

## 1 Fórmulas trigonométricas

### Página 131

1 Demuestra la fórmula II.2 a partir de la fórmula:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

2 Demuestra II.3 a partir de  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ .

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} \stackrel{(*)}{=} \frac{\operatorname{tg} \alpha + (-\operatorname{tg} \beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha (-\operatorname{tg} \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$(*) \text{ Como } \left. \begin{array}{l} \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \\ \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$$

3 Demuestra la fórmula II.3 a partir de las siguientes:

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \stackrel{(*)}{=} \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

(\*) Dividimos numerador y denominador por  $\cos \alpha \cos \beta$ .

4 Si  $\operatorname{sen} 12^\circ = 0,2$  y  $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$ , halla  $\cos 12^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 12^\circ$ ,  $\cos 37^\circ$  y  $\operatorname{tg} 37^\circ$ . Calcula, a partir de ellas, las razones trigonométricas de  $49^\circ$  y de  $25^\circ$ , usando las fórmulas (I) y (II).

•  $\operatorname{sen} 12^\circ = 0,2$

$$\cos 12^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 12^\circ} = \sqrt{1 - 0,04} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 12^\circ = \frac{0,2}{0,98} = 0,2$$

•  $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$

$$\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,36} = 0,8$$

$$\operatorname{tg} 37^\circ = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

•  $49^\circ = 12^\circ + 37^\circ$ , luego:

$$\operatorname{sen} 49^\circ = \operatorname{sen}(12^\circ + 37^\circ) = \operatorname{sen} 12^\circ \cos 37^\circ + \cos 12^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$$

$$\cos 49^\circ = \cos(12^\circ + 37^\circ) = \cos 12^\circ \cos 37^\circ - \operatorname{sen} 12^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$$

$$\operatorname{tg} 49^\circ = \operatorname{tg}(12^\circ + 37^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 12^\circ + \operatorname{tg} 37^\circ}{1 - \operatorname{tg} 12^\circ \operatorname{tg} 37^\circ} = \frac{0,2 + 0,75}{1 - 0,2 \cdot 0,75} = 1,12$$

(Podría calcularse  $\operatorname{tg} 49^\circ = \frac{\operatorname{sen} 49^\circ}{\cos 49^\circ}$ ).

•  $25^\circ = 37^\circ - 12^\circ$ , luego:

$$\operatorname{sen} 25^\circ = \operatorname{sen} (37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{sen} 37^\circ \cos 12^\circ - \cos 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,6 \cdot 0,98 - 0,8 \cdot 0,2 = 0,428$$

$$\operatorname{cos} 25^\circ = \operatorname{cos} (37^\circ - 12^\circ) = \operatorname{cos} 37^\circ \cos 12^\circ + \operatorname{sen} 37^\circ \operatorname{sen} 12^\circ = 0,8 \cdot 0,98 + 0,6 \cdot 0,2 = 0,904$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \operatorname{tg} (37^\circ - 12^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 37^\circ - \operatorname{tg} 12^\circ}{1 + \operatorname{tg} 37^\circ \operatorname{tg} 12^\circ} = \frac{0,75 - 0,2}{1 + 0,75 \cdot 0,2} = 0,478$$

**5 Demuestra esta igualdad:**

$$\frac{\operatorname{cos} (a + b) + \operatorname{cos} (a - b)}{\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)} = \frac{1}{\operatorname{tg} a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{cos} (a + b) + \operatorname{cos} (a - b)}{\operatorname{sen} (a + b) + \operatorname{sen} (a - b)} &= \frac{\operatorname{cos} a \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b + \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a \operatorname{cos} b + \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b - \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b} = \\ &= \frac{2 \operatorname{cos} a \operatorname{cos} b}{2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b} = \frac{\operatorname{cos} a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1}{\operatorname{tg} a} \end{aligned}$$

**6 Demuestra las fórmulas (III.1) y (III.3) haciendo  $\alpha = \beta$  en las fórmulas (I).**

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} (\alpha + \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

