CÓNICAS

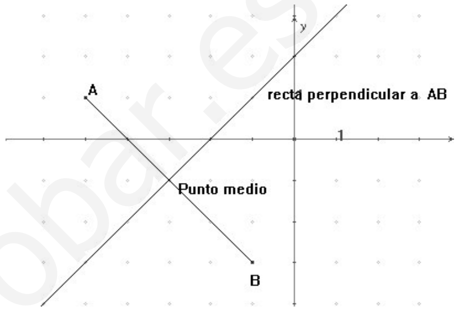
Lugar geométrico.- Es el conjunto de los puntos que verifican una determinada propiedad p.

Consideramos un determinado sistema de referencia cartesiano del plano. Diremos que la ecuación f(x,y)=0 es la ecuación de un cierto lugar geométrico si se verifica lo siguiente: un punto P(x,y) pertenece al lugar geométrico si y sólo si f(x,y)=0.

A continuación vamos a estudiar varios lugares geométricos: mediatriz de un segmento, bisectriz de un ángulo, circunferencia, elipse, parábola, hipérbola (todos ellos del plano).

Mediatriz de un segmento.-La mediatriz de un segmento AB es el lugar geométrico constituido por los puntos del plano que equidistan de los extremos A y B del segmento. Es decir P(x,y) pertenece a la mediatriz de AB si y sólo si $|\mathbf{PA}| = |\mathbf{PB}|$.

Si las coordenadas de los extremos del segmento son $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$. La mediatriz tendrá por ecuación: $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$



Operando se obtiene la siguiente ecuación de la mediatriz:

$\left((x_2-x_1)(x-\frac{x_1+x_2}{2})+(y_2-y_1)(y-\frac{y_2+y_1}{2})\right)=0$; que resulta ser la recta que es perpendicular al vector $\mathbf{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ y que pasa por el punto medio del segmento.

Bisectriz de un ángulo.- Sean r y s dos rectas, que se cortan, de ecuaciones:

$$\begin{cases} r: a_1x+b_1y+c_1=0 \\ s: a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$$

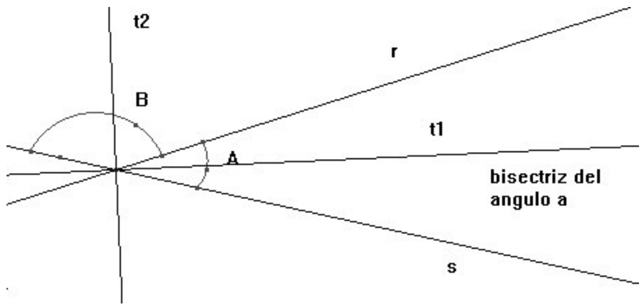
Estas dos rectas forman dos ángulos suplementarios. <u>El menor</u> de ellos suele denominarse ángulo de las rectas r y s. Se llaman bisectrices de las rectas r y s al lugar geométrico constituido por los puntos del plano que equidistan de las dos rectas. También se denomina dicho lugar geométrico bisectrices de los ángulos que forman las rectas r y s.

Evidentemente P(x,y) pertenecerá al citado lugar geométrico si y sólo si d(P, r) = d(P , s).

En coordenadas la anterior condición se escribirá:

$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{|a_2x+b_2y+c_2|}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}} \text{ lo que equivale a } \frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

Así el lugar geométrico considerado consta de dos rectas. Cada una de ellas se denomina bisectriz. Es inmediato probar que son perpendiculares entre sí. También es evidente que las citadas rectas dividen en dos ángulos iguales a los dos ángulos que forman las rectas dadas (bisecan). Si a los ángulos que determinan las rectas dadas los denominamos A y B, la bisectriz t1 biseca el ángulo A y la bisectriz t2 biseca el ángulo B entonces diremos que t1 es la bisectriz del ángulo A y que t2 es la bisectriz del ángulo B.



Cónicas.- A continuación vamos a estudiar la circunferencia, y definiremos la elipse, la parábola y la hipérbola. A las anteriores curvas se las denomina globalmente cónicas ya que todas ellas son lugares geométricos que se obtienen seccionando una superficie cónica de revolución por un plano que no pase por el vértice de la citada superficie de revolución.

