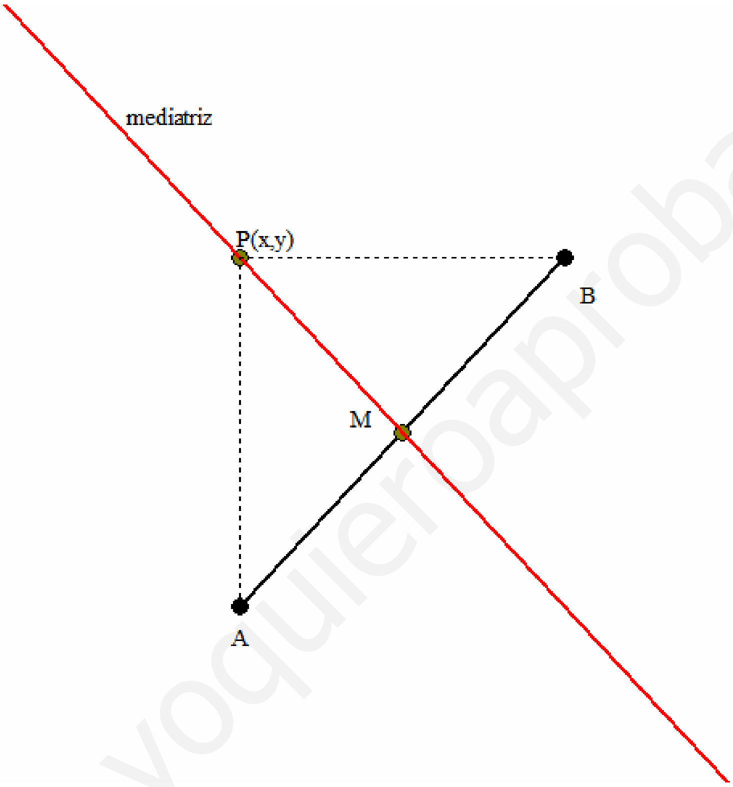
RESUMEN TEÓRICO LUGARES GEÓMETRICOS. CÓNICAS (circunferencia y elipse)

1. LUGARES GEOMÉTRICOS

Definición: Se llama *lugar geométrico* a la figura que forman un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad

Ejemplos:

Mediatriz de un segmento.- Dado un segmento de extremos A y B, el lugar geométrico de los puntos que equidistan (están a igual distancia) de los extremos A y B es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, y es la recta perpendicular al segmento que pasa por el punto medio del segmento.
Por tanto se tiene que cumplir que $d(A,P)=d(B,P)$



Veamos con un caso particular como calcular la ecuación general de la recta mediatriz de un segmento
Vamos a calcular la mediatriz del segmento de extremos A(-1,1) y B(5,3)

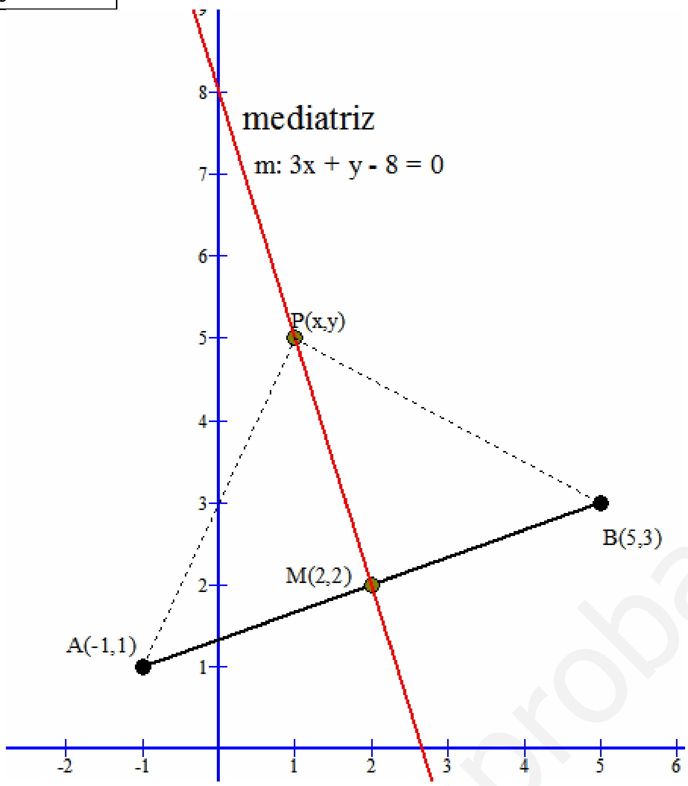
1ª Forma: Aplicando la definición de mediatriz como puntos que equidistan de los extremos A y B del segmento

