relativo.

Cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y hacia arriba en $(-2, +\infty)$. En $x = -2$ hay un punto de inflexión.

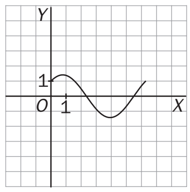
8. a)



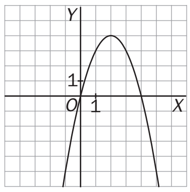
b)



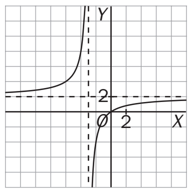
c)



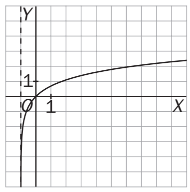
9. a)



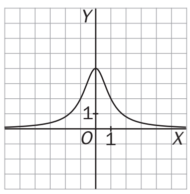
c)



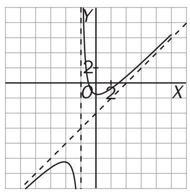
e)



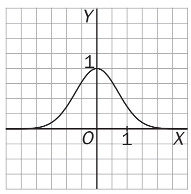
b)



d)



f)



12 Integración

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Hallar una función de la que se conoce su derivada y un punto de su gráfica.	**1.** La derivada de una función $f(x)$ es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$ y se sabe que la función pasa por el punto $P(2, 25)$. Halla la función y calcula $f(0)$. **2.** La función $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $M(-3, 17)$ y su derivada segunda es $f''(x) = 6x + 6$. Determina la expresión de la función f.
B. Resolver problemas elementales de cinemática aplicando el cálculo integral.	**3.** Como sabes, la expresión escalar de la velocidad y de la aceleración instantánea de un movimiento rectilíneo es $v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$; $a = \frac{dv}{dt} = v'(t) = s''(t)$. En un determinado movimiento se sabe que la aceleración es constante, $a = -10$ m s^{-2}, y que a los 2 s el móvil se encuentra en una posición $s(2) = 48$ m y lleva una velocidad de 12 m s^{-1}. Determina: a) La expresión de la velocidad en cualquier instante. b) La velocidad inicial. c) La expresión de la posición en cualquier instante. d) La posición inicial. e) La posición y la velocidad a los 4 segundos.
C. Resolver integrales indefinidas de funciones polinómicas e incluso de funciones del tipo $x^n\ \forall n \in \mathbf{R}$.	**4.** Halla, mediante descomposición, las siguientes integrales indefinidas. a) $\int (2x^2 + 4x - 5)dx$ b) $\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 1\right)dx$ c) $\int \frac{1}{\sqrt{x + 2}}dx$ **5.** Halla, mediante descomposición, las siguientes integrales indefinidas. a) $\int \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x}\right)dx$ b) $\int \frac{2(x - 1)^2 - 3(x - 1) + 5}{(x - 1)}dx$ c) $\int \frac{x - 3}{2x^2}dx$
D. Efectuar transformaciones elementales en la función integrando para transformar las integrales en inmediatas y resolverlas después.	**6.** Completa la función integrando con una función no nula que consideres conveniente para que resulte una integral inmediata y después resuélvela. a) $\int (3x^2 - 2x + 3)^5 (\quad)\,dx$ b) $\int \text{sen}^2(3x)(\quad)\,dx$ c) $\int \frac{(\quad)}{x^2 + x + 1}dx$ **7.** Resuelve las siguientes integrales. a) $\int (3x^2 - 2)^{10}x\,dx$ b) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 5}}dx$ c) $\int \text{sen}\,x \cos x\,dx$ d) $\int \frac{x - 5}{x + 1}dx$
E. Hallar integrales definidas aplicando la regla de Barrow.	**8.** Calcula estas integrales definidas aplicando la regla de Barrow. a) $\int_1^5 (2x + 1)dx$ b) $\int_{-1}^3 \frac{2}{x + 2}dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ d) $\int_{-1}^1 e^{-x}\,dx$ **9.** Calcula las integrales definidas e interpreta geométricamente el resultado obtenido. a) $\int_{-2}^2 x\,dx$ b) $\int_{-2}^2 \lvert x\rvert\,dx$ c) $\int_0^{\pi} \text{sen}\,x\,dx$ d) $\int_2^{12} \text{sen}^2 x\,dx + \int_2^{12} \cos^2 x\,dx$
F. Determinar el área de recintos planos limitados por curvas que tengan unas primitivas sencillas e inmediatas.	**10.** La gráfica de la función $y = x - 2$, las rectas $x = 3$, $x = 7$ y el eje de abscisas determinan un polígono. Calcula el área de este polígono mediante la geometría clásica y mediante la integral definida. **11.** Calcula el área del recinto plano acotado por las funciones $f(x) = -5$ y $g(x) = 4x - x^2$. **12.** Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$ y el eje de abscisas. **13.** Las gráficas de las funciones $y = \text{sen}\,x$, $y = \cos x$ se cortan en infinitos puntos y delimitan recintos de igual área. Represéntalas, halla sus puntos de corte y calcula el área de uno de esos recintos.

1. La función buscada es $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + K$ porque su derivada es $f'(x) = 6x^2 - 4x + 5$. Para determinar la constante K exigimos que $f(2) = 25 \Rightarrow$

$16 - 8 + 10 + K = 25 \Rightarrow K = 7.$

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 5x + 7 \Rightarrow f(0) = 7.$

2. $f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x + C$. Como hay un máximo relativo en $x = -3$, entonces $f'(-3) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow C = -9$, y la derivada es $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + K$, y como $f(-3) = 17 \Rightarrow$ $\Rightarrow K = -10$

Por tanto, $f(x) = x^2 + 3x^2 - 9x - 10.$

3. a) $v = \int a\ dt = \int (-10)\ dt = -10t + C,$

$v(2) = 12 \Rightarrow C = 32 \Rightarrow v(t) = -10t + 32\ \text{m s}^{-1}$

b) $v_0 = v(0) = 32\text{m s}^{-1}$

c) $s = \int v\ dt = \int (-10t + 32)dt = -5t^2 + 32t + K$

$s(2) = 48 \Rightarrow -20 + 64 + K = 48 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow s(t) = -5t^2 + 32t + 4\ \text{m}$

d) $s_0 = s(0) = 4$ m

e) $s(4) = 52$ m, $\quad v(4) = -8\ \text{m s}^{-1}$

Se puede interpretar como un lanzamiento vertical desde 4 m de altura con velocidad inicial de 32 m s^{-1}. A los 4 s, el móvil ya está bajando.

4. a) $\int (2x^2 + 4x - 5)dx = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + C$

b) $\int \left(\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} - 1\right)dx = \int 2x^{-2}dx + 3\int \frac{1}{x}dx - \int dx =$

$= -2x^{-1} + 3\ \ln|x| - x + C = -\frac{2}{x} + 3\ \ln|x| - x + C$

c) $\int \frac{1}{\sqrt{x+2}}dx = \int (x+2)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{(x+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x+2} + C$

5. a) $\int \left(\frac{x^2 - 3x + 5}{x}\right)dx = \int \left(x - 3 + \frac{5}{x}\right)dx =$

$= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5\ \ln|x| + C$

b) $\int \frac{2(x-1)^2 - 3(x-1) + 5}{(x - 1)}dx = \int \left[2(x-1) - 3 + \frac{5}{x-1}\right]dx$

$= x^2 - 5x + 5\ \ln|x - 1| + C$

c) $\int \frac{x - 3}{2x^2}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x} - 3x^{-2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\ln|x| + \frac{3}{x}\right) + C$

6. a) $\int (3x^2 - 2x + 3)^5 (6x - 2)\ dx = \frac{1}{6}(3x^2 - 2x + 3)^6 + C$

b) $\int \text{sen}^4(3x)\ (3\ \cos(3x))\ dx = \frac{1}{5}\ \text{sen}^5(3x) + C$

c) $\int \frac{(2x + 1)}{x^2 + x + 1}dx = \ln(x^2 + x + 1) + C$

7. a) $\int (3x^2 - 2)^{10}\ x\ dx = \frac{1}{6}\int (3x^2 - 2)^{10}(6x)dx =$

$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{11}(3x^2 - 2)^{11} + C = \frac{1}{66}(3x^2 - 2)^{11} + C$

b) $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 5}}dx = 3\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}}dx = 3\sqrt{x^2 + 5} + C$

c) $\int \text{sen}\,x\ \cos x\ dx = \frac{1}{2}\text{sen}^2 x + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + K$

d) $\int \frac{x-5}{x+1}dx = \int \frac{(x+1) - 6}{x+1}dx = \int \left(1 - \frac{6}{x+1}\right)dx =$

