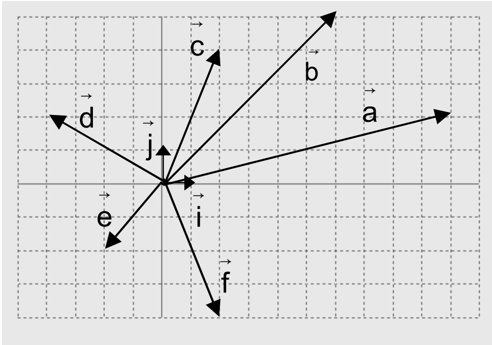
EJERCICIOS DE VECTORES

1. **a)** Representar en el mismo plano los vectores:

$$\vec{a}=(3,1) \quad \vec{b}=(-1,5) \quad \vec{c}=(2,-4) \quad \vec{d}=(-3,-1) \quad \vec{i}=(1,0) \quad \vec{j}=(0,1) \quad \vec{e}=(3,0) \quad \vec{f}=(0,-5)$$

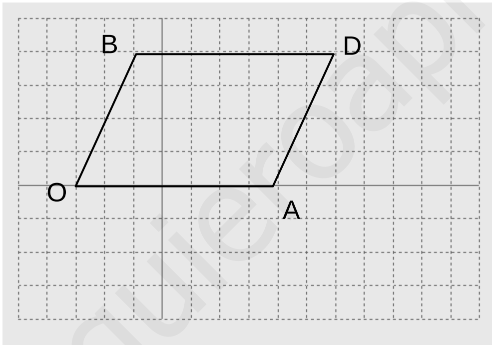
b) Escribir las coordenadas de los vectores fijos de la figura adjunta:



2. **a)** Dibujar dos vectores de origen común, igual módulo, y que formen un ángulo de 135º. Expresarlos analíticamente.

b) Dibujar dos vectores que tengan el origen común y los sentidos opuestos. Expresarlos analíticamente. ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

3. Dado el paralelogramo de la figura:

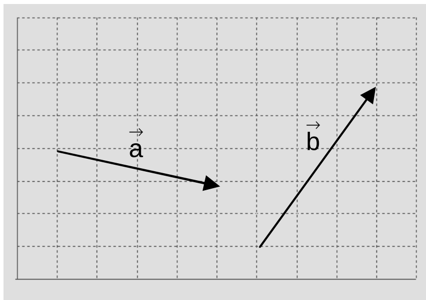


a) Indicar, analítica y gráficamente, un vector equipolente con $\overrightarrow{OA}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$

b) Indicar, analítica y gráficamente, un vector opuesto a $\overrightarrow{OA}$; ídem con $\overrightarrow{AD}$

Operaciones con vectores:

4. Dados los vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura, calcular gráfica –cada apartado en ejes distintos– y analíticamente (en función de la base ortonormal de $\mathcal{V}^2$):



a) $\vec{a}+\vec{b}$

b) $\vec{a}-\vec{b}$

c) $3\,\vec{a}$

d) $3\,\vec{a}+2\,\vec{b}$

e) $2\,\vec{a}-3\,\vec{b}$

5. **a)** Determinar, analíticamente, si los puntos A(3,1), B(5,2) y C(1,0) están alineados.

b) Ídem para A(1,1), B(3,4) y C(4,6) (Nota: un dibujo puede ser útil)

c) Hallar **k** para que los puntos A(1,7), B(-3,4) y C(k,5) estén alineados. *(Soluc: SÍ; NO; k=-5/3)*

6. Considerar el segmento de extremos A(-2,1) y B(5,4). Hallar:

a) El punto medio M *[Sol: M(3/2,5/2)]*

b) Los dos puntos P y Q que lo dividen en tres partes iguales. *[Soluc: P(1/3,2) y Q(8/3,3)]*

7. Hallar las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos A(3,4) y B(0,-2) en dos partes tales que $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PA}$ *[Soluc: P(2,2)]*

8. **a)** De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$ y el ángulo que forman, α=60º. Hallar $|\vec{a}+\vec{b}|$ y $|\vec{a}-\vec{b}|$ *(Soluc: $\sqrt{39}$ y $\sqrt{19}$, respectivamente)*

b) De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ conocemos $|\vec{a}+\vec{b}| = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{19}$ y $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 30º$. Hallar $|\vec{a}|$ *(Soluc: $9-\frac{\sqrt{57}}{2}$)*

9. Dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de intensidades 20 N y 30 N actúan sobre el mismo cuerpo y forman entre ellas un ángulo de 60º. Hacer un dibujo. ¿Cuántos N tiene la resultante $\vec{R}$? *(Soluc: 43,6 N)*

Combinación lineal de vectores:

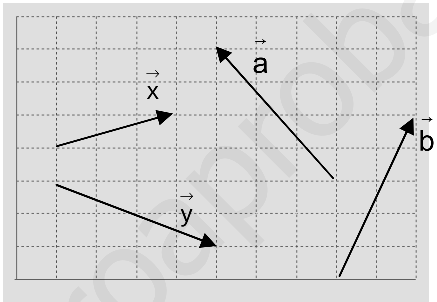
10. Dados los vectores $\vec{u}=(3,4)$ y $\vec{v}=(-2,3)$ se pide:

a) Razonar que pueden ser base de $\mathcal{V}^2$.

b) Obtener analíticamente las coordenadas de $\vec{w}=(-12,1)$ en la base anterior.

c) Explicar gráficamente la situación.

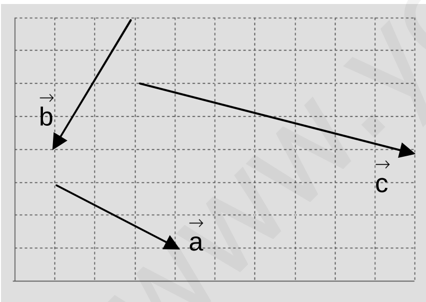
11. Expresar los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$:



$\left(\textit{Soluc}: \vec{a} = \vec{x}-\frac{3}{2}\vec{y};\quad \vec{b} = \frac{12}{5}\vec{x}-\frac{13}{10}\vec{y}\right)$

12. Expresar $\vec{a}=(9,5)$ y $\vec{b}=(-5,7)$ como combinación lineal de $\vec{x}=(1,3)$ e $\vec{y}=(3,-2)$, analítica y gráficamente. *(Soluc: $\vec{a}=3\vec{x}+2\vec{y}$; $\vec{b}=\vec{x}-2\vec{y}$)*

13. Dados los vectores libres de la figura:



a) Razonar que $\{\vec{a},\vec{b}\}$ constituye una base de $\mathcal{V}^2$.

b) Obtener $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{a}$ y $\vec{b}$

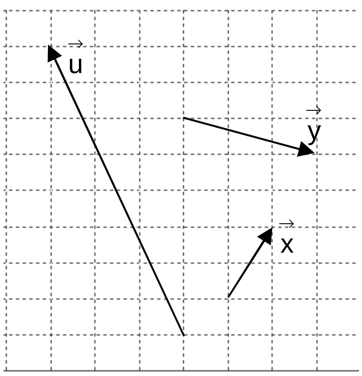
c) Comprobar gráficamente la combinación lineal anterior.

$\left(\textit{Soluc}: \vec{c} = 2\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)$

14. Definir base de $\mathcal{V}^2$, combinación lineal y coordenadas de un vector referidas a una base. Explicar estos conceptos mediante la base formada por $\{\vec{u}=(2,1); \vec{v}=(-1,3)\}$, y el vector $\vec{w}=(4,9)$, analítica y gráficamente.

(Soluc: $\vec{w}=3\vec{u}+2\vec{v}$)

15.



a) ¿Los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de la figura pueden ser base de $\mathcal{V}^2$? Razonar la respuesta.

b) Expresar $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ *(Sol: $\vec{u}=3\vec{x}-2\vec{y}$)*

c) Comprobar gráficamente lo anterior.

Módulo de un vector:

16. a) Calcular el módulo de los siguientes vectores, y dibujarlos (los siete primeros en los mismos ejes):

$$\vec{a}=(4,3),\quad \vec{b}=(3,-4),\quad \vec{c}=(1,1),\quad \vec{d}=(5,5),\quad \vec{e}=(-4,-3),\quad \vec{f}=(6,0),\quad \vec{u}=(0,-3)\quad y\quad \vec{v}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

b) Calcular el valor de **m** para que el vector $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ sea unitario. Razonar gráficamente por qué se obtienen dos soluciones. $\left(\textit{Soluc: } m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) Ídem para $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},m\right)$ $\left(\textit{Soluc: } m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

17. a) Dado $\vec{u}=(4,-7)$, hallar los dos vectores unitarios que tienen la dirección de $\vec{u}$. Razonar gráficamente la situación.