Tomamos un punto P(x,y) que ha de cumplir que: $d(A,P)=d(B,P) \rightarrow$
$\left|\vec{AP}\right|=\left|\vec{BP}\right| \rightarrow \left|(x+1,y-1)\right|=\left|(x-5,y-3)\right| \rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2} \rightarrow$ Quitamos las raíces cuadradas y desarrollamos y nos queda: $x^2+2x+1+y^2-2y+1=x^2-10x+25+y^2-6y+9 \rightarrow$ Operamos y simplificamos: $2x-2y+2=-10x-6y+34 \rightarrow m\equiv 12x+4y-32=0 \rightarrow \boxed{m\equiv 3x+y-8=0}$

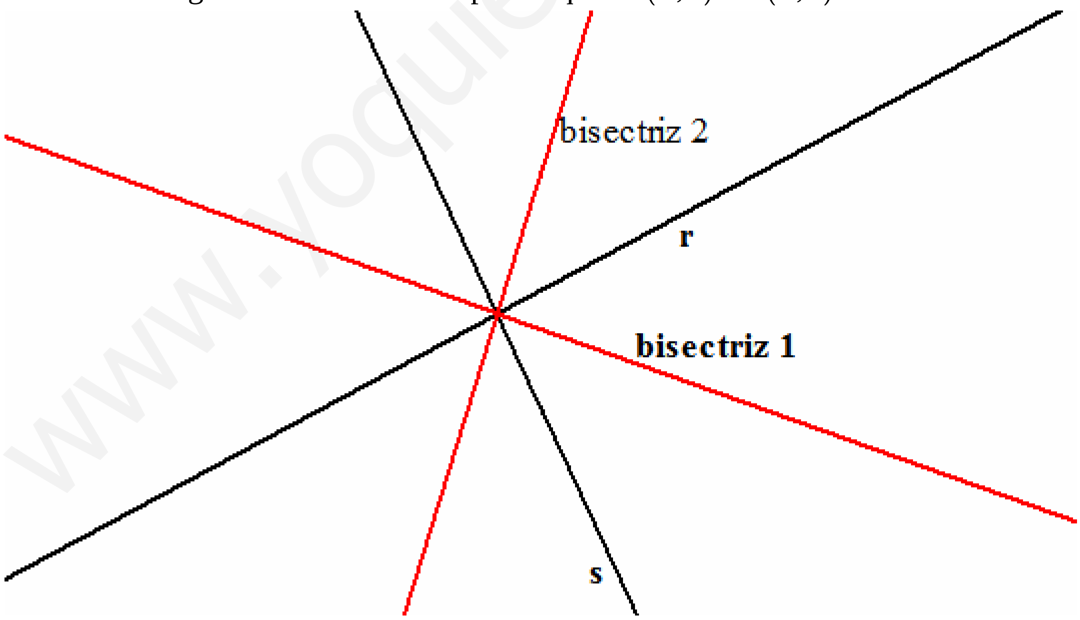
2ª Forma: Aplicando que la mediatriz es perpendicular al segmento y pasa por el punto medio.
El vector $\vec{AB}=(6,2)$ es el vector normal de la mediatriz, por comodidad usamos el vector proporcional que se obtiene al multiplicarlo por ½ , $\vec{n}=(3,1)$. Luego la ecuación de la mediatriz será de la forma:
$m\equiv 3x+y+C=0$.

Para calcular C nos hace falta el punto medio del segmento $\overline{AB}$, que es $M(2,2)$, que ha de pertenecer a la mediatriz: $M(2,2)\in m \rightarrow 3\cdot 2+2+C=0 \rightarrow 8+C=0 \rightarrow C=-8$

Y ya tenemos que: $\boxed{m\equiv 3x+y-8=0}$



<u>Bisectrices de los ángulos que forman dos rectas</u>.- Dadas dos rectas, r y s, el lugar geométrico de los puntos que equidistan de ellas dos lo forman dos rectas perpendiculares entre sí que son las bisectrices de los ángulos que forman las rectas dadas. Luego la condición a cumplir es que: $d(P,r)=d(P,s)$