**7 Halla las razones trigonométricas de  $60^\circ$  usando las de  $30^\circ$ .**

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 30^\circ) = 2 \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{cos} 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 60^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 30^\circ) = \operatorname{cos}^2 30^\circ - \operatorname{sen}^2 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 30^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 3/9} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}}{2/3} = \sqrt{3}$$

**8 Halla las razones trigonométricas de  $90^\circ$  usando las de  $45^\circ$ .**

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen} (2 \cdot 45^\circ) = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{cos} 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\operatorname{cos} 90^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 45^\circ) = \operatorname{cos}^2 45^\circ - \operatorname{sen}^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{tg} (2 \cdot 45^\circ) = \frac{2 \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 45^\circ} = \frac{2 \cdot 1}{1 - 1} \rightarrow \text{No existe.}$$

**9 Demuestra que:**  $\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}$

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \operatorname{cos} \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \operatorname{cos} \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}$$

**Página 132**

**Hazlo tú.** Halla  $\operatorname{cos} 15^\circ$  y  $\operatorname{tg} 15^\circ$ .

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos} \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 30^\circ}{1 + \operatorname{cos} 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}$$

**10 Siguiendo las indicaciones que se dan, demuestra detalladamente las fórmulas IV.1, IV.2 y IV.3.**

- $\cos \alpha = \cos \left( 2 \cdot \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$

Por la igualdad fundamental:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \rightarrow 1 = \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$$

De aquí:

a) Sumando ambas igualdades:

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

b) Restando las igualdades ( $2.^a - 1.^a$ ):

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

- Por último:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

**11 Sabiendo que  $\cos 78^\circ = 0,2$ , calcula  $\operatorname{sen} 78^\circ$  y  $\operatorname{tg} 78^\circ$ . Averigua las razones trigonométricas de  $39^\circ$  aplicando las fórmulas del ángulo mitad.**

- $\cos 78^\circ = 0,2$

$$\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$$

$$\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{0,98}{0,2} = 4,9$$

- $\operatorname{sen} 39^\circ = \operatorname{sen} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{2}} = 0,63$

$$\cos 39^\circ = \cos \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 78^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 0,2}{2}} = 0,77$$

$$\operatorname{tg} 39^\circ = \operatorname{tg} \frac{78^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 78^\circ}{1 + \cos 78^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,2}{1 + 0,2}} = 0,82$$

**12 Halla las razones trigonométricas de  $30^\circ$  a partir de  $\cos 60^\circ = 0,5$ .**

- $\cos 60^\circ = 0,5$

- $\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen} \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{2}} = 0,5$

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 60^\circ}{2}} = 0,866$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg} \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 60^\circ}{1 + \cos 60^\circ}} = 0,577$$

**13 Halla las razones trigonométricas de  $45^\circ$  a partir de  $\cos 90^\circ = 0$ .**

- $\cos 90^\circ = 0$

- $\operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 90^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos 45^\circ = \cos \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 90^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 90^\circ}{1 + \cos 90^\circ}} = \sqrt{1} = 1$$

**14** Demuestra esta igualdad:  $2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{2} + \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} (1 - \cos \alpha) + \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right) = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \left( \frac{1 - \cos \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

**15** Demuestra la siguiente igualdad:

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{2 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \operatorname{sen} \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$$

**Página 133**

**16** Para demostrar las fórmulas (V.3) y (V.4), da los siguientes pasos:

- Expresa en función de  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\cos(\alpha + \beta) = \dots \qquad \cos(\alpha - \beta) = \dots$$

- Suma y resta como hemos hecho arriba y obtendrás dos expresiones.
- Sustituye en las expresiones anteriores:

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= A \\ \alpha - \beta &= B \end{aligned} \right\}$$

- $$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \end{aligned}$$

Sumando  $\rightarrow \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$  (1)

Restando  $\rightarrow \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$  (2)

- Llamando  $\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= A \\ \alpha - \beta &= B \end{aligned} \right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}, \beta = \frac{A-B}{2}$  (al resolver el sistema)