b) Ídem para $\vec{u}=(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

18. a) Para cada uno de los siguientes vectores, obtener uno unitario y con la misma dirección:

$$\vec{a}=(3,-4)\qquad \vec{b}=(1,1)\qquad \vec{c}=(12,5)\qquad \vec{d}=(6,-3)$$

b) Hallar el vector $\vec{v}$ de módulo 5 que sea paralelo al $\vec{a}=(36,-27)$

19. Dibujar los siguientes pares de puntos y hallar su distancia:

a) P(1,2) y Q(5,-1) **b)** P(6,3) y Q(-2,-3) **c)** P(2,1) y Q(2,5) **d)** A(-1,3) y B(5,3)

e) A(5,3) y el origen **f)** P(1,5) y Q(5,2) *(Soluc: a) 5; b) 10; c) 4; d) 6; e)* $\sqrt{34}$ *; f) 5)*

Producto escalar. Ángulo de dos vectores:

20. a) Dados $\vec{u}=(5,0)$ y $\vec{v}=(2,2)$ se pide: **i)** Dibujarlos **ii)** Calcular su producto escalar de dos formas posibles, y comprobar que coincide el resultado.

b) Ídem con $\vec{u}=(1,1)$ y $\vec{v}=(-2,0)$

c) Ídem con $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-2,4)$

21. Dados $\vec{a}=(-3,1)$, $\vec{b}=(2,3)$, $\vec{c}=(1,0)$ y $\vec{d}=(5,-2)$ calcular:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$	**g)** $\vec{a}^{\,2}$	**l)** $\vec{b}\left(\vec{d}\cdot\vec{a}\right)$
b) $\vec{b}\cdot\vec{a}$	**h)** $2\left(\vec{d}\cdot\vec{c}\right)$	**m)** $\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{d}$ de dos formas
c) $\vec{d}\cdot\vec{a}$	**i)** $\vec{a}\cdot\vec{c}$	**n)** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$ de dos formas
d) $\vec{b}\cdot\vec{c}$	**j)** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{d}$ de dos formas	**o)** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ de dos formas
e) $\vec{b}\cdot\vec{d}$	**k)** $\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\vec{a}$	☞ *Ejercicio libro:* ***20 pág. 183***
f) $\vec{c}\cdot\vec{d}$		

(Sol: a) -3; b) -3; c) -17; d) 2; e) 4; f) 5; g) 10; h) 10; i) -3; j) -13; k) (-12,4); l) (-34, -51); m) 14; n) 17; o) -3)

22. Indicar, razonadamente, si el resultado de las siguientes operaciones es un escalar o un vector:

a) $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)$ **b)** $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}\right)$ **c)** $\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{d}$ *(Soluc: escalar, en los tres casos)*

23. Un triángulo ABC es tal que $|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{BC}|=7$ y $\hat{B}=120^{\circ}$. Calcular $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ y su superficie.

$\left(\textit{Soluc}: -\frac{35}{2};\ \frac{35\sqrt{3}}{4}u^2\right)$

24. Sea un triángulo equilátero ABC de lado 6. Hallar:

a) $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ **b)** $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ **c)** $\vec{BA}\cdot\vec{CB}$ **d)** $\vec{AB}\cdot\vec{CB}$ **e)** $\vec{AC}\cdot\vec{BA}$ **f)** $\vec{AA}\cdot\vec{AC}$

(Aviso: Para considerar el producto escalar gráficamente, previamente los dos vectores han de tener origen común, para lo cual en ciertos casos habrá que trasladar uno de ellos).

(Soluc: a) 18; b) 18; c) –18; d) 18; e) –18; f) 0)

25. En el paralelogramo de la figura, hallar $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$ y $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

(Soluc: $5\sqrt{3}$; 16,34)

26. Hallar **x** de modo que el producto escalar de los vectores $\vec{a}=(3,-5)$ y $\vec{b}=(x,2)$ sea igual a 8 *(Soluc: x=6)*

27. Hallar las componentes de un vector $\vec{u}$ cuyo módulo es $2\sqrt{17}$ y que es ortogonal al vector $\vec{v}=(4,1)$. Hacer un dibujo explicativo de la situación. *(Soluc: $\vec{u_1}=(2,-8)$ y $\vec{u_2}=(-2,8)$)*

28. Hallar las componentes de un vector cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector (3,2) es 2. *(Soluc: (38/13,–44/13) y (–2,4))*

* **29.** Resolver el problema 8 analíticamente, y comprobar que se obtiene el mismo resultado.