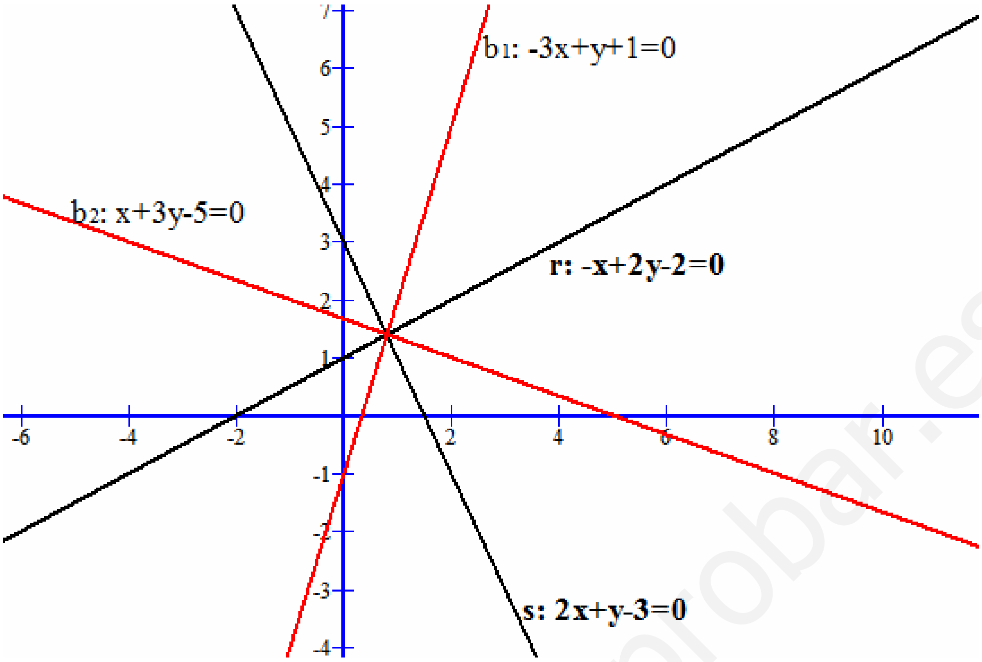


Veamos con un caso particular como calcular las bisectrices a los ángulos determinados por dos rectas.

Consideremos las rectas $r\equiv -x+2y-2=0$ y $s\equiv 2x+y-3=0$. Tomamos un punto P(x,y) que ha de verificar que: $d(P,r)=d(P,s) \rightarrow \dfrac{|-x+2y-2|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\dfrac{|2x+y-3|}{\sqrt{2^2+1^2}} \rightarrow \dfrac{|-x+2y-2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|2x+y-3|}{\sqrt{5}} \rightarrow$

$$|-x+2y-2| = |2x+y-3| \rightarrow \begin{cases} -x+2y-2 = 2x+y-3 \\ ó \\ -x+2y-2 = -2x-y+3 \end{cases}$$ → De aquí, operando obtenemos las ecuaciones de las dos bisectrices:

$$b_1 \equiv -3x+y+1=0 \quad \text{y} \quad b_2 \equiv x+3y-5=0$$

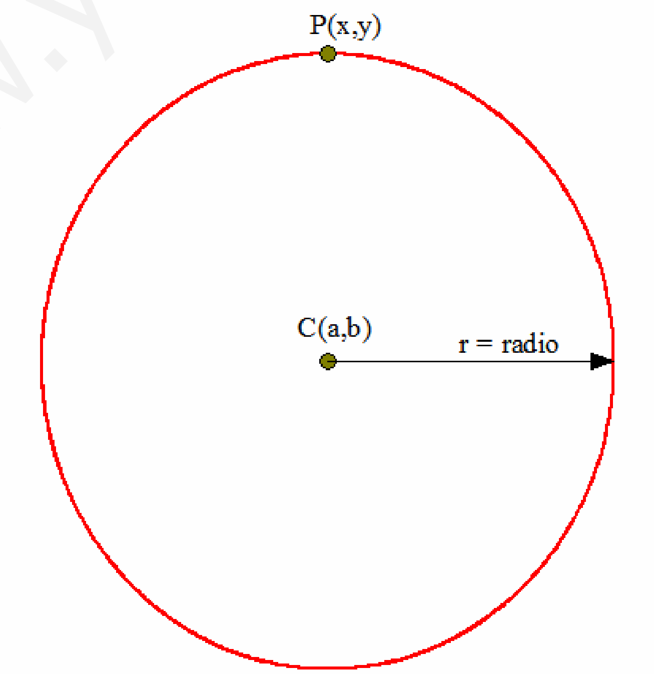


VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de las páginas 176 y 177

2. CIRCUNFERENCIA

Definición.- Una *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano que están a igual distancia de un punto C(a,b) llamado *centro*. A esa distancia fija la llamamos *radio* de la circunferencia y se nota por r.

Es decir, los puntos verifican que: $d(P,C)=r$ → $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ → Elevamos al cuadrado para quitar la raíz cuadrada y nos queda, $\boxed{Circunf. \equiv (x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$ que es la ecuación general de una circunferencia de centro $C(a,b)$ y radio r



Si desarrollamos los paréntesis nos queda otra expresión de la circunferencia de la forma:
$C \equiv x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, pero nosotros utilizaremos la ecuación general.