$= x - 6\ \ln|x + 1| + C$

8. a) $\int_1^5 (2x+1)dx = [x^2 + x]_1^5 = (25+5) - (1+1) = 28$

b) $\int_{-1}^3 \frac{2}{x+2}dx = [2\ \ln|x+2|]_{-1}^3 = (2\ \ln 5 - 2\ \ln 1) = 2\ \ln 5$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\ x)dx = [\text{sen}\ x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\ 0 = 1$

d) $\int_{-1}^1 e^{-x}\ dx = [-e^{-x}]_{-1}^1 = (-e^{-1}) - (-e^1) = e - \frac{1}{e}$

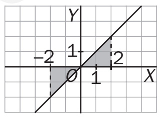
9. a) $\int_{-2}^2 x\ dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^2 = 0$

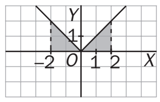
b) $\int_{-2}^2 |x|dx = \int_{-2}^0 (-x)dx + \int_0^2 x\ dx = \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 =$

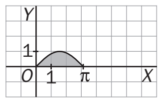
$= (0 + 2) + (2 - 0) = 4$

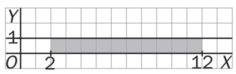
c) $\int_0^{\pi} \text{sen}\,x\ dx = [-\cos\ x]_0^{\pi} = (-\cos\ \pi) - (-\cos\ 0) = 2$

d) $\int_2^{12} (\text{sen}^2 x)dx + \int_2^{12} (\cos^2 x)dx = \int_2^{12} 1\ dx = [x]_2^{12} = 10$

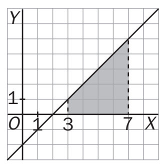
a) 

b) 

c) 

d) 

10. Área del trapecio:



$S = \frac{1 + 5}{2} \cdot 4 = 12u^2$

$S = \int_3^7 (x - 2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_3^7 =$

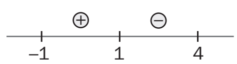
$= \left(\frac{49}{2} - 14\right) - \left(\frac{9}{2} - 6\right) = 12u^2$

11. Puntos de intersección: $-5 = 4x - x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{cases}$

En $(-1, 5)$, $g > f$, luego:

$S = \int_{-1}^5 [(4x - x^2) - (-5)]dx = \left[-\frac{1}{3}x^2 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^5 = 36$

12. Raíces $0 = x^3 - 4x^2 - x + 4 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Signo 

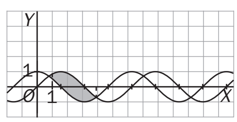
$S = \int_{-1}^1 (x^3 - 4x^2 - x + 4)dx = \int_1^4 (-x^3 - 4x^2 + x - 4)dx = \frac{253}{12}$

13. Resolvemos el problema en $[0, 2\pi]$:

Puntos de corte:

$\text{sen}\,x = \cos x \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4},\ x_2 = \frac{5\pi}{4}$

$S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\text{sen}\,x - \cos x)dx = 2\sqrt{2}$



Prueba inicial (estadística y probabilidad)

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Luisa dispone de 8 camisetas, 3 faldas, 4 pantalones y 5 pares de zapatillas. Si siempre va vestida con una camiseta, una falda o pantalón y un par de zapatillas, ¿de cuántas maneras diferentes puede ir vestida?

2. Calcula los siguientes números.

a) $V_{7,\,3}$ b) $VR_{7,\,3}$ c) P_5 d) $PR_8^{2,\,3,\,3}$ e) $C_{10,\,3}$ f) $\binom{7}{4}$

3. La primera fila del triángulo de Tartaglia, también conocido como triángulo de Pascal o de Euler, es 1, 1. Escribe las filas 5.ª y 6.ª del triángulo.

4. Calcula el valor de x en cada una de las expresiones siguientes:

a) $V_{x,\,2} = 420$ b) $3 \cdot C_{x,\,3} = 60$ c) $VR_{3,\,x} = 2187$ d) $\binom{10}{x} = \binom{10}{2+x}$

5. En una clase de 30 alumnos, 25 aprueban matemáticas, 6 suspenden lengua y 23 aprueban estas dos materias.

a) ¿Cuántos aprobaron lengua?

b) ¿Cuántos suspendieron alguna de esas dos asignaturas?

c) ¿Cuántos aprobaron lengua y suspendieron matemáticas?

d) ¿Cuántos aprobaron al menos una de esas dos asignaturas?

e) ¿Cuántos suspendieron las dos asignaturas?

6. Hemos lanzado dos dados cúbicos (de 6 caras) y la suma de las puntuaciones obtenidas ha sido 8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en uno de los dados haya salido un 3?

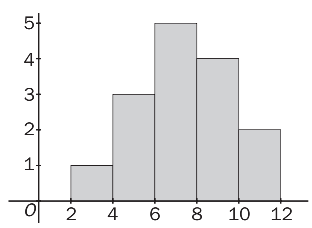
b) ¿Es posible que en uno de los dados haya salido un 1?

7. Luis juega al baloncesto en una competición que consta de 18 partidos. En los primeros 15 partidos ha sacado una media de 12 puntos por partido y se propone llegar al final de la competición con una media de 15 puntos. ¿Qué media de puntos deberá obtener en los 3 últimos partidos para conseguirlo?

8. La siguiente tabla de frecuencias muestra las frecuencias acumuladas obtenidas en un experimento. Determina la tabla de frecuencias absolutas, la media y la desviación típica de esa distribución de frecuencias.

x_i	2	4	5	8	10
F_i	3	7	14	18	20

9. El histograma de la derecha corresponde a la distribución de una variable continua sobre el intervalo [2, 12]. Determina: las marcas de clase, el número de individuos de la población, la media, la clase mediana y la desviación típica. Obtén el histograma de las frecuencias acumuladas.



1. Vestida con falda: $8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Vestida con pantalones: $8 \cdot 4 \cdot 5 = 160$.

En total, $120 + 160 = 280$ formas

2. a) $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

b) $VR_{7,\,3} = 7^3 = 343$

c) $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

d) $P_8^{2,\,3,\,3} = \dfrac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = 560$

e) $C_{10,\,3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

f) $\dbinom{7}{4} = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$

3. 5.ª fila: **1 5 10 10 5 1**

6.ª fila: **1 6 15 20 15 6 1**

4. a) $V_{x,\,2} = 420 \Leftrightarrow x(x-1) = 420 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 420 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 21 \\ x_2 = -20 \text{ sin sentido} \end{cases}$

b) $3 \cdot C_{x,\,3} = 60 \Leftrightarrow C_{x,\,3} = 20 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - 120 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 6$ única solución válida.

c) $VR_{3,\,x} = 2187 \Leftrightarrow 3^x = 2187 = 3^7 \Rightarrow x = 7$

d) $\dbinom{10}{x} = \dbinom{10}{2+x}$ Como $x \neq 2 + x$, tiene que ocurrir que $10 - x = 2 + x \Leftrightarrow 8 = 2x \Rightarrow x = 4$.

5. El siguiente esquema con diagramas de Venn responde a todas las preguntas. En él, L y M representan el conjunto de alumnos que aprueban lengua o matemáticas, respectivamente.

a) $\text{Card}(L) = 30 - 6 = 24$

b) $\text{Card}(\overline{M} \cup \overline{L}) = \text{Card}(\overline{M \cap L}) = 30 - 23 = 7$

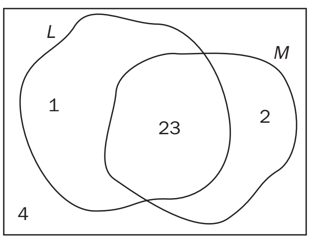
c) $\text{Card}(L \cap \overline{M}) = \text{Card}(L) - \text{Card}(L \cap M) =$

$= 24 - 23 = 1$

d) $\text{Card}(L \cup M) = \text{Card}(L) + \text{Card}(M) - \text{Card}(L \cap M) =$

$= 24 + 25 - 23 = 26$

e) $\text{Card}(\overline{L} \cap \overline{M}) = \text{Card}(\overline{L \cup M}) = 30 - 26 = 4$



6. Las posibilidades son: $2 + 6$, $3 + 5$, $4 + 4$, $5 + 3$ y $6 + 2$. Solo en dos casos aparece un 3 y en ninguno de ellos un 1. Por tanto:

a) $P(3) = \dfrac{2}{5}$ b) $P(1) = 0$

7. Para conseguir la media de 15 puntos necesita $18 \cdot 15 = 270$ puntos y lleva $15 \cdot 12 = 180$ puntos. Le faltan 90 puntos en 3 partidos. Deberá obtener una media de 30 puntos en los 3 últimos partidos.