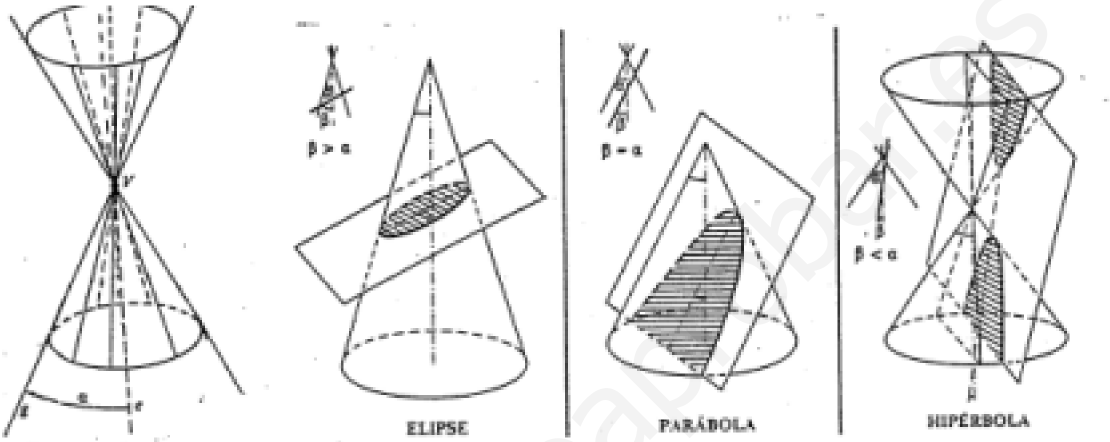
Recuerda que una superficie cónica de revolución es la engendrada por una recta g, denominada generatriz, al girar alrededor de otra recta e, denominada eje, que se corta con g. El punto V de intersección de g y e se denomina vértice de la superficie de revolución. Simbolizaremos con α el ángulo de las rectas g y e.

Sea β el ángulo que forma el plano de la sección con el eje del cono. Se verifica lo siguiente :

Si $\beta > \alpha$ la cónica es una elipse (en particular, para β=90º es una circunferencia).

Si $\beta = \alpha$ la cónica es una parábola.

Si $\beta < \alpha$ la cónica es una hipérbola.



Las cónicas se caracterizan también porque sus ecuaciones respecto de un sistema de referencia cartesiano en el plano son del tipo siguiente:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \quad (A, B, C, D, E, F \in R).$$

Según los valores de los coeficientes la cónica será de un determinado tipo.

El estudio que vamos a realizar a continuación no se va a basar en ninguno de los enfoques anteriores sino en otras propiedades de las cónicas. Cada una de ellas constituye un lugar geométrico caracterizado por lo ya expuesto o por unas propiedades equivalentes que iremos viendo a continuación. Evidentemente un desarrollo completo, que no realizaremos, exigiría probar la equivalencia de las propiedades que caracterizan a cada una de las cónicas.

Circunferencia.- Se llama circunferencia de centro C y radio r>0 al lugar geométrico constituido por los puntos P del plano cuya distancia al punto C es r. Los puntos que distan de C más de r se denominan exteriores a la circunferencia y los que distan de C menos de r se denominan interiores a la circunferencia.

Utilizando coordenadas del centro C(a,b) , P(x,y), la anterior propiedad puede expresarse así:

P $\in$ Circunferencia $\Leftrightarrow d(C,P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$ Por tanto la circunferencia posee la siguiente ecuación: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Realizando las operaciones indicadas llegamos a una expresión de la forma:

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, siendo coordenadas del centro (-A/2, -B/2) $r = \sqrt{(A/2)^2 + (B/2)^2 - C}$

Evidentemente si el centro es (0,0) la ecuación queda: $x^2 + y^2 = r^2$

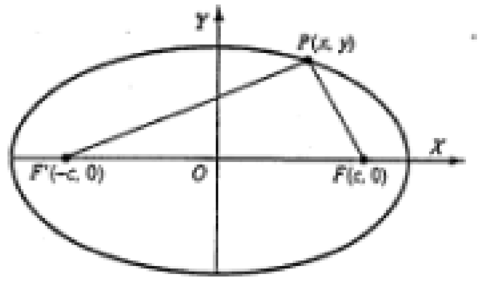
Una circunferencia queda determinada de diferentes maneras:

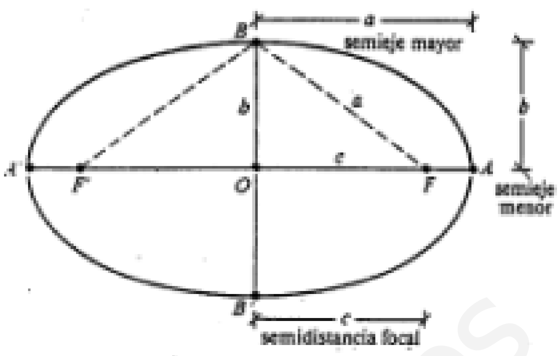
- por el centro y el radio,
- por tres puntos que pertenecen a ella,
- por el centro y un punto perteneciente a ella
- por dos puntos y el radio (en este caso puede haber dos soluciones, una o ninguna)
- por el centro y una recta tangente (un solo punto de corte, lo veremos más adelante),