<u>Ejemplo 1</u>: Dar la ecuación general de la circunferencia de centro C(1,1) y radio r = 6

$$\boxed{Circunf. \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 36}$$

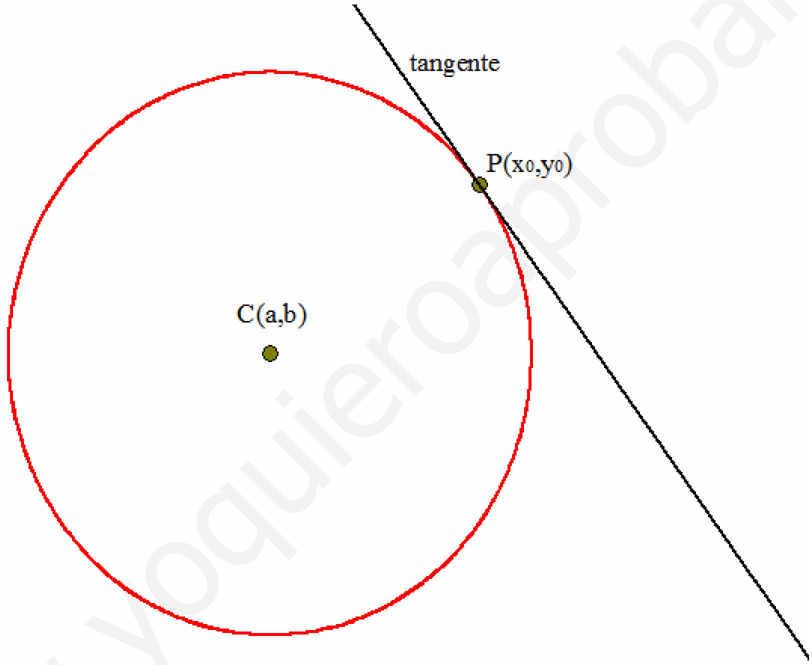
<u>Ejemplo 2</u>: Dada la ecuación general $Circunf. \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ de una circunferencia, tenemos que:

Centro: C(-2,3)   Radio: $r = \sqrt{25} = 5$

<u>Recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos</u>:

Dada una circunferencia $Circunf. \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ y un punto de ella $P(x_0, y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente en el punto $P(x_0, y_0)$ es:

$$t \equiv y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_o - b}(x - x_0)$$



<u>Ejemplo 3</u>.- Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la circunferencia $Circunf. \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ en el punto $P(-5,-1)$

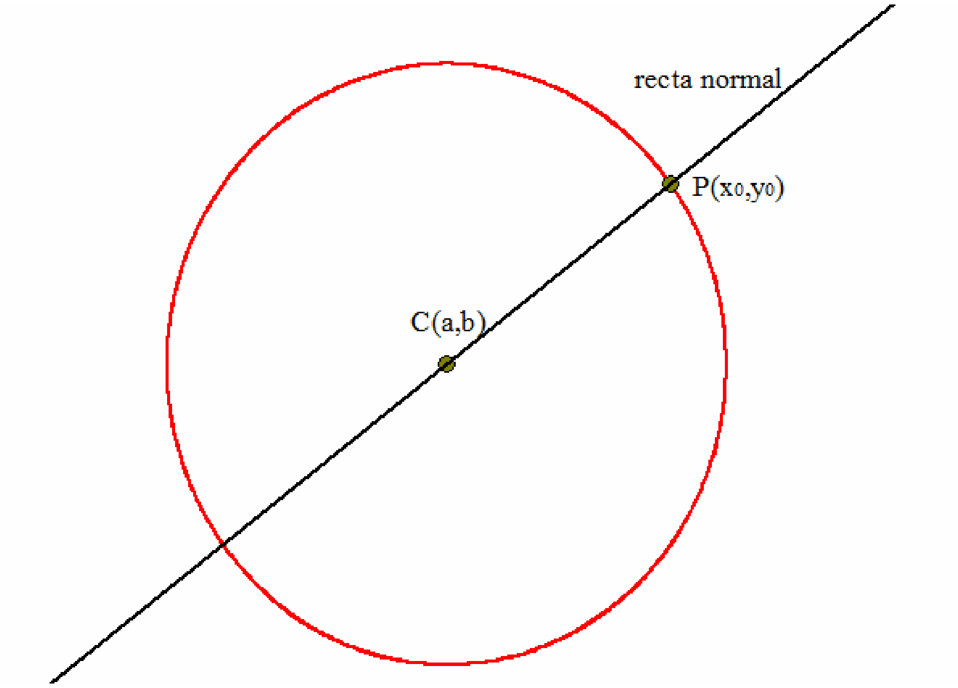
Como vemos el centro es: C(-2,3), luego $t \equiv y - (-1) = -\frac{-5-(-2)}{-1-3}(x - (-5))$ →