- Luego, sustituyendo en (1) y (2), se obtiene:

$$(1) \rightarrow \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \qquad (2) \rightarrow \cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

**17** Transforma en producto y calcula.

- a)  $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ$       b)  $\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ$       c)  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

a)  $\operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ = 2 \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b)  $\operatorname{sen} 75^\circ + \operatorname{sen} 15^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

c)  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**18** Expresa en forma de producto el numerador y el denominador de esta fracción y simplifica el resultado:

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 4a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 4a + \cos 2a} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{4a+2a}{2} \cos \frac{4a-2a}{2}}{2 \cos \frac{4a+2a}{2} \cos \frac{4a-2a}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen} 3a}{2 \cos 3a} = \operatorname{tg} 3a$$

## 2 Ecuaciones trigonométricas

### Página 134

**Hazlo tú.** Resuelve  $\text{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$ .

$$\text{sen}(\alpha + 30^\circ) = 2 \cos \alpha$$

$$\text{sen} \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \text{sen} 30^\circ = 2 \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \text{sen} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha = 2 \cos \alpha$$

Dividimos los dos miembros entre  $\cos \alpha$ :

$$\frac{1}{2} \text{tg} \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \rightarrow \text{tg} \alpha + \sqrt{3} = 4 \rightarrow \text{tg} \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} \alpha_1 = 66^\circ 12' 22'' \\ \alpha_2 = 246^\circ 12' 22'' \end{cases}$$

**Hazlo tú.** Resuelve  $\cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$ .

$$\cos \alpha = \text{sen} 2\alpha$$

$$\cos \alpha = 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha - 2 \text{sen} \alpha \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (1 - 2 \text{sen} \alpha) = 0$$

$$\text{Posibles soluciones: } \begin{cases} \cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ, \alpha_2 = 270^\circ \\ 1 - 2 \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ, \alpha_4 = 150^\circ \end{cases}$$

Al comprobarlas sobre la ecuación inicial, vemos que las cuatro soluciones son válidas.

### Página 135

**Hazlo tú.** Resuelve  $\text{sen} 3\alpha - \text{sen} \alpha = 0$ .

$$\text{sen} 3\alpha - \text{sen} \alpha = 0$$

$$2 \cos \frac{3\alpha + \alpha}{2} \text{sen} \frac{3\alpha - \alpha}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos 2\alpha \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \cos 2\alpha \text{sen} \alpha = 0$$

$$\text{Si } \cos 2\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ \\ 2\alpha = 270^\circ \rightarrow \alpha_2 = 135^\circ \\ 2\alpha = 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ \rightarrow \alpha_3 = 225^\circ \\ 2\alpha = 270^\circ + 360^\circ = 630^\circ \rightarrow \alpha_4 = 315^\circ \end{cases}$$

$$\text{Si } \text{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0^\circ, \alpha_6 = 180^\circ$$

**1 Resuelve.**

a)  $\text{tg} \alpha = -\sqrt{3}$

b)  $\text{sen} \alpha = \cos \alpha$

c)  $\text{sen}^2 \alpha = 1$

d)  $\text{sen} \alpha = \text{tg} \alpha$

a)  $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$  o bien  $x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$

Las dos soluciones quedan recogidas en:

$$x = 120^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{2\pi}{3} + k\pi \text{ rad} = x \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) Si } \text{sen} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \\ \text{Si } \text{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

d) En ese caso debe ocurrir que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{O bien } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k \pi \text{ rad} \\ \text{O bien } \operatorname{cos} x = 1 \rightarrow x = 2k \pi \text{ rad} \end{array} \right\} \rightarrow x = k \pi \text{ rad con } k \in \mathbb{Z}$$

**2 Resuelve estas ecuaciones:**

a)  $2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$

b)  $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0$

c)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0$

d)  $2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3$

a)  $\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow \alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 300^\circ \\ -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ \end{cases}$

Las tres soluciones son válidas (se comprueba en la ecuación inicial).

b)  $2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Si  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$