Elipse.- Se llama elipse al lugar geométrico constituido por los puntos P del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Sean F y F' los puntos fijos y 2a la constante. Se verificará que:

P ∈ elipse determinada por (F ,F', 2a) ⇔ $|\mathbf{PF}| + |\mathbf{PF'}| = 2a$. Ecuación (1) .(Notación: $|\mathbf{MN}| = d(M,N)$)





La distancia FF' se denomina distancia focal y es igual a 2c. El punto medio del segmento **FF'** se denomina centro. Es el centro de simetría de la elipse. Se llama eje focal o eje mayor a la recta **FF'**. Esta recta corta a la elipse en los puntos A y A' . A la distancia AA' se la denomina longitud del eje mayor. Se verifica, por la simetría de la figura, que $|\mathbf{AA'}| = 2a$.

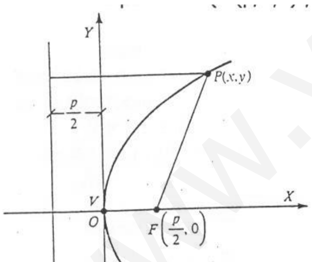
$2a = |\mathbf{AF}| + |\mathbf{AF'}| = |\mathbf{AF}| + |\mathbf{AF + FF'}| = |\mathbf{AF}| + |\mathbf{FF'}| + |\mathbf{FA'}| = |\mathbf{AA'}|$

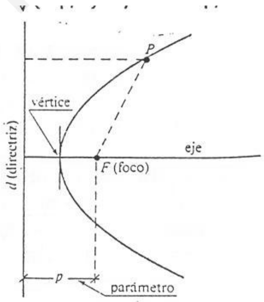
A la recta perpendicular a **FF'** por O se la llama eje menor. Este eje corta a la elipse en los puntos B y B'. A la distancia BB' se la denomina longitud del eje menor y se la suele simbolizar con 2b. Por la simetría de la figura es evidente que $a = |\mathbf{FB}| = |\mathbf{F'B}|$ Por tanto, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo FOB, resulta que: $a^2 = b^2 + c^2$ y operando la Ecuación (1) $\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$ llegamos a la **ecuación reducida** de la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Parábola.- Se llama parábola al lugar geométrico constituido por los puntos P del plano que equidistan de un punto, llamado foco y de una recta, denominada directriz.

Sea F el foco y d la directriz se verificará que:

P∈ parábola determinada por (F ,d) ⇔ d(P,F) = d(P,d). Ecuación (2)





Ecuación de la directriz
d≡ x+c = 0.

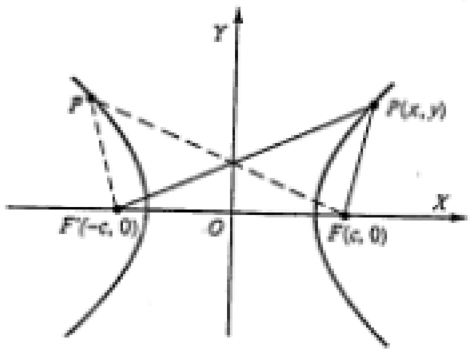
Se llama parámetro de la parábola a la distancia del foco a la directriz. Lo llamaremos p. A la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se la llama eje de la parábola y es eje de simetría de la misma. El punto del eje que pertenece a la parábola se llama vértice.

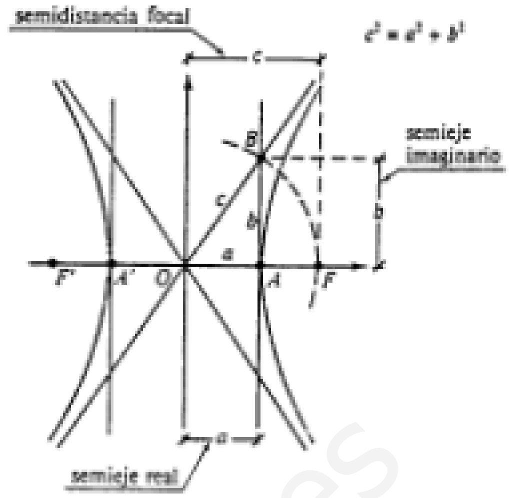
Operando la Ecuación (2) $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = |x+c|$ llegamos a $y^2 = 2px$ denominada **ecuación reducida** de la parábola en la que c = p/2.