→ $t \equiv y + 1 = \frac{-3}{4}(x+5)$

<u>Recta normal a una circunferencia en uno de sus puntos</u>:

Dada una circunferencia $Circunf. \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ y un punto de ella $P(x_0, y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta normal en el punto $P(x_0, y_0)$ es:

$$n \equiv y - y_0 = \frac{y_0 - b}{x_o - a}(x - x_0)$$



Ejemplo 4.- Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la circunferencia $Circunf. \equiv (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$ en el punto $P(-5,-1)$

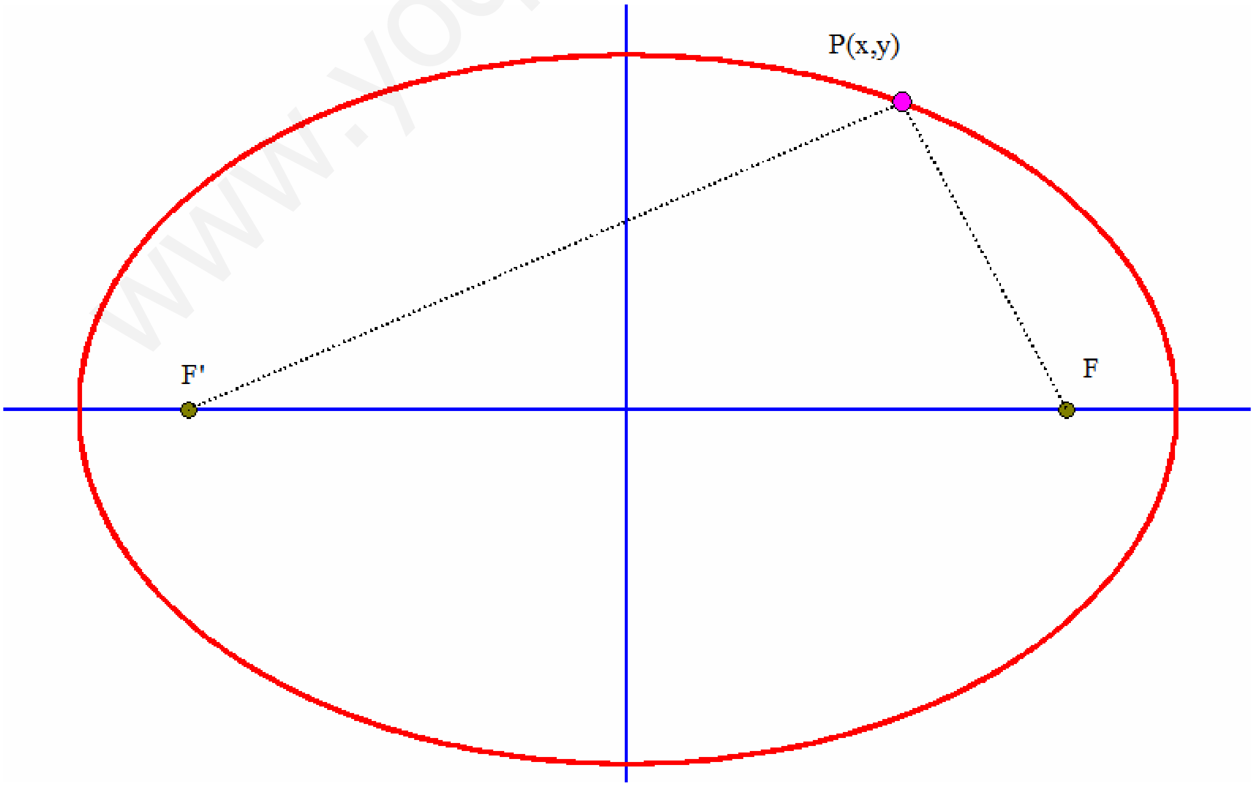
Como vemos el centro es: C(-2,3), luego $n \equiv y-(-1) = \dfrac{-1-3}{-5-(-2)}(x-(-5))$ →