• Si  $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha_3 = -45^\circ = 315^\circ, \alpha_4 = 225^\circ$

Todas las soluciones son válidas.

c)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{tg} \alpha - 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_3 = 45^\circ, \alpha_4 = 225^\circ \end{cases}$

Todas las soluciones son válidas.

d)  $2 \operatorname{sen}^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \xrightarrow{(*)} 2(1 - \cos^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 3$

(\*) Como  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$2 - 2 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha = 3 \rightarrow 2 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 0$

$\cos \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

Entonces:

• Si  $\cos \alpha = 1 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$

• Si  $\cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_2 = 60^\circ, \alpha_3 = -60^\circ = 300^\circ$

Las tres soluciones son válidas.

**3 Transforma en producto  $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha$  y resuelve después la ecuación  $\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0$ .**

$\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{5\alpha+3\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{5\alpha-3\alpha}{2} = 0 \rightarrow 2 \cos \frac{8\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{2\alpha}{2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos 4\alpha \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos 4\alpha = 0 \\ \operatorname{sen} \alpha = 0 \end{cases}$

• Si  $\cos 4\alpha = 0 \rightarrow \begin{cases} 4\alpha = 90^\circ & \rightarrow \alpha_1 = 22^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ & \rightarrow \alpha_2 = 67^\circ 30' \\ 4\alpha = 90^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_3 = 112^\circ 30' \\ 4\alpha = 270^\circ + 360^\circ & \rightarrow \alpha_4 = 157^\circ 30' \end{cases}$

• Si  $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_5 = 0^\circ, \alpha_6 = 180^\circ$

Comprobamos que las seis soluciones son válidas.

**4 Resuelve.**

a)  $4 \cos 2\alpha + 3 \cos \alpha = 1$

b)  $\operatorname{tg} 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0$

c)  $\sqrt{2} \cos(\alpha/2) - \cos \alpha = 1$

d)  $2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - 6 \operatorname{sen}^3 \alpha = 0$

a)  $4 \cos 2\alpha + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$   
 $\rightarrow 4(\cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha)) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 4(2 \cos^2 \alpha - 1) + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow$   
 $\rightarrow 8 \cos^2 \alpha - 4 + 3 \cos \alpha = 1 \rightarrow 8 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha - 5 = 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow \cos \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+160}}{16} = \frac{-3 \pm 13}{16} = \begin{cases} 10/16 = 5/8 = 0,625 \\ -1 \end{cases}$

• Si  $\cos \alpha = 0,625 \rightarrow \alpha_1 = 51^\circ 19' 4,13''$ ,  $\alpha_2 = -51^\circ 19' 4,13''$

• Si  $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, las tres son válidas.

b)  $\operatorname{tg} 2\alpha + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + 2 \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} + \cos \alpha = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} + \cos \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow \cos \alpha (\operatorname{sen} \alpha + 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \rightarrow$

$\rightarrow \cos \alpha (1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ 1 + \operatorname{sen} \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \begin{cases} -1/2 \\ 1 \end{cases} \end{cases}$

• Si  $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si  $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 210^\circ$ ,  $\alpha_4 = 330^\circ = -30^\circ$

• Si  $\operatorname{sen} \alpha = 1 \rightarrow \alpha_5 = 90^\circ = \alpha_1$

Al comprobar las soluciones, vemos que todas ellas son válidas.

c)  $\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{2} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} - \cos \alpha = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \sqrt{1 + \cos \alpha} - \cos \alpha = 1 \rightarrow \sqrt{1 - \cos \alpha} = 1 + \cos \alpha \rightarrow$

$\rightarrow 1 + \cos \alpha = 1 + \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \rightarrow \cos^2 \alpha + \cos \alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha (\cos \alpha + 1) = 0$

• Si  $\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 270^\circ$

• Si  $\cos \alpha = -1 \rightarrow \alpha_3 = 180^\circ$

Al comprobar las soluciones, podemos ver que las únicas válidas son:  $\alpha_1 = 90^\circ$  y  $\alpha_3 = 180^\circ$

d)  $2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - 6 \operatorname{sen}^3 \alpha = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - 3 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha (1 - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha) = 0$

• Si  $\operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0^\circ$ ,  $\alpha_2 = 180^\circ$

• Si  $\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_3 = 30^\circ$ ,  $\alpha_4 = 150^\circ$ ,  $\alpha_5 = 210^\circ$ ,  $\alpha_6 = 330^\circ$

Comprobamos las soluciones y observamos que son válidas todas ellas.