Hipérbola .-Se llama hipérbola al lugar geométrico constituido por los puntos P del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Sean F y F' los dos puntos fijos y 2a la constante. Se verificará que:

P∈ hipérbola determinada por (F ,F',2a) ⇔ $|\mathbf{PF}| - |\mathbf{PF'}| = 2a$ .Ecuación (3) es decir $|d(P,F)| - |d(P,F')| = 2a$





La distancia FF´ se denomina distancia focal y es 2c. El punto medio del segmento **FF´** se denomina centro. Es el centro de simetría de la hipérbola. Se llama eje focal a la recta **FF'** y es eje de simetría de la hipérbola. Esta recta corta a la hipérbola en los puntos A y A', que se llaman vértices. Se verifica, por la simetría de la figura que $|\mathbf{AA´}| = 2a$.

$2a = |\mathbf{AF´}| - |\mathbf{AF}| = |\mathbf{AA´} + \mathbf{A´F'}| - |\mathbf{AF}| = |\mathbf{AA´}| + |\mathbf{A´F'}| - |\mathbf{AF}| = |\mathbf{AA´}|$

A la recta perpendicular a **FF'** por O se la llama eje secundario. Este eje no corta a la hipérbola y es eje de simetría de ésta.

El triángulo OAB es rectángulo en A y es d(O,A) = a y $|\mathbf{OB}| = c$. La longitud $|\mathbf{AB}|$ la denotaremos b, es decir $|\mathbf{AB}| = b$. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo OAB, se obtiene: $c^2 = a^2 + b^2$. y operando la Ecuación 3 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ llegamos a $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ que se denomina **ecuación reducida de la hipérbola.**

CÓNICAS

1.- Dados A(-2,3) B(5,6) , encuentra la ecuación de la mediatriz del segmento AB.

2.-Dadas las rectas r≡ 3x+4y-1=0 y s≡ 4x-3y+2=0 hallar: a) el ángulo que forman, b) ecuaciones de las bisectrices .

3.-Los lados AB, BC y AC de un triángulo están respectivamente, en las rectas $y=\frac{5}{6}x-\frac{4}{3}$; 2x+ 7y =22 y $\left.\begin{cases} x=2-t \\ y=3+7t \end{cases}\right\}$ Calcula : a) Las coordenadas de los vértices A, B y C. b) La ecuación de la mediatriz del lado AB. c) Ecuación de la bisectriz del ángulo B .

4.-Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: A(2,1), B(3,4), y C(-2,5).

5.-Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (6,0) y (0,4) y que tiene el centro en la recta x-y = 0.

6.-Halla la ecuación de la circunferencia de radio 6 u. que es concéntrica con la siguiente circunferencia: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 8 = 0$.

7.-Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene centro (1,4) y es tangente a la recta 3x+ 4y -4=0.

8.- Determinar el centro y el radio de la circunferencia que pasa por los puntos (0,0), (0,2) y (2,4).

9.- Hallar la posición relativa (exterior, tangente o secante) de la circunferencia de ecuación $x^2+ y^2=4$ y la recta 2x-y + a =0 según los valores de a.

10.-Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos A(-4,0), B(4,0) es 4. ¿Cómo se llama esta curva? ¿Está en forma reducida la ecuación obtenida?

11.-Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos A(-5,0), B(5,0) es 12. ¿Cómo se llama esta curva? ¿Está en forma reducida la ecuación obtenida?

12.- Halla los focos, vértices, y clasifica las siguientes cónicas:

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$; $x^2 -100 y^2 = 100$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$; $x^2+y^2-4x+6y=0$ $y^2 =5x$

Halla dos puntos de cada una.

13.-Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto (0,6) y del eje de abscisas. ¿Cómo se llama esta figura?

14.-Hallar, en función del parámetro positivo a, la posición relativa de la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + y^2 = a$ y la recta de ecuación y =x.

15.-Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje OX en el punto (4,0) y pasa por el punto (8/5,6/5), Hallar la ecuación de la otra tangente a esta circunferencia que pasa por el origen de coordenadas.

16.- Halla razonadamente la ecuación de los centros de las circunferencias que pasasn por los puntos (2,0) y (0,1).

17.- Halla razonadamente la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,2) y (0,-2) y es tangente a la recta y =3x+2-

18.- Halla razonadamente la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta x =-4 y del punto (3,0)

19.- Sea la cónica $y^2= 12x$. Indica sus elementos característicos. ¿ De qué cónica se trata? . Considera el conjunto de las rectas que pasan por el punto P(1,2) y tienen pendiente m. Estudia según los valores de m la posición relativa de r y la cónica..

20.-Sea la cónica $2x^2- y^2 +2= 0$ ¿De que cónica se trata? Indica sus elementos característicos, y halla la posición relativa de la cónica con la recta y = x+b.