→ $n \equiv y+1 = \dfrac{4}{3}(x+5)$

VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de las páginas 178 y 179

3. ELIPSE

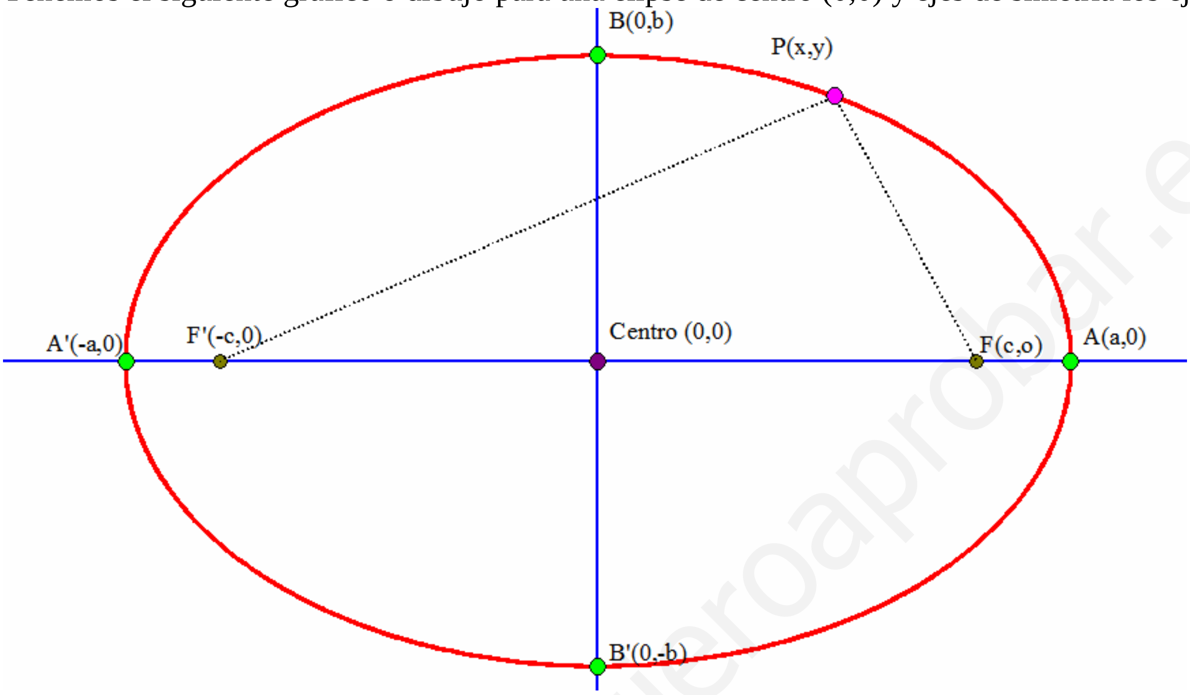
Definición.- Una elipse es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F', llamados focos, es una cantidad constante.
Es decir se tiene que $d(P,F)+d(P,F') = \text{constante}$



Elementos de una elipse

Focos: Son los puntos F y F'
Ejes de simetría: Son las rectas respecto de las cuales la elipse es simétrica
Centro: Punto donde se cortan los ejes
Vértices: Puntos de corte de la elipse con los ejes. Son los puntos A, A', B y B'
Eje mayor: Es el segmento $\overline{AA'}$ de longitud $2a$
Eje menor: Es el segmento $\overline{BB'}$ de longitud $2b$
Distancia focal: Es la longitud del segmento $\overline{FF'}$, que es $2c$

Tenemos el siguiente gráfico o dibujo para una elipse de centro (0,0) y ejes de simetría los ejes cartesianos



Se cumple siempre que: $a^2 = b^2 + c^2$

La ecuación de una elipse en forma reducida (con centro el origen de coordenadas) es de la forma:

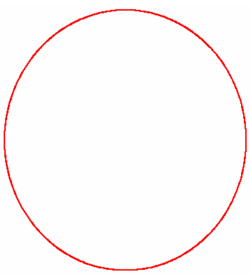
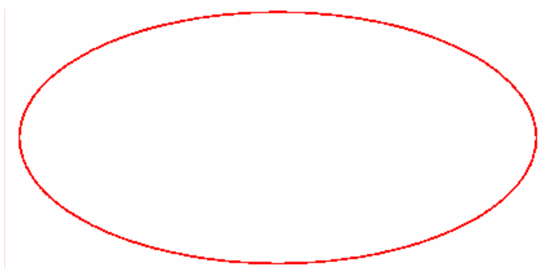
$$Elipse \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ si el eje mayor está sobre OX}$$

O bien

$$Elipse \equiv \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ si el eje mayor está sobre OY}$$

Definición: Se llama excentricidad de una elipse al achatamiento que esta presenta y se calcula como: $e = \frac{c}{a}$