**5 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:**

a)  $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{cos}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{cos} 180^\circ$

b)  $\operatorname{sen}(45^\circ - \alpha) + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$

a)  $\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{cos}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{cos} 180^\circ$

$$\operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} 180^\circ \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} 270^\circ \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{sen} \alpha - 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha - 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha = -1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 210^\circ, \alpha_2 = 330^\circ$$

b)  $\operatorname{sen}(45^\circ - \alpha) + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$

$$\operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha + \sqrt{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha = 0$$

Dividimos entre  $\operatorname{cos} \alpha$ :

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -1 \rightarrow \alpha_1 = 135^\circ, \alpha_2 = 315^\circ$$



## 3 Funciones trigonométricas

### Página 137

#### 1 ¿Verdadero o falso?

- a) El radián es una medida de longitud equivalente al radio.  
 b) Un radián es un ángulo algo menor que  $60^\circ$ .  
 c) Puesto que la longitud de la circunferencia es  $2\pi r$ , un ángulo completo ( $360^\circ$ ) tiene  $2\pi$  radianes.  
 d)  $180^\circ$  es algo menos de 3 radianes.  
 e) Un ángulo recto mide  $\pi/2$  radianes.
- a) Falso. El radián es una medida angular, no es una medida de longitud.  
 b) Verdadero, porque un radián tiene  $57^\circ 17' 45''$ .  
 c) Verdadero, porque cada radián abarca un arco de longitud  $r$ .  
 d) Falso.  $180^\circ$  es la mitad de un ángulo completo y equivale, por tanto, a  $\pi$  radianes, algo más de 3 radianes.  
 e) Verdadero. Un ángulo recto es la cuarta parte de un ángulo completo y tiene  $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  radianes.

#### 2 Pasa a radianes los siguientes ángulos:

- a)  $30^\circ$                                       b)  $72^\circ$                                       c)  $90^\circ$   
 d)  $127^\circ$                                       e)  $200^\circ$                                       f)  $300^\circ$

Expresa el resultado en función de  $\pi$  y luego en forma decimal. Por ejemplo:

$$30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 0,52 \text{ rad}$$

- a)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \approx 0,52 \text{ rad}$                                       b)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ rad} \approx 1,26 \text{ rad}$   
 c)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \approx 1,57 \text{ rad}$                                       d)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 127^\circ \approx 2,22 \text{ rad}$   
 e)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 200^\circ = \frac{10\pi}{9} \text{ rad} \approx 3,49 \text{ rad}$                                       f)  $\frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 300^\circ = \frac{5\pi}{3} \text{ rad} \approx 5,24 \text{ rad}$

#### 3 Pasa a grados los siguientes ángulos:

- a) 2 rad                                      b) 0,83 rad                                      c)  $\frac{\pi}{5}$  rad  
 d)  $\frac{5\pi}{6}$  rad                                      e) 3,5 rad                                      f)  $\pi$  rad

- a)  $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 2 = 114^\circ 35' 29,6''$   
 b)  $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 0,83 = 47^\circ 33' 19,8''$   
 c)  $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{5} = 36^\circ$   
 d)  $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150^\circ$   
 e)  $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 3,5 = 200^\circ 32' 6,8''$   
 f)  $\frac{360^\circ}{2\pi} \cdot \pi = 180^\circ$

**4** Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno y añade las razones trigonométricas (seno, coseno y tangente) de cada uno de los ángulos:

GRADOS	0°	30°		60°	90°		135°	150°	
RADIANES			$\frac{\pi}{4}$			$\frac{2}{3}\pi$			$\pi$

GRADOS	210°	225°		270°			330°	360°
RADIANES			$\frac{4}{3}\pi$		$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$		

La tabla completa está en la página 138 del libro de texto.