8. Recordando la definición de frecuencia acumulada, es inmediato calcular las frecuencias absolutas y completar la tabla auxiliar de abajo.

La media $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \dfrac{109}{20} = 5{,}45$

Desviación típica $s = \sqrt{\left(\dfrac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{\sum f_i}\right) - \bar{x}^2} = 2{,}38$

x_i	f_i	F_i	x_if_i	$x_i^2f_i$
2	3	3	6	12
4	4	7	16	64
5	7	14	35	175
8	4	18	32	256
10	2	20	20	200
	20		109	707

9. Marcas de clase: 3, 5, 7, 9 y 11

Número de individuos:
$N = 1 + 3 + 5 + 4 + 2 = 15$

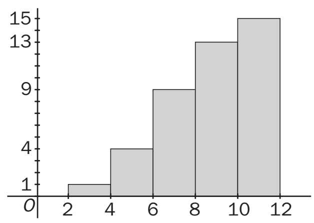
Media:

$\bar{x} = \dfrac{111}{15} = 7{,}4$

Clase mediana: es la correspondiente al intervalo [6, 8).

Desviación típica:

$$s = \sqrt{\frac{895}{15} - 7{,}4^2} = 2{,}215$$



x_i (marcas)	f_i	F_i	x_if_i	$x_i^2f_i$
3	1	1	3	9
5	3	4	15	75
7	5	9	35	245
9	4	13	36	324
11	2	15	22	242
	15		111	895

13 Distribuciones bidimensionales

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Calcular tablas de frecuencias y obtener los parámetros de una distribución unidimensional, en especial la media aritmética, la mediana y la desviación típica.

1. Las notas de un examen, agrupadas en clases, se reflejan en la tabla siguiente:

Notas	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10]
Frecuencia f_i	2	6	9	5	3

a) Determina las marcas de clases y calcula la nota media del grupo.
b) ¿Qué porcentaje de notas no supera los 4 puntos?
c) Construye el histograma de frecuencias.

2. A un grupo de 10 atletas se les ha cronometrado el tiempo que tardan en realizar dos pruebas distintas: 400 y 1500 m. Los resultados están reflejados en la tabla.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
400 m (*Y*)4	53″	56″	55″	59″	54″	62″	57″	60″	56″	61″
1500 m (*Z*)	3′ 40″	4′ 03″	3′ 58″	4′ 10″	4′ 20″	3′ 45″	3′ 51″	3′ 50″	3′ 48″	4′ 00″

a) Calcula el tiempo medio y la mediana de cada una de las pruebas.
b) Calcula la varianza y la desviación típica de los tiempos en la prueba de 1500 m.

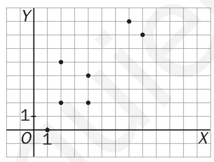
B. Hallar las distribuciones marginales de una variable bidimensional y sus parámetros.

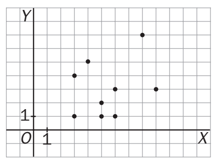
3. Se han realizado 16 pares de observaciones para estudiar la relación entre dos variables *X* e *Y*, obteniéndose los siguientes resultados: (2, 1), (3, 2), (3, 2), (4, 2), (4, 3), (4, 3), (5, 3), (5, 3), (5, 4), (5, 4), (6, 3), (6, 4), (6, 4), (7,4), (7,4), (8, 4).

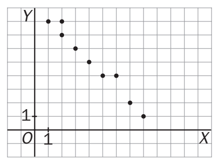
a) Representa esta serie estadística mediante una tabla de doble entrada.
b) Halla las medias, las varianzas, la covarianza y el coeficiente de correlación.

C. Construir diagramas de dispersión y calcular el coeficiente de correlación lineal de Pearson interpretando su significado.

4. Los valores absolutos del coeficiente de correlación lineal correspondientes a los diagramas de dispersión siguientes son 0,97, 0,29 y 0,83.







En cada caso, explica cómo es la relación entre las variables, asígnale su coeficiente de correlación con su signo y dibuja, aproximadamente, la recta de regresión de *Y* sobre *X*.

5. Estudia el tipo de correlación lineal existente en cada una de las siguientes series estadísticas interpretando el valor obtenido al calcular su coeficiente de correlación.

x	1	2	4	5
y	1	2	5	4

x	4	6	2	3	0
y	1	1	2	2	4

x	2	0	3	3
y	1	3	4	4

D. Calcular las rectas de regresión y efectuar estimaciones con ellas.

6. Obtén la recta de regresión de *y* sobre *x* de una variable aleatoria bidimensional de la que se conocen los siguientes datos: $\bar{x} = 3$ $\bar{y} = 2$ $s_x^2 = 3{,}5$ $s_y^2 = 0{,}5$ $s_{xy} = 0{,}25$ ¿Podemos utilizar esta recta para estimar el valor de *y* para $x = 6$?

7. La presión sanguínea máxima medida en condiciones de reposo a 10 personas y las edades de las mismas se recogen en la siguiente tabla:

Edad en años	55	70	65	34	40	67	60	46	38	49
Presión (mm Hg)	145	168	152	116	145	153	151	130	110	143

a) Obtén las rectas de regresión de esta variable bidimensional.
b) ¿Qué presión sanguínea máxima correspondería a una persona de 45 años?
c ¿Qué grado de fiabilidad podemos dar a la predicción anterior?

E. Calcular el coeficiente de determinación y la ecuación de la recta de Tukey.

8. Disponemos del siguiente conjunto de datos:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	8	2	7	6	5	3	3	8	1

Construye el diagrama de dispersión y, a partir de él, decide qué recta, la de regresión o la de Tukey, es mejor para hacer estimaciones y úsala para estimar *y* cuando $x = 2{,}5$.

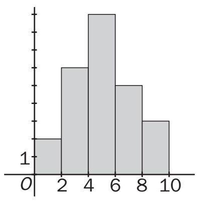
1. a) 1, 3, 5, 7, 9

La media es $\bar{x} = 5{,}08$.

b) Son 8 de 25,

$\frac{8}{25} \cdot 100 = 32\,\%$.

c)



2. a) $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{573}{10} = 57{,}3$ s

$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{N} = \frac{2365}{10} = 236{,}5$ s $= 3$ min $56{,}5$ s

b) Med(Y) $= 56{,}5$ s

Med(Z) $= 3$ min $54{,}5$ s

c) Varianza $(s_z)^2 = \frac{\sum (z_i)^2}{N} = (\bar{z})^2 = 134{,}05\ s^2$

Desviación típica: $s_Z = 11{,}58$ s

3. a)

y \ x	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	0	0	0
3	0	0	2	2	1	0	0
4	0	0	0	2	2	2	1

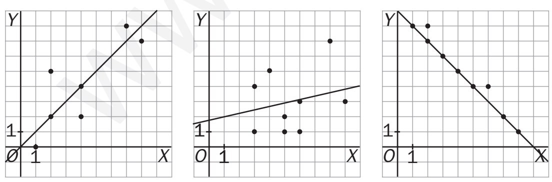
b) $\bar{x} = 5$; $\bar{y} = 3{,}125$; $s_x^2 = 2{,}5$; $s_y^2 = 0{,}859$

c) $s_{xy} = 1{,}25$; $r = 0{,}8528$

4. Diagrama A: correlación fuerte y positiva, $r = 0{,}83$

Diagrama B: correlación débil y positiva, $r = 0{,}29$

Diagrama C: correlación muy fuerte y negativa, $r = -0{,}97$



5. Serie A $\quad \bar{x} = 3$; $\bar{y} = 3$; $s_x = 1{,}58$; $s_y = 1{,}58$;

$s_{xy} = 2{,}25 \rightarrow r = 0{,}9$

El coeficiente de correlación lineal es positivo y próximo a 1. Las variables están en dependencia aleatoria y entre ellas existe una relación lineal positiva fuerte.

Serie B $\quad \bar{x} = 3$; $\bar{y} = 2$; $s_x = 2$; $s_y = 1{,}095$;

$s_{xy} = -2 \rightarrow r = -0{,}9129$

El coeficiente de correlación lineal es negativo y próximo a 1 en valor absoluto. Las variables están en dependencia aleatoria y entre ellas existe una relación lineal negativa fuerte.