30. Calcular el ángulo formado por los siguientes pares de vectores, y dibujarlos:

a) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(1,3)$ *(Soluc: 45º)*

b) $\vec{u}=(\sqrt{3},1)$ y $\vec{v}=(1,\sqrt{3})$ *(Soluc: 30º)*

c) $\vec{u}=(3\sqrt{2},\sqrt{6})$ y $\vec{v}=(-3\sqrt{2},\sqrt{6})$ *(Soluc:120º)*

d) $\vec{u}=(4,1)$ y $\vec{v}=(-2,8)$ *(Soluc: 90º)*

e) $\vec{u}=(-5,12)$ y $\vec{v}=(8,-6)$ *(Sol: ≅149º 29´)*

f) $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(-9,3)$ *(Soluc: 135º)*

g) $\vec{u}=(4,3)$ y $\vec{v}=(1,7)$ *(Soluc: 45º)*

☞ *Ejercicio libro:* ***24 pág. 183***

31. Dados los vectores $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(5,6)$, calcular:

a) El ángulo que forman. *(Soluc: ≅103º19')*

b) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ que sea unitario. *(Soluc: (3/5,–4/5))*

c) Un vector en la dirección y sentido de $\vec{u}$ de módulo 15. *(Soluc: (9,–12))*

d) ¿Son $\vec{u}$ y $\vec{v}$ ortogonales? En caso contrario, buscar un vector cualquiera ortogonal a $\vec{u}$

32. ¿Qué ángulo forman los vectores **unitarios** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en los siguientes casos?:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ **b)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$ **d)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(Soluc: a) 0º; b) 30º; c) 120º; d) 45º)

33. Comprobar que los vectores $\vec{u}=(8,15)$ y $\vec{v}=(30,-16)$ constituyen una base ortogonal. Comprobar que los vectores $\vec{u}/|\vec{u}|$ y $\vec{v}/|\vec{v}|$ forman una base ortonormal.

Problemas con parámetros:

NOTA: *En los ejercicios 34 a 46 se recomienda hacer un dibujo previo de la situación*

34. Calcular **x** e **y** en $\vec{a}=(-x,4)$, $\vec{b}=(-1,5)$ y $\vec{c}=(3,y)$, si se sabe que $\vec{a}\perp\vec{b}$ y $\vec{c}\perp\vec{b}$. Comprobar el resultado gráficamente. *(Soluc: x=-20; y=3/5)*

35. Obtener tres vectores cualesquiera perpendiculares a (-1,-3), siendo al menos uno de ellos unitario. Explicar gráficamente el resultado.

36. Hallar el valor de **m** para que $\vec{u}=\left(\frac{1}{2},m\right)$ y $\vec{v}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$ sean ortogonales. Interpretar el resultado gráficamente. *(Soluc: $-\sqrt{2}/4$)*

37. Dados $\vec{x}=(2,-3)$ e $\vec{y}=(a,4)$ calcular **a** para que: **a)** $\vec{x}\,//\,\vec{y}$ **b)** $\vec{x}\perp\vec{y}$ *(Sol: a) a=-8/3; b) a=6)*

38. Hallar un vector $\vec{v}$ que tenga módulo 3 y que forme un ángulo de 90º con $\vec{a}=(3,4)$ (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc: $\vec{v}_1=(12/5,-9/5)$ y $\vec{v}_2=-\vec{v}_1$)*

39. Dados $\vec{u}=(3,1)$, $\vec{v}=(a,-1/2)$ y $\vec{w}=(-3,2)$, se pide:

a) Hallar **a** para que $\vec{v}$ sea unitario. Comprobar gráficamente el resultado. *(Sol: $a=\pm\sqrt{3}/2$)*

b) Hallar **a** para que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean //. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Sol: a=-3/2)*

c) Hallar **a** para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean $\perp$. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Sol: a=-1/3)*

d) Hallar un vector $\perp$ a $\vec{u}$ y unitario. *(Sol : $\left(-1/\sqrt{10},3/\sqrt{10}\right)$ o su opuesto)*

e) Hallar el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{w}$ *(Sol: ≅127º 52' 30'')*

40. a) Calcular las componentes de un vector $\vec{u}$ de módulo 2 y tal que $\widehat{\vec{i}\cdot\vec{u}}=30º$ (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc : $\vec{u}_1=(\sqrt{3},1)$ y $\vec{u}_2=(\sqrt{3},-1)$)*

b) Ídem con $|\vec{u}|=3\sqrt{2}$ y $\widehat{\vec{i}\cdot\vec{u}}=45º$ *(Soluc : $\vec{u}_1=(3,3)$ y $\vec{u}_2=(3,-3)$)*

