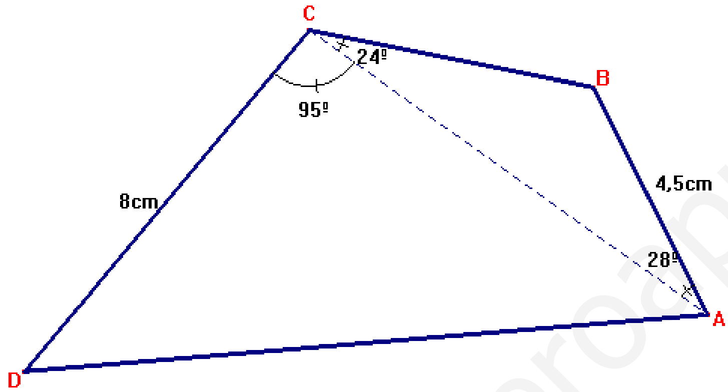
EXAMEN DE TRIGONOMETRÍA

1. Resuelve la inecuación y los sistemas de inecuaciones siguientes:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y \le 3 \\ x + 3 > 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} x - 1 < \dfrac{5x}{3} + 1 \\ \dfrac{x+5}{2} \le x - \dfrac{1}{2} \\ 5 - 2(x+1) < 3 \end{array}\right\}$ c) $\dfrac{5x+10}{x-3} \ge 0$ (2 puntos)

2. Obtén el perímetro del cuadrilátero de la figura: (2,5 puntos)



3. Sabemos que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$ con α en el primer cuadrante $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$ con β en el tercer cuadrante. (2,5 puntos)
Sin hallar el valor de los ángulos y expresando el resultado con fracciones y radicales, calcula:

a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ b) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ c) $\cos 2\alpha$ d) $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$

4. Resuelve la ecuación: (1,5 puntos)

$\operatorname{sen} 2x - 2\cos^2 x = 0$

5. Comprueba la identidad: (1,5 puntos)

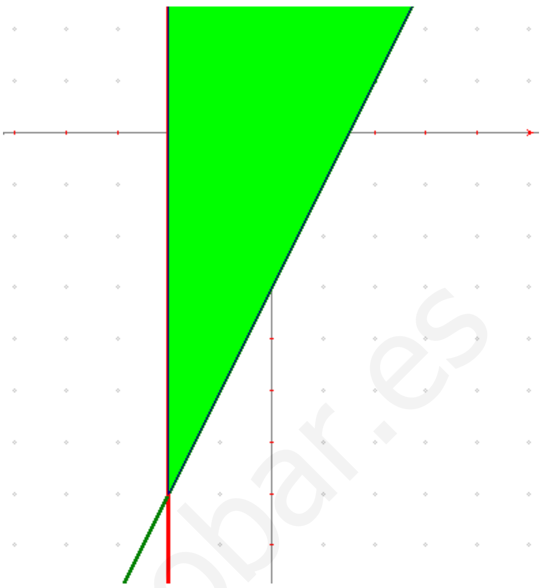
$$\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

SOLUCIONES

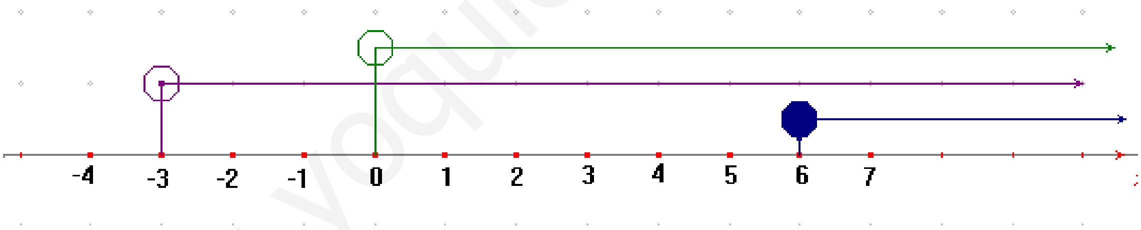
1. Resuelve la inecuación y los sistemas de inecuaciones siguientes:

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y \leq 3 \\ x + 3 > 1 \end{array}\right\}$ gráficamente, representamos primero las rectas correspondientes,

$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 3 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ x = -2 \end{array}\right.$, luego los semiplanos solución de cada una de las inecuaciones y las intersección de ambos semiplanos será la solución del sistema, teniendo en cuenta que entra en la solución la semirrecta $y = 2x - 3$ (en verde)