**Página 138**

**5** ¿Verdadero o falso?

- a) Las funciones trigonométricas son periódicas.
- b) Las funciones *sen* y *cos* tienen un periodo de  $2\pi$ .
- c) La función *tg x* tiene periodo  $\pi$ .
- d) La función *cos x* es como *sen x* desplazada  $\pi/2$  a la izquierda.

a) Verdadero. La forma de sus gráficas se repite a lo largo del eje horizontal, cada  $2\pi$  radianes.

b) Verdadero.

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x \\ \text{cos}(x + 2\pi) = \text{cos } x \end{array} \right\} \text{ porque } 2\pi \text{ radianes equivalen a una vuelta completa.}$$

c) Verdadero.

$$\text{tg}(x + \pi) = \text{tg } x$$

Podemos observarlo en la gráfica de la función *tg x* en la página 138 del libro de texto.

d) Verdadero. Se puede observar en las gráficas de la página 138 del libro de texto.

## Ejercicios y problemas resueltos

Página 139

### 1. Razones trigonométricas a partir de otras

**Hazlo tú.** Sabiendo que  $\operatorname{sen} 54^\circ = 0,81$  halla  $\operatorname{cos} 108^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 27^\circ$ ,  $\operatorname{sen} 24^\circ$ ,  $\operatorname{cos} 99^\circ$ .

$$\operatorname{sen}^2 54^\circ + \operatorname{cos}^2 54^\circ = 1 \rightarrow 0,81^2 + \operatorname{cos}^2 54^\circ = 1 \rightarrow \operatorname{cos} 54^\circ = \sqrt{1 - 0,81^2} = 0,59$$

$$\operatorname{cos} 108^\circ = \operatorname{cos} (2 \cdot 54^\circ) = \operatorname{cos}^2 54^\circ - \operatorname{sen}^2 54^\circ = 0,59^2 - 0,81^2 = -0,31$$

$$\operatorname{tg} 27^\circ = \operatorname{tg} \left( \frac{54^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} 54^\circ}{1 + \operatorname{cos} 54^\circ}} = \sqrt{\frac{1 - 0,59}{1 + 0,59}} = 0,51$$

$$\operatorname{sen} 24^\circ = \operatorname{sen} (54^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 54^\circ \operatorname{cos} 30^\circ - \operatorname{cos} 54^\circ \operatorname{sen} 30^\circ = 0,81 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0,59 \cdot \frac{1}{2} = 0,41$$

$$\operatorname{cos} 99^\circ = \operatorname{cos} (54^\circ + 45^\circ) = \operatorname{cos} 54^\circ \operatorname{cos} 45^\circ - \operatorname{sen} 54^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = 0,59 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,81 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,16$$

### 2. Identidades trigonométricas

**Hazlo tú.** Demuestra que  $\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha$ .

Aplicamos las fórmulas del ángulo doble y las relaciones fundamentales:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} (\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} (2 \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} (\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

### 3. Simplificación de expresiones trigonométricas

**Hazlo tú.** Simplifica la expresión  $\frac{2 \operatorname{cos} (45^\circ + \alpha) \operatorname{cos} (45^\circ - \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha}$ .

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{cos} (45^\circ + \alpha) \operatorname{cos} (45^\circ - \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha} &= \frac{2 (\operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha) (\operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \\ &= \frac{2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos} \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha \right)}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{(\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha) (\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha} = \frac{\operatorname{cos} 2\alpha}{\operatorname{cos} 2\alpha} = 1 \end{aligned}$$

**Página 140**

**4. Resolución de ecuaciones trigonométricas**

**Hazlo tú.** Resuelve estas ecuaciones:

a)  $\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x \cos^2 x = 0$

b)  $\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x = 2$

c)  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

d)  $\frac{\cos 4x + \cos 2x}{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x} = 1$

a) Extraemos factor común:  $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x) = 0$

