EJERCICIOS RESUELTOS LUGARES GEOMÉTRICOS - CÓNICAS

Cuestión 1.-

Obtén la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(2, 3)$ y $B(4, 1)$.

Solución:

Los puntos $P(x,y)$ de la mediatriz cumplen que:

$dist\ (P, A) = dist\ (P, B)$, es decir:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$$

Elevamos al cuadrado en los dos miembros y operamos:

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9 = x^2-8x+16+y^2-2y+1$$
$$4x-4y-4=0 \quad \rightarrow \quad x-y-1=0$$

Es una recta perpendicular al segmento AB, que pasa por su punto medio.

Cuestión 2.-

¿Cuál es el lugar geométrico cuya suma de distancias a los puntos $A(0, 1)$ y $B(0, -1)$ es 8?. Halla su ecuación.

Solución:

Es una elipse de focos A y B y constante $k = 8$. Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\ (P, A) + dist\ (P, B) = 4$, es decir:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4$$

Elevamos al cuadrado y operamos para simplificar:

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 4 - \sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$x^2+(y-1)^2 = 16 + x^2 + (y+1)^2 - 8\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$x^2+y^2-2y+1 = 16+x^2+y^2+2y+1-8\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$

$$8\sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4y+16$$

$$2\sqrt{x^2+(y+1)^2} = y+4$$

$$4\left(x^2+y^2+2y+1\right) = (y+4)^2$$

$$4x^2+4y^2+8y+4 = y^2+8y+16$$

$4x^2+3y^2 = 12$. Dividimosentre12:

$\dfrac{4x^2}{12}+\dfrac{3y^2}{12}=\dfrac{12}{12} \quad \rightarrow \quad \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Esunaelipse.

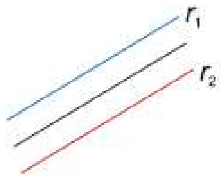
Cuestión 3.-

Identifica y halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos, P, del plano tales que su distancia a la recta r_1: $x + y + 1 = 0$ sea igual que su distancia a la recta r_2: $2x + 2y + 4 = 0$.

Las dos rectas dadas,

r_1: $x + y + 1 = 0$ y r_2: $x + y + 2 = 0$,

son rectas paralelas. Por tanto, el lugar geométrico pedido será otra recta, paralela a las dos, a igual distancia de ellas:



Hallamos su ecuación:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$dist\ (P, r_1) = dist\ (P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}}$$

$$|x+y+1| = |x+y+2| \quad \begin{cases} x+y+1 = x+y+2 \to 1=2 \to \text{Imposible} \\ x+y+1 = -x-y-2 \to 2x+2y+3=0 \end{cases}$$

Observamos que la recta obtenida es paralela a r_1 y r_2.

Cuestión 4.-

Halla la ecuación de las bisectrices de los ángulos formados por las rectas r_1: $x + 3y - 1 = 0$ y r_2: $3x - y + 4 = 0$.

Solución:

Los puntos $P(x, y)$ de las bisectrices cumplen que:

$dist\ (P, r_1) = dist\ (P, r_2)$, es decir:

$$\frac{|x+3y-1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x-y+4|}{\sqrt{10}}$$

$$|x+3y-1| = |3x-y+4| \quad \begin{cases} x+3y-1 = 3x-y+4 \to 2x-4y+5=0 \\ x+3y-1 = -3x+y-4 \to 4x+2y+3=0 \end{cases}$$

Son dos rectas perpendiculares entre sí, que se cortan en el mismo punto que r_1 y r_2.

Cuestión 5.-

Halla el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuya distancia a $A(2, 0)$ sea el doble de la distancia a $B(-1, 0)$. Identifica la figura resultante.

Solución:

Si $P(x, y)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$$dist(P, A) = 2 \cdot dist(P, B) \text{, es decir:}$$

$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \text{. Elevamos al cuadrado y operamos:}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4(x^2 + 2x + 1 + y^2)$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

$(x+2)^2 + y^2 = 4$. Es una circunferencia de centro $(-2, 0)$ y radio 2.

Cuestión 6.-

Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, $P(x, y)$, tales que el triángulo ABP sea rectángulo en P, siendo $A(2, 1)$ y $B(-6, 1)$. Interpreta la figura que obtienes.

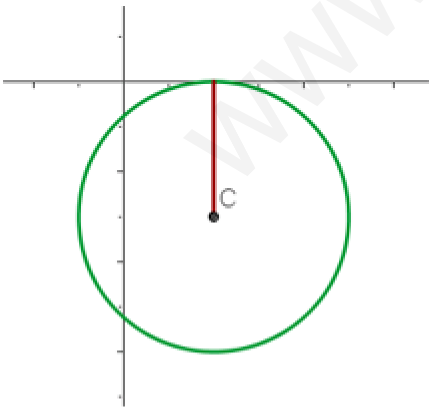
Solución:

Para que el triángulo sea rectángulo en P, se ha de cumplir que:

$$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Rightarrow (2-x, 1-y) \cdot (-6-x, 1-y) = 0$$
$$(2-x)(-6-x) + (1-y)^2 = 0$$
$$-12 - 2x + 6x + x^2 + 1 + y^2 - 2y = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0; \text{ es decir:}$$
$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

Obtenemos una circunferencia de centro $(-2, 1)$ (que es el punto medio del segmento AB) y de radio 4.

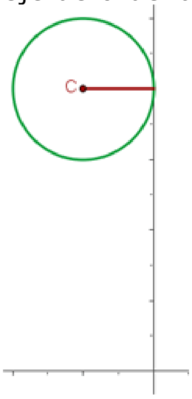
Cuestión 7.- Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (2,-3) y es tangente al eje de abscisas.