41. Calcular **a** con la condición de que $\vec{u}=(a,1)$ forme 60º con $\vec{v}=(1,1)$ (Aviso: puede haber dos soluciones, por lo que se recomienda hacer un dibujo) *(Soluc : $\sqrt{3}-2$)*

42. Hallar el valor de **x** para que el vector (x,1) forme 45º con el vector (1,2) (Aviso: puede haber dos soluciones) *(Soluc: x_1=3 y x_2=-1/3)*

43. Dados los vectores $\vec{u}=(2,-1)$ y $\vec{v}=(a,3)$, calcular **a** de modo que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales *(Soluc: a=3/2)*

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ formen 60º *(Soluc : $a=\frac{24+15\sqrt{3}}{11}$)*

c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección *(Soluc: a=-6)*

44. Dados los vectores $\vec{a}=(1,-1)$ y $\vec{b}=(2,m)$, hallar **m** de forma que:

a) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean ortogonales. *(Soluc: m=2)*

b) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tengan la misma dirección. *(Soluc: m=-2)*

c) $\vec{b}$ sea unitario. *(Soluc: ∄ soluc.)*

d) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ formen 45º *(Soluc: m=0)*

45. Dados $\vec{a}=(3,-4)$ y $\vec{b}=(5,x)$, hallar **x** para que:

a) ambos vectores sean perpendiculares *(Soluc: x=15/4)*

b) ambos vectores formen 30º *(Soluc: $x_1 \cong -2{,}1$; $x_2 \cong -41{,}50$)*

c) tengan la misma dirección *(Soluc: x=−20/3)*

46. Dados $\vec{u}=(2,1)$ y $\vec{v}=(a,-3)$, se pide:

a) Hallar **a** para que sean //. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=-6)*

b) Hallar **a** para que sean ⊥. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=3/2)*

c) Hallar **a** para que formen 45º. Justificar gráficamente la solución obtenida. *(Soluc: a=9)*

d) Hallar un vector ⊥ a $\vec{u}$ de módulo 5 *(Soluc: $\left(-\sqrt{5},2\sqrt{5}\right)$ o su opuesto)*

47. Dados $\vec{u}=(3,-4)$ y $\vec{v}=(a,2)$, se pide:

a) Hallar **a** tal que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$ *(Soluc: a=4)*

b) ¿Qué ángulo formarán $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en el caso anterior? *(Soluc: ≅ 79º 41' 43'')*

c) Hallar **a** tal que $\vec{u}\,//\,\vec{v}$. Explicar gráficamente la situación. *(Soluc: a=−3/2)*

d) Hallar un vector ⊥ a $\vec{u}$ y de módulo 10. Explicar gráficamente la situación. *(Soluc: (8,6), o su opuesto)*

Área de un triángulo:

48. Hallar los ángulos del triángulo de vértices A(−2,2), B(5,3) y C(2,15). Hallar también su área.

(Soluc: A≅64º 46'; B≅84º 6'; C≅31º 8'; S_{ABC}=43,5 u^2)

49. Dado el triángulo de vértices A(1,1), B(5,4) y C(−5,9), se pide:

a) Dibujarlo.

b) Demostrar que es rectángulo en A *$\left(\text{Soluc}: \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\right)$*

c) Hallar su área. *(Soluc: S_{ABC}=25 u^2)*

50. **a)** Dibujar el triángulo de vértices A(1,−2), B(3,−1) y C(2,1) y hallar su área. *(Soluc: S_{ABC}=2,5 u^2)*

b) Ídem con A(3,8), B(−11,3) y C(−8,−2) *(Soluc: S_{ABC}=42,5 u^2)*

c) Ídem con A(4,−1), B(2,1) y C(0,2) *(Soluc: S_{ABC}=1 u^2)*

51. **<u>TEORÍA</u>:** **a)** Dado el vector $\vec{u}=(3,-4)$, hallar razonadamente otro vector con la misma dirección pero de módulo 2. Hacer un dibujo explicativo.

b) Dados $\vec{a}=(-1,2)$, $\vec{b}=(2,-3)$ y $\vec{c}=\left(\frac{1}{2},4\right)$, hallar $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$

c) ¿Son ortonormales $\vec{a}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\vec{b}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$? ¿Y ortogonales?

d) ¿Qué indica el signo del producto escalar? Indicar ejemplos.

e) Demostrar que el vector $\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a}-\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$