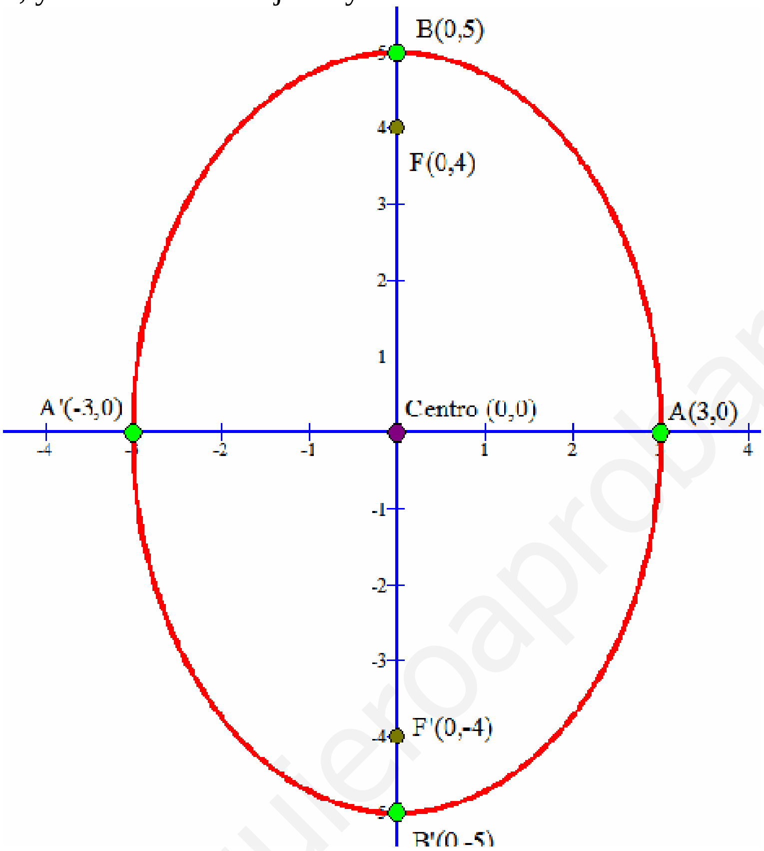
Tenemos que depediendo de los valores de la excentricidad:

$e = 0$ La elipse es una circunferencia, pues los focos coinciden con el centro 	$0 < e < 1$ Es una elipse normal, cuanto más próximo a 1 más achatada estará 	$e = 1$ La elipse esta totalmente achatada o aplastada, es un segmento

Ejemplo 5.- Dada la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$. Se pide:

a) Eje mayor: $a^2=25 \rightarrow a=5$. Luego eje mayor = 10
b) Eje menor: $b^2=9 \rightarrow b=3$. Luego eje menor = 6
c) Distancia focal: Como sabemos que $a^2=b^2+c^2 \rightarrow 5^2=3^2+c^2 \rightarrow c=4$ Por tanto, distancia focal = 8

Gráficamente nos queda así, y como vemos el eje mayor está sobre OY



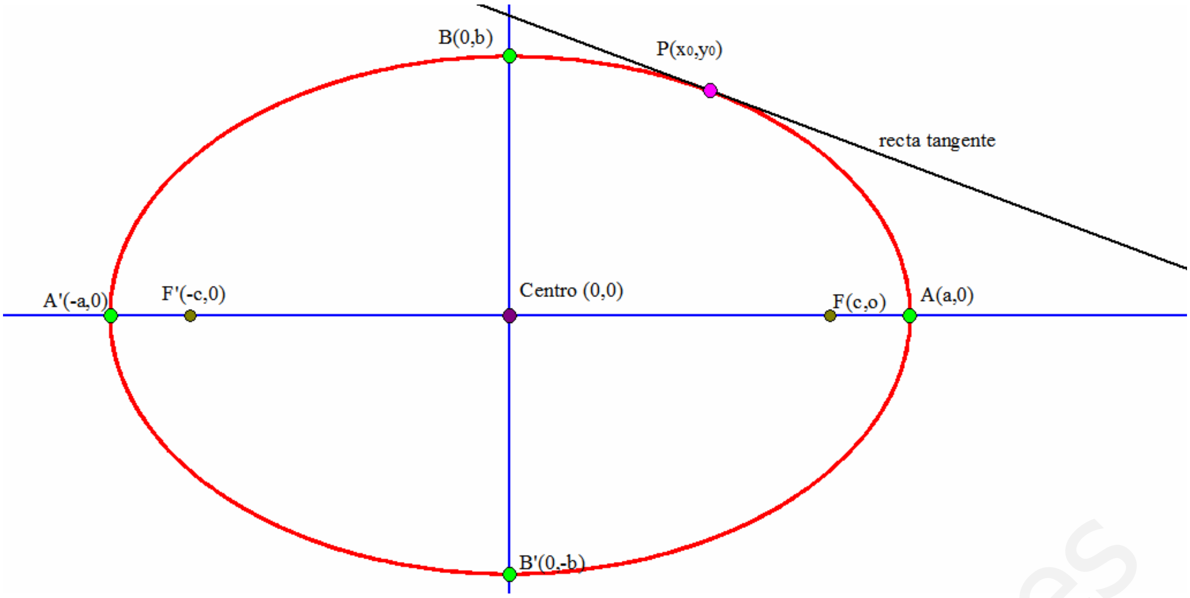
Ejemplo 6.- Dar la ecuación reducida de la elipse cuyo eje menor está sobre OY y mide 12 y cuya distancia focal es 16.