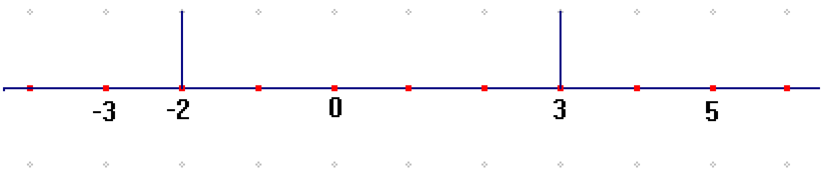
b) $\left.\begin{array}{l} x - 1 < \dfrac{5x}{3} + 1 \\ \dfrac{x+5}{2} \leq x - \dfrac{1}{2} \\ 5 - 2(x+1) < 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x - 3 < 5x + 3 \\ x + 5 \leq 2x - 1 \\ 5 - 2x - 2 < 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x - 5x < 3 + 3 \\ x - 2x \leq -1 - 5 \\ -2x < 3 - 5 + 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x < 6 \\ -x \leq -6 \\ -2x < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x > -3 \\ x \geq 6 \\ x > 0 \end{array}\right\}$



c) $\frac{!}{x} + \frac{0}{3} \geq 0$ - +

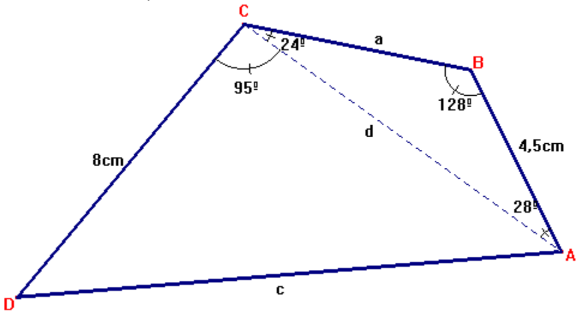
Solución del sistema: $[6, +\infty)$

c) $\dfrac{5x+10}{x-3} \geq 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{array}\right.$ estudiamos el signo por intervalos:



Solución: $(-\infty, -2] \cup (3, +\infty)$

2. Obtén el perímetro del cuadrilátero de la figura:



En el triángulo ABC, tenemos el ángulo B:

$\hat{B} = 180^\circ - (24^\circ + 28^\circ) = 128^\circ$

Aplicamos el teorema del seno para hallar los otros dos lados del triángulo a y d:

$$\frac{4{,}5}{\text{sen}24^\circ} = \frac{a}{\text{sen}28^\circ} \Rightarrow a = 5{,}2\text{cm}$$

$$\frac{4{,}5}{\text{sen}24^\circ} = \frac{d}{\text{sen}128^\circ} \Rightarrow d = 8{,}7\text{cm}$$

Ahora nos vamos al triángulo ACD, en el que conocemos dos lados y el ángulo comprendido, aplicamos el teorema del coseno para hallar el lado c:

$$c^2 = 8^2 + 8{,}7^2 - 2\cdot 8\cdot 8{,}7\cdot\cos 94^\circ \Rightarrow c = 12{,}3\text{cm}$$

Perímetro: $P = 8 + 12{,}3 + 4{,}5 + 5{,}2 = 30\text{cm}$

3. Sabemos que $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$ con α en el primer cuadrante $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ con β en el tercer cuadrante.

Empezamos hallando las razones de α y β:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos\beta = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{sen}^2\beta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \rightarrow \text{sen}\,\beta = -\frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

a) $\text{sen}\,(\alpha+\beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \text{sen}\,\beta\cos\alpha = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\frac{4}{5} = -\frac{6+4\sqrt{5}}{15}$

b) $\text{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1+\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{1 + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{3-2\sqrt{5}}{4}}{\frac{8+3\sqrt{5}}{8}} = \frac{6-4\sqrt{5}}{8+3\sqrt{5}}$

c) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$

d) $\text{tg}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}} = \pm\sqrt{\frac{5}{1}} = -\sqrt{5}$ ($\frac{\beta}{2}$ está en el II cuadrante)

4. $\operatorname{sen} 2x - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos x(\operatorname{sen}x - \cos x) = 0$

$$\left\langle \begin{array}{l} 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 90^{o} + 360^{o}k \\ x = 270^{o} + 360^{o}k \end{array} \right. \qquad k \in Z \\ \operatorname{sen}x - \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg}x = 1 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 45^{o} + 360^{o}k \\ x = 225^{o} + 360^{o}k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

5. Comprueba las identidades:

$$\frac{2\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} 2x} = \cos x - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \rightarrow \frac{2\operatorname{sen}x}{\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}} = \frac{2\operatorname{sen}x \cdot \cos 2x}{\operatorname{sen}2x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{2\operatorname{sen}x\cos x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \rightarrow \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$