$C(2, -3)$ $\qquad s \equiv y = 0$

$r = d(C, s) = 3 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 3^2$

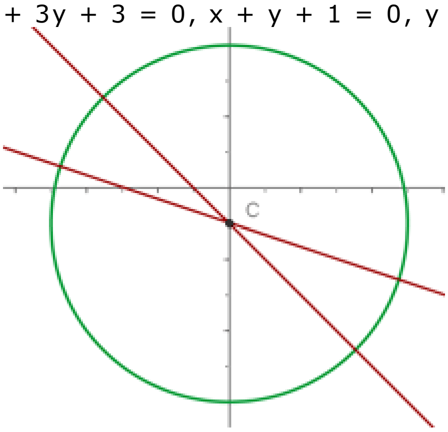
Cuestión 8.- Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en (-1, 4) y es tangente al eje de ordenadas.



$C(-1, 4)$ $\quad s \equiv x = 0 \rightarrow \quad r = d(C, s) = 1 \rightarrow \quad (x+1)^2 + (y-4)^2 = 1$

Cuestión 9.-

Calcula la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el punto de intersección de la rectas x + 3y + 3 = 0, x + y + 1 = 0, y su radio es igual a 5.



$$\begin{cases} x + 3y + 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \qquad C(0, -1) \qquad \rightarrow \quad x^2 + (y+1)^2 = 25$$

Cuestión 10.-

Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(1, 4)$ y tiene su centro en la recta $y = 2x$.

Solución:

Si tiene su centro en la recta $y = 2x$, las coordenadas de este son $C(x, 2x)$.

La distancia de A al centro ha de ser igual que la distancia de B al centro (esta distancia es el radio de la circunferencia):

$$dist\ (A, C) = dist\ (B, C)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (2x-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (2x-4)^2}$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 8x + 4 = x^2 - 2x + 1 + 4x^2 - 16x + 16$$

$$12x = 12 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

El centro de la circunferencia es $C(1, 2)$.

La ecuación será:

El radio es: $r = dist(A, C) = \sqrt{4} = 2$ $\quad \rightarrow \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

Cuestión 11.-

Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0$ y $2x + 3y - 1 = 0$.

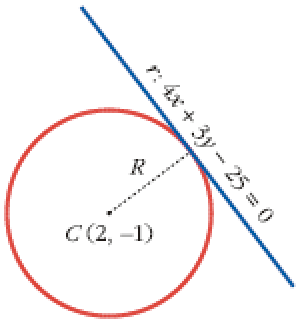
Solución:

Hallamos su centro:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - y - 7 = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 3x - 7 \\ 2x + 3(3x - 7) - 1 = 0 \end{array}$$

$$2x + 9x - 21 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 11x = 22 \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \rightarrow \quad y = -1$$

El centro es $C(2, -1)$.



El radio, R, es igual a la distancia del centro a la recta tangente:

$$R = dist(C, r) = \frac{|8 - 3 - 25|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

La ecuación será:

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

Cuestión 12.-

Obtén la ecuación de la circunferencia de radio 2 que pasa por los puntos $(1, 0)$ y $(3, 2)$.

Solución:

El centro de la circunferencia pertenece a la mediatriz del segmento de extremos $A(1, 0)$ y $B(3, 2)$:

- Punto medio de A y B $\rightarrow$ $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2, 1)$
- Pendiente de la recta que pasa por A y B $\rightarrow$ $m = \frac{2-0}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$
- Pendiente de la mediatriz (perpendicular) $\rightarrow$ $\frac{-1}{m} = \frac{-1}{1} = -1$
- Ecuación de la mediatriz:

$$y = 1 - 1(x - 2) \quad \rightarrow \quad y = 1 - x + 2 \quad \rightarrow \quad y = 3 - x$$

Las coordenadas del centro de la circunferencia son $C(x,\ 3-x)$.

La distancia del centro a los puntos A y B debe ser igual a 2:

$$dist(A, C) = \sqrt{(x-1)^2 + (3-x)^2} = 2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 9 - 6x + x^2 = 4 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

- Centro $(3, 0)$ y radio 2:

  $(x-3)^2 + y^2 = 4 \quad \rightarrow$

- Centro $(1, 2)$ y radio 2:

  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

Cuestión 13.-
Halla la ecuación de la elipse conociendo:

a) $C(0, 0)$, $F(2, 0)$, $A(3, 0)$

$a = 3$ $c = 2$ $b = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

b) $C(0, 0)$, $F(0, 4)$ $A(0, 5)$

$a = 5$ $c = 4$ $b = \sqrt{25-16} = 3$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Cuestión 14.- Escribe la ecuación reducida de la elipse que pasa por el punto (2, 1) y cuyo eje menor mide 4.

$2b = 4$ $b = 2$

$\frac{2^2}{a^2} + \frac{1^2}{2^2} = 1$ $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$$\frac{3x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Cuestión 15.- La distancia focal de una elipse es 4. Un punto de la elipse dista de sus focos 2 y 6, respectivamente. Calcular la ecuación reducida de dicha elipse.

$2c = 4$ $c = 2$

$2a = 2 + 6$ $a = 4$

$b = \sqrt{16-4} = \sqrt{12}$ $b = 2\sqrt{3}$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

Cuestión 16.- Escribe la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos: $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \\ \frac{2}{a^2} + \frac{2}{4b^2} = 1 \end{cases} \qquad a = 2 \qquad b = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$