Igualamos a cero cada factor:

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x - (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x = 1 = \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si  $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , entonces  $x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$

Si  $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , entonces  $x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

b) Pasamos  $\cos x$  al segundo miembro y elevamos al cuadrado después:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} \operatorname{sen} x)^2 &= (2 - \cos x)^2 \rightarrow 3\operatorname{sen}^2 x = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow 3(1 - \cos^2 x) = 4 - 4\cos x + \cos^2 x \rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

Comprobamos las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow \text{Vale.}$$

$$x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow \text{No vale.}$$

c) Utilizamos la fórmula de la tangente del ángulo mitad:

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right)^2 &= 1 - \cos x \rightarrow \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x \rightarrow 1 - \cos x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \cos x (1 - \cos x) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 270^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \cos x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases} \end{aligned}$$

d) Transformamos las sumas en productos:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos \frac{4x + 2x}{2} \cos \frac{4x - 2x}{2}}{2 \cos \frac{4x + 2x}{2} \operatorname{sen} \frac{4x - 2x}{2}} &= 1 \rightarrow \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow \\ &\rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

## Ejercicios y problemas guiados

Página 141

### 1. Razones trigonométricas de $(\alpha + \beta)$ ; $(\alpha - \beta)$ ; $2\alpha$ y $\frac{\alpha}{2}$

Si  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , y  $\operatorname{cos} \beta = -\frac{1}{4}$ ,  $180^\circ < \beta < 270^\circ$ , hallar:  $\operatorname{cos}(\alpha + \beta)$ ;  $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ ;  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{4}{5} \text{ porque el ángulo está en el segundo cuadrante.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{15}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} \beta = -\frac{\sqrt{15}}{4} \text{ porque el ángulo está en el tercer cuadrante.}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-\sqrt{15}/4}{-1/4} = \sqrt{15}$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{15} + 4}{20}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{-4\sqrt{15} - 3}{5}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \beta}{1 + \operatorname{cos} \beta}} = -\sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = -\sqrt{\frac{5}{3}} \text{ ya que el ángulo } \frac{\beta}{2} \text{ está en el segundo cuadrante.}$$

### 2. Identidades trigonométricas

**Demostrar que:**  $\operatorname{cos} 3x = 4 \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{cos} x$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos} 3x &= \operatorname{cos}(2x + x) = \operatorname{cos} 2x \operatorname{cos} x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = (\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x \operatorname{sen} x = \\ &= \operatorname{cos}^3 x - \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x = \operatorname{cos}^3 x - 3 \operatorname{sen}^2 x \operatorname{cos} x \end{aligned}$$

### 3. Expresiones algebraicas equivalentes

**Escribir la expresión  $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) \operatorname{cos}(\alpha - \beta)$  en función de  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{sen} \beta$ .**

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(\alpha + \beta) \operatorname{cos}(\alpha - \beta) &= (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) (\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) = \\ &= \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{cos}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{cos}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \operatorname{cos}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta = \\ &= \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta \end{aligned}$$

### 4. Simplificación de expresiones trigonométricas

**Simplificar esta expresión:**  $2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{tg} \alpha \left( \pm \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2}} \right)^2 - \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} \cdot \frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 + \operatorname{cos} \alpha) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

## 5. Ecuaciones trigonométricas

Resolver estas ecuaciones:

a)  $\cos^2(2x + 30^\circ) = \frac{1}{4}$       b)  $4 \operatorname{sen} x + 4 \cos^2 x \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x = 0$ , con  $\operatorname{tg} x \neq 0$

a)  $\cos(2x + 30^\circ) = \pm \frac{1}{2}$

$$\text{Si } \cos(2x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 60^\circ \rightarrow x = 15^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 60^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 195^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 300^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\text{Si } \cos(2x + 30^\circ) = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 2x + 30^\circ = 120^\circ \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ \rightarrow x = 105^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 120^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \\ 2x + 30^\circ = 240^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 285^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

b) Si  $\operatorname{tg} x = 0$  entonces  $x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$ ;  $x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$  son soluciones de la ecuación, ya que el seno de estos ángulos también es 0.