Tenemos que $2b=12 \rightarrow b=6$ Y además $2c=16 \rightarrow c=8$ Por tanto, $a^2=6^2+8^2 \rightarrow a=10$

Y el eje mayor esta sobre OX, así que la ecuación es: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

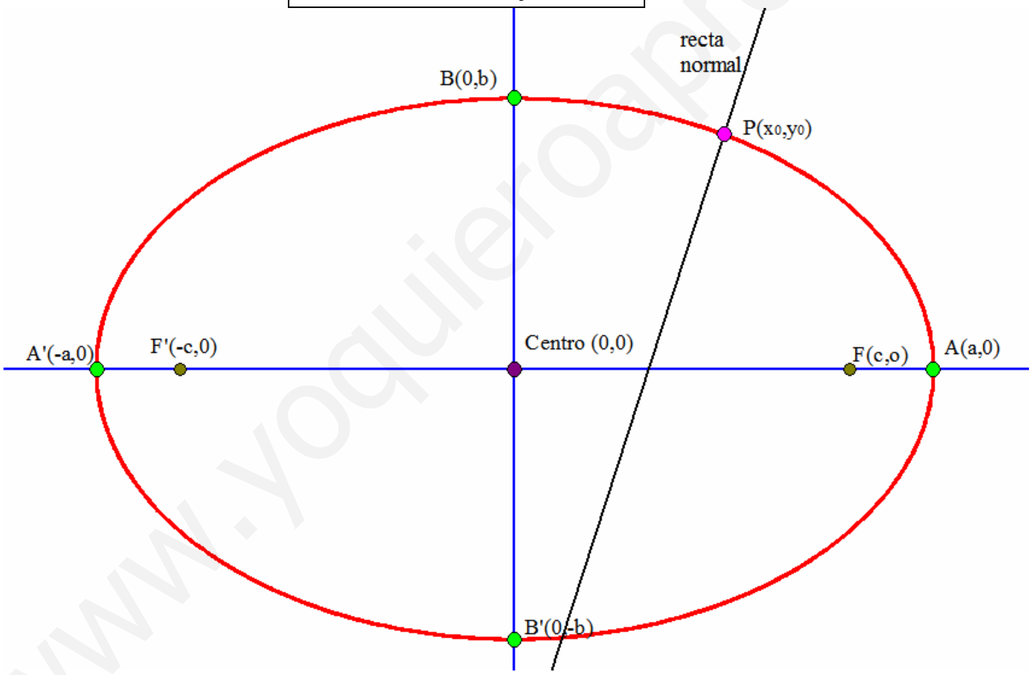
Recta tangente a una elipse en uno de sus puntos:

Dada una elipse $Elipse \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y un punto de ella $P(x_0,y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente en el punto $P(x_0,y_0)$ es: $\boxed{t \equiv y-y_0=-\frac{b^2\cdot x_0}{a^2\cdot y_o}(x-x_0)}$



Recta normal a una elipse en uno de sus puntos:

Dada una elipse $Elipse \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto de ella $P(x_0, y_0)$, la ecuación punto-pendiente de la recta normal en el punto $P(x_0, y_0)$ es: $\boxed{n \equiv y - y_0 = \frac{a^2 \cdot y_0}{b^2 \cdot x_o}(x - x_0)}$



Ejemplo 7.- Dada la elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, calcular la tangente y la normal en el punto $P_0\left(5, 3\sqrt{3}\right)$

Tenemos aplicando las fórmulas pertinentes que:

$$t \equiv y - 3\sqrt{3} = -\frac{36 \cdot 5}{100 \cdot 3\sqrt{3}}(x - 5) \rightarrow \text{Operando y simplificando} \quad t \equiv y - 3\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{5}(x - 5)$$

Y la recta normal queda: $n \equiv y - 3\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3}(x - 5)$

VER: Ejercicios resueltos del libro de texto de las páginas 183

ACTIVIDADES DEL LIBRO: De la página 194, ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13