Serie C $\quad \bar{x} = 2$; $\bar{y} = 3$; $s_x = 1{,}2247$; $s_y = 1{,}2247$;

$s_{xy} = 0{,}5 \rightarrow r = 0{,}3333$

El coeficiente de correlación lineal es positivo y próximo a 0. Las variables están en dependencia aleatoria y entre ellas existe una relación lineal positiva débil.

6. $y - \bar{y} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot (x - \bar{x}) \rightarrow y - 2 = \frac{0{,}25}{3{,}5} \cdot (x - 3)$

$\rightarrow y = 0{,}071x + 1{,}786$

Los resultados no serían fiables, ya que el coeficiente de correlación lineal es muy pequeño.

$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = 0{,}189$

7. a) $\bar{x} = 52{,}4$; $\bar{y} = 141{,}3$; $s_x = 12{,}241$; $s_y = 16{,}841$;

$s_{xy} = 179{,}58 \rightarrow r = 0{,}8711$

Recta de regresión de la presión Y sobre la edad X:
$y = 1{,}1985x + 78{,}4997$

Recta de regresión de la edad X sobre la presión Y:
$x = 0{,}6332y - 37{,}0702$

b) 132 mm Hg

c) Las predicciones son bastante fiables, ya que el coeficiente de correlación lineal es próximo a 1.

8. Todos los puntos, salvo dos, muestran una gran dependencia, por lo que es aconsejable utilizar la recta de Tukey Med-med. En el gráfico se observa un mejor ajuste con la recta de Tukey que con la recta de regresión ($y = -0{,}35x + 6{,}53$).

<u>Cálculo de la recta de Tukey.</u>

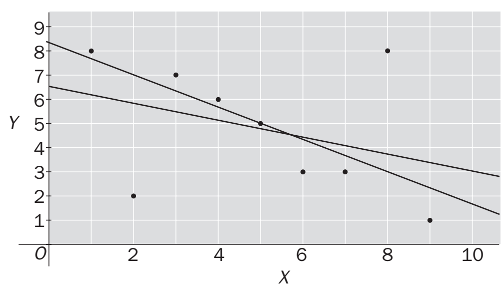
- Tres primeros puntos: (1, 8), (2, 2) y (3, 7).
  Medianas: de X es 2 y de Y es 7 $\rightarrow A(2, 7)$.
- Tres puntos siguientes: (4, 6), (5, 5), (6, 3) $\rightarrow B(5, 5)$
- Tres últimos puntos: (7, 3), (8, 8), (9, 1) $\rightarrow C(8, 3)$

La recta buscada pasa por B y tiene la dirección del vector

$[\overrightarrow{AC}] = (6\ \ -4) \Rightarrow \frac{x - 5}{6} = \frac{y - 5}{-4} \Rightarrow 2x + 3y = 25$

Para $x = 2{,}5$

$$y = -\frac{2}{3} \cdot 2{,}5 + \frac{25}{3} = 6{,}67$$



14 Combinatoria

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Plantear y resolver problemas de recuento que requieran el uso de técnicas o de métodos sistemáticos.	**1.** Un restaurante ofrece en su carta tres primeros platos, cuatro segundos y seis postres. ¿Cuántos menús distintos pueden confeccionarse? **2.** ¿Cuántos números mayores que 32 000 pueden escribirse con las cifras 1, 5, 5, 3, 3? **3.** ¿Cuántas diagonales tiene un pentágono? ¿Y un octógono? ¿Y un polígono de 15 lados? Generaliza para un polígono de *n* lados.
B. Plantear y resolver problemas de recuento que requieran el uso de técnicas de combinatoria.	**4.** Con las cifras impares, a) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden escribir? b) ¿Cuántos de ellos son múltiplos de cinco? c) ¿Cuántos son mayores que 7000? **5.** Doce personas tienen que hacer un viaje. Seis de ellas pueden hacerlo en tren, cuatro en autocar y dos en avión. ¿De cuántas maneras distintas es posible organizar dicho viaje? **6.** ¿Cuál es el número máximo de puntos de intersección que pueden tener 10 rectas de un plano si dos cualesquiera de ellas no son paralelas? **7.** Tenemos seis tarjetas marcadas con las letras A, B, C, D, E, F. Las barajamos y las vamos descubriendo una detrás de otra. a) ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener? b) ¿Cuántos de ellos empiezan por A? c) ¿Cuántos terminan en DE? d) ¿Cuántos contienen la sílaba BE?
C. Resolver ecuaciones en las que intervengan las expresiones de la combinatoria.	**8.** Resuelve las siguientes ecuaciones. a) $C_{x,\,x-2} = 45$ b) $7 \cdot V_{x,\,3} = 6 \cdot V_{x+1,3}$ c) $4 \cdot P_{x-1} + P_x - P_{x+1} = 0$ **9.** Calcula en cada caso el valor de *x*. a) $\binom{21}{x} = \binom{21}{x+5}$ b) $\binom{x}{3} + \binom{x}{4} = \binom{5}{4}$ **10.** Si se sabe que $\binom{18}{n} = \binom{18}{n-10}$, ¿cuánto vale $\binom{15}{n}$?
D. Simplificar expresiones numéricas y algebraicas en las que intervengan números factoriales.	**11.** Calcula el valor de las siguientes fracciones sin efectuar ningún producto: a) $\dfrac{4!\ 7!}{6!\ 5!}$ b) $\dfrac{9!\ V_{10,\,2}}{10!}$ **12.** Simplifica la expresión $\dfrac{(m+1)!\ (m+3)!}{m!\ (m+4)}$.

Soluciones

1. $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ menús diferentes

2. Que empiecen por 33 hay 3

(33 155, 33 515, 33 551).

Que empiecen por 35 hay 6

(35 135, 35 153, 35 315, 35 351, 35 513 y 35 531).

Que empiecen por 51 hay 3

(51 335, 51 353, 51 533).

Que empiecen por 53 hay 6

(53 135, 53 153, 53 315, 53 351, 53 513, 53 531).

Que empiecen por 55 hay 3

(55 133, 55 313, 55 331).

En total, $3 + 6 + 3 + 6 + 3 = 21$

3. a) Desde cada vértice salen 2 diagonales:

$5 \cdot 2 = 10$.

Pero como cada una se cuenta dos veces:

$10 : 2 = 5$

b) Desde cada vértice salen 5 diagonales; por tanto,

$(8 \cdot 5) : 2 = 20$.

c) $(15 \cdot 12) : 2 = 90$

d) $\dfrac{n\,(n - 3)}{2}$

4. Intervienen 4 de las cifras y no hay repeticiones.

a) $V_{5,\,4} = 120$ números

b) Fijamos el 5 en último lugar:

$V_{4,\,3} = 24$ números son múltiplos de 5.

c) El 7 o el 9 deben estar en primer lugar:

$2 \cdot V_{4,\,3} = 48$ números son mayores que 7000.

5. Podemos elegir las personas que irán en tren de $C_{12,\,6}$ formas distintas.

Para cada una de ellas, podemos elegir las personas que irán en autocar de $C_{6,\,4}$ formas; las dos personas restantes van en avión.

En total podemos organizar el viaje de $C_{12,\,6} \cdot C_{6,\,4} = 13\,860$ maneras distintas.

6. Como dos rectas cualesquiera no son paralelas, siempre determinan un punto de intersección:

$C_{10,\,2} = 45$ puntos.

7. Intervienen todas las letras y no hay *r* repeticiones.

a) $P_6 = 720$ resultados distintos

b) Fijamos A en primer lugar:

$P_6 = 120$ resultados empiezan por A.

c) Fijamos DE al final:

$P_4 = 24$ resultados acaban en DE.

d) Consideramos BE como una sola letra:

$P_5 = 120$ resultados contienen la sílaba BE.

8. a) $C_{x,\,x-2} = \dfrac{x\,(x - 1)}{2} = 45 \Rightarrow x^2 - x - 90 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 10$

(la solución $x = -9$ no es válida)

b) $7x(x - 1)(x - 2) = 6(x + 1)x(x - 1)$, como $x > 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7(x - 2) = 6(x + 1) \Rightarrow x = 20$

c) $4(x - 1)! + x! - (x + 1)! = 0$, como $x > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 + x - (x + 1)x = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

(la solución $x = -2$ no es válida)

9. a) Por la propiedad de simetría:

$x + (x + 5) = 21 \Rightarrow x = 8$

b) $\dbinom{x}{3} + \dbinom{x}{4} = \dbinom{x+1}{4}$.

Por tanto,

$x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4$

10. Por la propiedad de simetría:

$n + (n - 10) = 18 \Rightarrow n = 14$.

Entonces:

$\dbinom{15}{n} = \dbinom{15}{14} = 15$

11. a) $\dfrac{4!\;7!}{6!\;5!} = \dfrac{4! \cdot 7 \cdot 6!}{6!\;4! \cdot 5} = \dfrac{7}{5}$

b) $\dfrac{9! \cdot V_{10,\,2}}{10!} = \dfrac{9! \cdot 10 \cdot 9}{10!} = 9$

12. $\dfrac{(m + 1)!\;(m + 3)!}{m!\;(m + 4)!} = \dfrac{(m + 1)\;m! \cdot (m + 3)!}{m!\;(m + 4)\;(m + 3)!} =$

$= \dfrac{m + 1}{m + 4}$

15 Probabilidad

CRITERIOS DE EVALUACIÓN / ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Formar el espacio muestral y calcular el número de puntos muestrales de un suceso.

1. En una bolsa se tienen cinco bolas señaladas con cada una de las cinco vocales. Escribe el espacio muestral asociado a cada experimento aleatorio siguiente.
a) Extraer dos bolas simultáneamente.
b) Extraer dos bolas sucesivamente, sin devolver la primera a la bolsa.
c) Extraer dos bolas sucesivamente con devolución.

2. En el experimento aleatorio "lanzar simultáneamente un dado cúbico, otro tetraédrico y otro octaédrico" (6, 4 y 8 caras, respectivamente), calcula el número de puntos muestrales que tienen los sucesos:
a) El suceso seguro o espacio muestral E.
b) El suceso: "la suma de las puntuaciones obtenidas es 10".
c) El suceso: "la puntuación del dado octaédrico es la suma de las puntuaciones obtenidas en los otros dos dados".

B. Efectuar operaciones con sucesos y aplicar sus propiedades para efectuar simplificaciones.

3. En el experimento aleatorio cuyo espacio muestral es $E = \{m, n, p, q, r, s\}$ se consideran los siguientes sucesos:
$A = \{m, n, p, q, r\}$ $B = \{m, p, q, s\}$ $C = \{m, n\}$
Forma las siguientes parejas de sucesos y clasifícalos según sean elementales o compuestos, compatibles o incompatibles.
a) $\overline{A}$ y $C \cap A$ b) $B \cup A$ y $C \cap B$ c) $A \cup \overline{C}$ y $B \cap \overline{A}$

4. Justifica, bien mediante gráficos o mejor aplicando propiedades, las siguientes igualdades de sucesos.
a) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{B}$ b) $A - (A - B) = A \cap B$ c) $\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) \cap (A \cup B) = B$

C. Identificar funciones de probabilidad definidas en un espacio muestral comprobando el cumplimiento de los axiomas y utilizarlas para obtener la probabilidad de sucesos compuestos.

5. Estudia si las siguientes funciones definidas sobre el espacio muestral $E = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ de un experimento aleatorio son funciones de probabilidad.
a) $f(a_0) = f(a_4) = \frac{1}{6}$, $f(a_1) = f(a_2) = \frac{2}{9}$, $f(a_3) = f(a_5) = \frac{1}{9}$
b) $g(a_1 \cup a_2) = \frac{1}{6}$, $g(a_0) = g(a_3) = g(a_4) = g(a_5) = \frac{1}{9}$

6. En un dado irregular se ha comprobado que cada una de las caras con números pares tiene doble probabilidad de salir que las caras con números impares.
a) Determina la probabilidad de cada suceso elemental.
b) Si $A = \{1, 2, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$ halla $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A - B)$.

D. Asignar probabilidades mediante la regla de Laplace, empleando técnicas de recuento directo y combinatorias.

7. En una bolsa hay 6 bolas negras, 4 blancas y 2 rojas. Calcula la probabilidad de que al extraer simultáneamente tres bolas sean del mismo color.

E. Formar el sistema completo de sucesos asociado a un experimento aleatorio compuesto y asignar probabilidades a sucesos mediante el teorema de la probabilidad total.

8. La cuarta parte de una población ha sido vacunada contra una enfermedad. Se comprueba, sin embargo, que de cada diez enfermos, dos están vacunados. Se sabe, además, que de cada doce vacunados uno cae enfermo.
a) ¿Qué probabilidad tiene un individuo de contraer la enfermedad?
b) ¿Qué probabilidad tiene un individuo no vacunado de contraer la enfermedad?

F. Calcular probabilidades a posteriori.

9. En un taller, dos máquinas, A y B, hacen remaches. La primera hace bien el 90% de los remaches, mientras que B hace bien solo el 60%. Si un día la máquina A hizo 2000 remaches y la B 500 remaches, determina:
a) La probabilidad de que uno de los 2500 remaches sea defectuoso.
b) La probabilidad de que un remache defectuoso se haya fabricado con la máquina A.

1. a) $E = \left\{\begin{matrix}\{a, e\}, \{a, i\}, \{a, o\}, \{a, u\}, \{e, i\}, \\ \{e, o\}, \{e, u\}, \{i, o\}, \{i, u\}, \{o, u\}\end{matrix}\right\}$

b) $E = \left\{\begin{matrix}(a, e), (a, i), (a, o), (a, u), (e, a), (e, i), (e, o), \\ (e, u), (i, a), (i, e), (i, o), (i, u), (o, a), (o, e), \\ (o, i), (o, u), (u, a), (u, e), (u, i), (u, o)\end{matrix}\right\}$

c) $E = \left\{\begin{matrix}(a, a), (a, e), (a, i), (a, o), (a, u), \\ (e, a), (e, e), (e, i), (e, o), (e, u), \\ (i, a), (i, e), (i, i), (i, o), (i, u), \\ (o, a), (o, e), (o, i), (o, o), (o, u), \\ (u, a), (u, e), (u, i), (u, o), (u, u)\end{matrix}\right\}$

2. a) $E = \{111, 112, 113, \ldots, 247, 248, 311, \ldots, 647, 648\}$

$\text{Card}(E) = 6 \cdot 4 \cdot 8 = 192$

b) $A = \{631, 613, 316, 136, 541, \ldots, 334, \ldots, 217, \ldots, 118\}$

Con un 1 en el 2.° dado hay (18, 27, 36, 45, 54, 63) 6 casos.

Con un 2 en el 2.° dado hay 6 casos.

Con un 3 en el 2.° dado hay 6 casos.

Con un 4 en el 2.° dado hay 5 casos.

En total, $\text{Card}(A) = 23$

c) $B = \{112, 123, 213, 134, 314, \ldots, 628\}$

En total, $\text{Card}(B) = 26$

3. a) $\overline{A} = \{s\}$ es un suceso elemental;

$C \cap A = \{m, n\}$ es un suceso compuesto.

Como $\overline{A} \cap (C \cap A) = \Phi$, los sucesos son incompatibles.

b) $B \cup A = \{m, n, p, q, r, s\} = E$ es el suceso seguro;

$C \cap B = \{m\}$ es un suceso elemental.

Como $(B \cup A) \cap (C \cap B) = \{m\} \neq \Phi$, los sucesos son compatibles.

c) $A \cap \overline{C} = \{p, q, r\}$ es un suceso compuesto;

$B \cap \overline{A} = \{s\}$ es un suceso elemental.

Como, $(A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{A}) = \Phi$ los sucesos son incompatibles.

4. a) $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) =$

$= (A \cap \overline{A}) \cup \overline{B} = \Phi \cup \overline{B} = \overline{B}$

b) $A - (A - B) = A \cap (\overline{A - B}) = A \cap \left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) =$

$= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) =$

$= \Phi \cup (A \cap B) = A \cap B$

c) $\left(\overline{A \cap \overline{B}}\right) \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B) =$

$= (\overline{A} \cap A) \cup B = \Phi \cup B = B$

5. a) Es una función de probabilidad, ya que $f(a_1) \geqslant 0$ para todos los sucesos elementales y

$f(E) = f(a_0) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4) + f(a_5) =$

$= \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 1$

b) No es una función de probabilidad, ya que si lo fuera, $g(a_1 \cup a_2) = \frac{1}{6} \Rightarrow g(a_1) + g(a_2) = \frac{1}{6}$, y entonces:

$g(E) = g(a_0) + g(a_2) + g(a_3) + g(a_4) + g(a_5) =$

$= \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18} \neq 1$

6. a) $P(1) = P(3) = P(5) = x \quad P(2) = P(4) = P(6) = 2x$

$P(1) + P(2) + \ldots + P(6) = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$

$P(1) = P(3) = P(5) = \frac{1}{9}; \; P(2) = P(4) = P(6) = \frac{2}{9}$

b) $P(A) = P(\{1, 2, 4, 5\}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad P(B) = \frac{5}{9}$

$P(A \cap B) = P(\{4, 5\}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$P(A \cup B) = P(\{1, 2, 4, 5, 6\}) = \frac{8}{9}$

$P(A - B) = P(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$

7. $p(BBB \cup NNN) = \frac{6}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{2}{10} = \frac{6}{55}$

8. E = "estar enfermo" $\qquad V$ = "estar vacunado"

$p(V) = \frac{1}{4}$, $p(V/E) = \frac{2}{10}$ y $p(E/V) = \frac{1}{12}$

a) $p(E/V) \cdot p(V) = p(V/E) \cdot p(E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p(E) = \frac{p(E/V) \cdot p(V)}{p(V/E)} = \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{2}{10}} = \frac{5}{48}$$

b) $p(E) = p(E/V) \cdot p(V) + p(E/\overline{V}) \cdot p(\overline{V}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p(E/\overline{V}) = \frac{p(E) - p(E/V) \cdot p(V)}{p(\overline{V})} =$$

$$= \frac{\frac{5}{48} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{9}$$

9. a) $p(D) = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) =$

$= \frac{2000}{2500} \cdot \frac{10}{100} + \frac{500}{2500} \cdot \frac{40}{100} = \frac{4}{25}$

b) $p(A/D) = \frac{p(A) \cdot p(D/A)}{p(D)} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{1}{2}$

16 Distribuciones de probabilidad

CRITERIOS DE EVALUACIÓN | **ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN**

A. Obtener la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (v.a.d.).

1. Sea X una variable aleatoria que toma valores $r = 0, 1, 2, 3, 4$, con probabilidad $p_r = P(X = r) = \frac{1}{5} - k \cdot r$, con k constante.

Determina el valor de k para que la función P sea una función de probabilidad y representa esta función.

2. En el experimento consistente en el lanzamiento de dos dados se define la variable aleatoria X: "valor absoluto de la diferencia de las puntuaciones".
a) Indica los valores que puede tomar esta variable aleatoria.
b) Halla la función de probabilidad de esta distribución y represéntala.

3. La función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X viene dada por la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	a	b	0,2	$a + b$

Si $P(X \leqslant 1) = 0{,}3$, calcula $P(X \leqslant 2)$, $P(X \geqslant 3)$ y $P(1 < X \leqslant 4)$.

B. Calcular los parámetros de una v.a.d., media o esperanza matemática, varianza y desviación típica.

4. Calcula la media o esperanza matemática y la desviación típica de las variables aleatorias de los ejercicios 1, 2 y 3.

5. Una bolsa contiene 20 bolas numeradas de la siguiente forma: diez con el 0, cinco con el 4, cuatro con el 10 y una con el 100. Realizamos el siguiente juego: "Sacamos una bola al azar y obtenemos un premio en euros igual a 100 veces el número obtenido". Si llamamos X a la variable aleatoria: "premio obtenido, determina:
a) $P(X = 400)$, $P(X \leqslant 400)$, $P(X \geqslant 832)$, $P(X \neq 0)$
b) El importe medio del premio obtenido.

C. Comprobar si una función dada puede ser función de densidad de una variable aleatoria continua (v.a.c.).

6. Calcula el valor de k para que $f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ sea la función de densidad de una determinada variable aleatoria continua y represéntala gráficamente.

D. Calcular probabilidades de intervalos en una v.a.c. y determinar sus parámetros.

7. La función de densidad de una v.a.c. viene definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 0 < x \leqslant 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcula la media y la desviación típica teóricas de la distribución.
b) Obtén el valor de $P(X < 3)$ y $P(1 \leqslant X < 3)$.

E. Resolver problemas de v.a.d. de distribución $B(n, p)$.

8. El 40% de la población entre 15 y 25 años de una ciudad asiste semanalmente al cine. Se escoge al azar una muestra formada por 15 personas de ese grupo de edad. Comprueba si la variable que expresa el número de ellas que va semanalmente al cine sigue una distribución binomial. En caso afirmativo, señala los parámetros de la distribución, calcula su media y su desviación típica y halla $P(X = 8)$.

9. X es una v.a. $B(12; 0{,}3)$. Calcula: $P(X = 5)$, $P(4 < X \leqslant 7)$, $P(X < 10)$.

F. Resolver problemas de v.a.c. de distribución $N(\mu, \sigma)$.

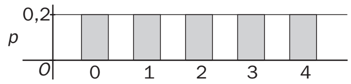
10. Las alturas de los alumnos de un instituto responden a una distribución normal de media 165 cm y desviación típica 5 cm. ¿Qué porcentaje de alumnos es de esperar que tenga una altura entre 170 y 175 cm?

11. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan más de 20 caras al lanzar 50 veces una moneda trucada con probabilidad de cara igual a 0,4?

1. $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - k + \frac{1}{5} - 2k + \frac{1}{5} - 3k + \frac{1}{5} - 4k = 1 \Rightarrow$$

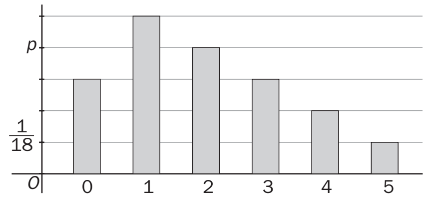
$$\Rightarrow k = 0$$



2. a) {0, 1, 2, 3, 4, 5}

b)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$



3. $p(X \leqslant 1) = 0{,}3 \Rightarrow p_0 + p_1 = 0{,}3 \Rightarrow a = 0{,}1;$

$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \Rightarrow b = 0{,}2$

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,3

$p(X \leqslant 2) = 0{,}5$; $p(X \geqslant 3) = 0{,}5$; $p(1 < X \leqslant 4) = 0{,}7$

4. a) $\mu = \sum x_i \cdot p_i = 0 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}8 = 2$

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = 1{,}41$$

b) $\mu = \sum x_i \cdot p_i = \frac{35}{18} = 1{,}94$

$$\sigma = \sqrt{\sum x_i^2 \cdot p_i - \mu^2} = 1{,}43$$

c) $\mu = 2{,}3$ $\qquad \sigma = 1{,}49$

5. a) $P(X = 400) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ $\qquad P(X \leqslant 400) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

$$P(X \geqslant 832) = P(X = 1000) + P(X = 10\,000) =$$

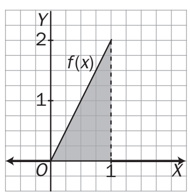
$$= \frac{4}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}$$

$$P(X \neq 0) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

b) $\mu = \sum x_i \cdot p_i =$

$$= 0 + 400 \cdot \frac{1}{4} + 1000 \cdot \frac{1}{5} + 10\,000 \cdot \frac{1}{20} = 800 \text{ €}$$

6. $1 = \int_0^1 kx\,dx = k\int_0^1 x\,dx = k \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$



7. a) $\mu = \int_0^5 x \cdot \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \frac{5}{2}$

$$\sigma^2 = \int_0^5 \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}\int_0^5 \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^3}{3}\right]_0^5 = \frac{25}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

b) $P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{5}dx = \frac{3}{5}$

$$P(1 \leqslant X < 3) = \int_1^3 \frac{1}{5}dx = \frac{2}{5}$$

8. Para cada persona son posibles dos respuestas A: "ir al cine semanalmente" o $\overline{A}$; cada respuesta es independiente de las anteriores; la probabilidad de éxito $p(A) = 0{,}4$ es constante.

Se trata de una distribución binomial de parámetros $n = 15$ y $p = 0{,}4$, $B(15; 0{,}4)$

Media: $\mu = n\,p = 15 \cdot 0{,}4 = 6$

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{15 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{3{,}6} = 1{,}90$$

$$P(X = 8) = \binom{15}{8} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}118$$

9. $P(X = 5) = \binom{12}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^7 = 0{,}1585$

$$P(4 < X \leqslant 7) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) =$$
$$= 0{,}1585 + 0{,}0792 + 0{,}0291 = 0{,}2668$$

$$P(X < 10) = 1 - P(X \geqslant 10) =$$
$$= 1 - [P(10) + P(11) + P(12)] =$$
$$= 1 - (0{,}00019 + 0{,}00001 + 0{,}00000) = 0{,}9998$$

10. X es $N(165;5) \Rightarrow Z = \frac{X - 165}{5}$ es $N(0,1)$

$$P(170 < X < 175) = P\left(\frac{170 - 165}{5} < Z < \frac{175 - 165}{5}\right) =$$
$$= P(1 < Z < 2) = P(z < 2) - P(z < 1) =$$
$$= 0{,}9772 - 0{,}8413 = 0{,}1359$$

El 13,59% de los alumnos.

11. X: "número de caras en 50 lanzamientos" es $B(50; 0{,}25)$ con $\mu = 12{,}5$ y $\sigma = 3{,}06$. Podemos aproximarla mediante una distribución normal $N(12{,}5;\ 3{,}06)$, ya que $n\,p = 50 \cdot 0{,}25 \geqslant 5$ y $n\,q = 50 \cdot 0{,}75 \geqslant 5$

Por tanto, X es $N(12{,}5;\ 3{,}06) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Z = \frac{X' - 12{,}5}{3{,}06} \text{ es } N(0,\ 1).$$

$$P(X > 20) = 1 - P(X \leqslant 20) = 1 - P(X' \leqslant 20{,}5) =$$
$$= 1 - P\left(Z \leqslant \frac{20{,}5 - 12{,}5}{3{,}06}\right) = 1 - P(Z \leqslant 2{,}61) =$$
$$= 1 - 0{,}9955 = 0{,}0045$$

Prueba final A

Nombre: **Grupo:** **Fecha / /**

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+5} = 1$

b) $\text{sen } x + \cos 2x = 4 \text{ sen}^2 x$

2. De un triángulo isósceles se sabe que el ángulo desigual es $\widehat{A} = 30°$, y el área, 9 cm^2. Halla, sin hacer uso de la calculadora:

a) cos 75° (teniendo en cuenta que $75° = 30° + 45°$).

b) Los tres lados del triángulo.

3. Calcula las coordenadas del punto que se obtiene al proyectar ortogonalmente el punto $P(5, -5)$ sobre la recta r de ecuación $x - 2y + 5 = 0$.

4. Los focos de una elipse son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$, y su excentricidad, $e = \frac{1}{2}$. Determina:

a) La distancia focal.

b) La longitud del eje menor $2b$.

c) La ecuación de la elipse.

5. Se consideran los números complejos $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_2 = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$. Determina:

a) En forma binómica, $(z_1)^3$.

b) Las raíces cúbicas de z_2 en forma polar.

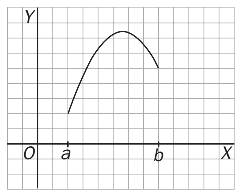
6. Calcula el límite siguiente $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 9x^2 + 24x + 20} \right)$.

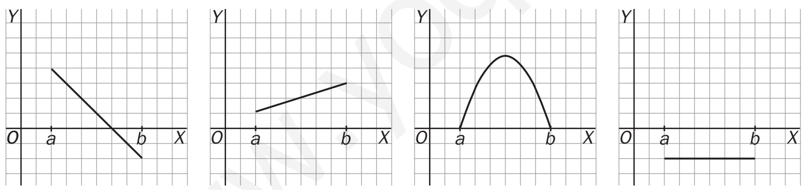
7. Halla la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado si fuera posible.

a) $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^3 - 1}$

b) $g(x) = \cos^2(3x - 2)$

8. Si la gráfica de la derecha corresponde a la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, justifica razonadamente cuál de las gráficas siguientes puede corresponder a $f'(x)$.





9. La gráfica de la función $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$ corta el eje de abscisas en dos puntos. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la citada función en uno de esos dos puntos.

10. En un estudio realizado para determinar la rapidez de desecación de un compuesto orgánico destinado a la jardinería se han observado las variables:

X, "número de días transcurridos desde el riego"
Y, "porcentaje de humedad del compuesto",
obteniéndose los siguientes datos:

X	1	2	3	4	5
Y	90	80	70	50	30

a) Determina el tipo y el grado de correlación que hay entre ambas variables.

b) ¿Qué grado de humedad se espera encontrar a los 7 días del riego?

11. En una especie animal se sabe que el 40% de las crías son machos y el 60% restante son hembras. Determina la probabilidad de que en una camada de 8 crías haya:

a) Igual número de machos que de hembras.

b) Tres machos y cinco hembras.

1. a) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x+5} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sqrt{2x+8}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x+5}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 2 = 2\sqrt{x+5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x + 20 \Rightarrow x = \pm 4$

Al comprobar las soluciones, $x_1 = -4$ nos lleva a $0 - 1 = 1$, que es falso, y para $x_2 = 4$ resulta $4 - 3 = 1$, que es correcto. Luego la única solución es $x = 4$.

b) $\text{sen } x + \cos 2x = 4 \text{ sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 4 \text{ sen}^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \dfrac{1 \pm 5}{12}$

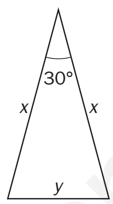
Si $\text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \text{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

y si $\text{sen } x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \text{arcsen}\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \begin{cases} 3{,}48 + 2k\pi \\ 5{,}94 + 2k\pi \end{cases}$

2. a) $\cos 75° = \cos(30° + 45°) =$

$= \cos 30° \cos 45° - \text{sen } 30° \text{ sen } 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$



b) $S = \dfrac{1}{2}(x \cdot x \cdot \text{sen } 30°) \Rightarrow 9 = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow x = 6$ cm

$y^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{72 - 36\sqrt{3}} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm $= 3{,}1$ cm

3. La recta perpendicular a r que pasa por P será de la forma $2x + y + C = 0$.

Como $P(5, -5)$, $10 - 5 + C = 0$, obteniendo la ecuación $2x + y - 5 = 0$.

La proyección de P buscada se obtiene resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{l} x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow P'(1, 3)$.

4. a) Distancia focal $2c = d(F, F') = 6$.

b) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{3}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 6$,

y como $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow 2b = 6\sqrt{3}$

c) La ecuación de la elipse, por estar centrada en el origen, es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$.

5. a) $(z_1)^3 = (1_{120°})^3 = 1_{360°} = 1$

b) $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{\left(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i\right)} = \sqrt[3]{8_{315°}} = \begin{cases} x_1 = 2_{105°} \\ x_2 = 2_{225°} \\ x_3 = 2_{345°} \end{cases}$

6. $\lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 9x^2 + 24x - 20}\right) =$

$= \lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{(x-2)^2\,(x+1)}{(x-2)^2\,(x-5)}\right) = \lim\limits_{x \to 2}\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right) = \dfrac{3}{-3} = -1$

7. a) $f'(x) = \dfrac{(4x - 1)(x^3 - 1) - 3x^2(2x^2 - x)}{(x^3 - 1)^2} =$

$= \dfrac{-2x^4 + 2x^3 - 4x + 1}{(x^3 - 1)^2}$

b) $g'(x) = 2\cos(3x - 2) \cdot (-3 \text{ sen}(3x - 2)) =$

$= -6\cos(3x - 2)\text{ sen}(3x - 2) = -3 \text{ sen}(6x - 4)$

8. La función $f(x)$ cambia de creciente a decreciente en un punto de tangencia horizontal, por lo que su derivada cambiará de positiva a negativa en ese intervalo, anulándose en el punto de tangencia horizontal. Esta situación solamente la refleja la primera de las cuatro gráficas.

9. $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Los puntos de corte son $A(1, 0)$ y $B(3, 0)$. Hallamos la tangente en B.

$f'(x) = \dfrac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4} \Rightarrow m = f'(3) = \dfrac{2}{1} = 2$

y la ecuación es $y - 0 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 6$.

En el punto A sería $y = -2x + 2$.

10. a) Correlación inversa o negativa, porque al aumentar una variable disminuye la otra.

El grado de correlación se determina con el coeficiente de correlación de Pearson, que es

$r = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \dfrac{-30}{1{,}41 \cdot 21{,}54} = -0{,}98$,

que corresponde a una correlación muy fuerte y negativa.

b) Hallamos la recta de regresión de Y sobre X:

$y - \bar{y} = \dfrac{s_{xy}}{(s_x)^2}(x - \bar{x})$;

$y - 64 = \dfrac{-30}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -15x + 109$

Sustituyendo $x = 7$ se obtiene un grado de humedad $y = 4\%$.

11. Es una variable binomial con $n = 8$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$ y cuya función de probabilidad es

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$$

a) $P(X = 4) = \dbinom{8}{4} \cdot (0{,}4)^4 \cdot (0{,}6)^{8-4} = 0{,}232$

b) $P(X = 3) = \dbinom{8}{3} \cdot (0{,}4)^3 \cdot (0{,}6)^{8-3} = 0{,}279$

Prueba final B

Nombre: **Grupo:** **Fecha** / /

1. Resuelve: a) $\dfrac{10 - x}{x + 2} \leqslant 2$ b) $\log(x - 1) - \log\sqrt{5 + x} - \log\sqrt{5 - x} = 0$

2. De la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ se sabe que $f(1) = 56$; $f(-1) = 62$; $f(2) = 59$. Halla dicha función y calcula su valor para $x = 32$.

3. Halla el punto de la recta $2x - y + 5 = 0$ que equidista de los puntos $A(3, 5)$ y $B(2, 1)$.

4. Dadas las rectas r: $4x + 5y + 7 = 0$ y s: $ax - 3y + 1 = 0$:

   a) Comprueba que el punto $P(2, -3)$ pertenece a la recta r y calcula a para que ambas rectas se corten en el punto P.

   b) Halla el ángulo que forman dichas rectas.

   c) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta r.

5. El foco de una parábola es el punto $F(1, 2)$ y su directriz es la recta r: $x + y = 4$. Determina el parámetro y la ecuación general de la parábola.

6. Dados los números complejos $z_1 = 8 + 24i$, $z_2 = k - 2i$ y $z_3 = 3 - i$, determina:

   a) El valor del número real k para que el cociente $\dfrac{z_2}{z_1}$ sea un número real.

   b) Las raíces cúbicas de $\dfrac{z_1}{z_3}$, es decir, $\sqrt[3]{\dfrac{8 + 24i}{3 - i}}$.

7. Calcula al siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4 + 3x}{1 + 4x}\right)^{2 - x}$

8 Halla la derivada de las siguientes funciones y simplifica si fuera posible el resultado.

   a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(2x + 1)^2}$ b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\text{sen } x}\right)$

9. Se considera la función $f(x) = \dfrac{2x}{4 - x^2}$. Determina:

   a) Dominio y asíntotas.

   b) Intervalos de crecimiento y de decrecimiento y extremos relativos.

   c) Efectúa la representación gráfica de la misma.

10. Halla la recta de regresión de X sobre Y de la variable bidimensional

x_i	4	5	6	7	10
y_i	6	6	3	2	1

   ¿Qué valor se podría estimar para la variable X cuando la variable Y fuera igual a 2,5?

11. Las notas de una clase siguen una ley $N(6; 1{,}8)$. Se elige un alumno al azar y se pide:

   a) La probabilidad de que su nota no exceda de 7 puntos.

   b) El porcentaje de alumnos que suspendieron.

1. a) $\dfrac{10-x}{x+2} \leqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{10-x}{x+2} - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(2-x)}{x+2} \leqslant 0$

Raíz del numerador $x = 2$, y del denominador $x = -2$. A partir de la tabla de signos llegamos a la solución $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$.

	$-\infty$ -5	-2	$-\infty$
$2 - x$	+	+	−
$x + 2$	−	+	+
cociente	−	+	−

b) $\log(x-1) - \log\sqrt{5+x} - \log\sqrt{5-x} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log(x-1) = \log\sqrt{25 - x^2}$

Esta equivalencia es válida para todo x que verifique simultáneamente $x > 1$, $x > -5$ y $x < 5 \Rightarrow x \in (1, 5)$.

Resolvemos:

$x - 1 = \sqrt{25 - x^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \text{ no válida} \\ x_2 = 4 \text{ válida} \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(1) = 56 \\ f(-1) = 62 \\ f(2) = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 56 \\ a - b + c = 62 \\ 4a + 2b + c = 59 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 56 \\ 2b = -6 \\ 3a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 56 \\ b = -3 \\ 3a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 57 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 57,\ f(32) = 2009$

3. El punto buscado estará en la mediatriz de $\overline{AB}$.

$[\overline{AB}] = (-1, -4)$ vector $\vec{u} \perp [\overline{AB}]$ $\vec{u} = (-4, 1)$.

Punto medio de $\overline{AB}$, $N\left(\dfrac{5}{2}, 3\right)$.

Ecuación de la mediatriz:

$$\frac{x - \frac{5}{2}}{-4} = \frac{y-3}{1} \Leftrightarrow 2x + 8y - 29 = 0,$$

y el punto es el de intersección de las dos rectas:

$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ 2x + 8y = 29 \end{cases} \Rightarrow P\left(-\dfrac{11}{18}, \dfrac{34}{9}\right)$

4. a) $4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 7 = 0$ es cierto.

$2a - 3 \cdot (-3) + 1 = 0 \Rightarrow a = -5.$

b) Vectores perpendiculares: $\vec{u} = (4, 5)$, $\vec{v} = (-5, -3)$.

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{35}{\sqrt{1394}} \Rightarrow \alpha = 20{,}38°$

c) $d(O, r) = \dfrac{|0 + 0 + 7|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{41}} = \dfrac{7\sqrt{41}}{41}$

5. El parámetro es

$p = d(F, r) = \dfrac{|1 + 2 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

La ecuación se halla a partir de la condición

$d(P, F) = d(P, r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \dfrac{|x + y - 4|}{\sqrt{2}}$

Elevando al cuadrado y desarrollando se obtiene:

$x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6 = 0$

6. a) $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{k - 2i}{8 + 24i} = \dfrac{(k-2i) \cdot (8 - 24i)}{(8 + 24i) \cdot (8 - 24i)} =$

$= \dfrac{8k - 48}{640} + \dfrac{-16 - 24k}{640} i$

Y para que sea real: $-16 - 24k = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{2}{3}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{8 + 24i}{3 - i}} = \sqrt[3]{\dfrac{80i}{10}} = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8_{90°}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 2_{30°},\ x_2 = 2_{150°},\ x_3 = 2_{270°} = -2i$

7. $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{4 + 3x}{1 + 4x}\right)^{2-x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{+\infty} = 0$. No es una indeterminación.

8. a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(2x+1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{2(2x+1)^2 - (x^2 - 4) \cdot 2(2x+1) \cdot 2}{(2x+1)^4} =$

$= \dfrac{2x(2x+1) - 4(x^2 - 4)}{(2x+1)^3} = \dfrac{2x + 16}{(2x+1)^3}$

b) $g(x) = \ln\left(\dfrac{1}{\text{sen } x}\right) = -\ln(\text{sen } x) \Rightarrow g'(x) = -\dfrac{\cos x}{\text{sen } x} =$

$= -\text{cotg } x$

$\forall x \in \Big(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\Big)$ que es el $D(g(x))$.

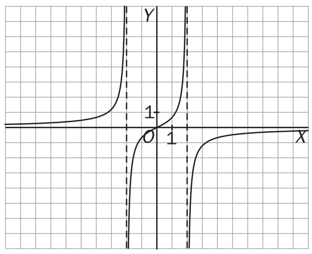
9. a) Dominio $= \mathbf{R} - \{-2, 2\}$.

Asíntotas verticales en $x = \pm 2$ porque $\displaystyle\lim_{x \to \pm 2} f(x) = \pm\infty$

Asíntota horizontal en $y = 0$, ya que $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

b) $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 8}{(4 - x^2)^2} > 0\ \forall x \in D(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Es monótona creciente en su dominio.



10. Calculamos $\bar{x} = 6{,}4$ $s_x = 2{,}059$ $\bar{y} = 3{,}6$ $s_y = 2{,}059$ $s_{xy} = -3{,}84$

La recta pedida es

$x - \bar{x} = \dfrac{s_{xy}}{(s_y)^2}(y - \bar{y}) \Rightarrow x - 6{,}4 = \dfrac{-3{,}84}{(2{,}059)^2}(y - 3{,}6) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -0{,}9y + 9{,}66.$

Si $y = 2{,}5 \Rightarrow x = 7{,}41$

11. a) $P(X \leqslant 7) = P\left(z \leqslant \dfrac{7 - 6}{1{,}8}\right) = P(z \leqslant 0{,}56) = 0{,}7123$

b) $P(X < 5) = P\left(z < \dfrac{5 - 6}{1{,}8}\right) = P(z \leqslant -0{,}56) =$

$= 1 - 0{,}7123 = 0{,}2877 \rightarrow 28{,}77\%$

PROYECTO EDITORIAL
Equipo de Educación Secundaria de Ediciones SM

REVISIÓN CIENTÍFICA Y PEDAGÓGICA
Juan Jesús Donaire

EDICIÓN
Juan Alberto Torresano

ILUSTRACIÓN
Modesto Arregui

DISEÑO
Estudio SM

MAQUETACIÓN
Grafilia, SL

COORDINACIÓN EDITORIAL
Josefina Arévalo

DIRECCIÓN EDITORIAL
Aída Moya