Si  $\operatorname{tg} x \neq 0$ , dividimos entre esta función en los dos términos de la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x} + 4 \cos^2 x + 1 = 0 &\rightarrow \frac{4 \operatorname{sen} x}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} + 4 \cos^2 x + 1 = 0 \rightarrow 4 \cos^2 x + 4 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

## 6. Resolución de sistemas de ecuaciones trigonométricas

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en el intervalo  $[0^\circ, 360^\circ]$ :

$$\begin{cases} \cos y - \operatorname{sen} x = 1 \\ 4 \operatorname{sen} x \cos y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\cos y = 1 + \operatorname{sen} x$$

$$4 \operatorname{sen} x (1 + \operatorname{sen} x) + 1 = 0 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-4 \pm 0}{8} = -\frac{1}{2}$$

• Si  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ , que es imposible.

• Si  $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; \begin{cases} x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; \begin{cases} x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}; \begin{cases} x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

## Ejercicios y problemas propuestos

Página 142

### Para practicar

#### Fórmulas trigonométricas

1 Sabiendo que  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$  y  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ , calcula sin hallar el valor de  $\alpha$ :

a)  $\operatorname{sen} 2\alpha$                       b)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$                       c)  $\operatorname{sen} (\alpha + 30^\circ)$

d)  $\cos (60^\circ - \alpha)$                 e)  $\cos \frac{\alpha}{2}$                       f)  $\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha)$

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{9}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{7}{16} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$  ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{7}/4}{-3/4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$

a)  $\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$

b)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)}} = \sqrt{7}$  ya que  $\frac{\alpha}{2}$  está comprendido entre  $45^\circ$  y  $90^\circ$  (está en el 1.º cuadrante).

c)  $\operatorname{sen} (\alpha + 30^\circ) = \operatorname{sen} \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{21} - 3}{8}$

d)  $\cos (60^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{\sqrt{21} + 3}{8}$

e)  $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$  porque  $\frac{\alpha}{2}$  está comprendido entre  $45^\circ$  y  $90^\circ$  (está en el 1.º cuadrante).

f)  $\operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)}{1 - 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)} = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$

2 Calcula las razones trigonométricas de  $22^\circ 30'$  a partir de las de  $45^\circ$ .

$\operatorname{sen} (22^\circ 30') = \operatorname{sen} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

$\cos (22^\circ 30') = \cos \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}/2}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

$\operatorname{tg} (22^\circ 30') = \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{1 + \sqrt{2}/2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}}$

3 Si  $\cos 78^\circ = 0,2$  y  $\operatorname{sen} 37^\circ = 0,6$  halla las razones trigonométricas de  $41^\circ$  y de  $115^\circ$ .

$41^\circ = 78^\circ - 37^\circ$

•  $\operatorname{sen} 78^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 78^\circ} = \sqrt{1 - 0,2^2} = 0,98$

•  $\cos 37^\circ = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 37^\circ} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$

Ahora ya podemos calcular:

- $\operatorname{sen} 41^\circ = \operatorname{sen}(78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \cos 37^\circ - \cos 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 - 0,2 \cdot 0,6 = 0,664$
- $\operatorname{cos} 41^\circ = \operatorname{cos}(78^\circ - 37^\circ) = \operatorname{cos} 78^\circ \cos 37^\circ + \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 + 0,98 \cdot 0,6 = 0,748$
- $\operatorname{tg} 41^\circ = \frac{\operatorname{sen} 41^\circ}{\operatorname{cos} 41^\circ} = \frac{0,664}{0,748} = 0,8877$
- $\operatorname{sen} 115^\circ = \operatorname{sen}(78^\circ + 37^\circ) = \operatorname{sen} 78^\circ \cos 37^\circ + \cos 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,98 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,6 = 0,904$
- $\operatorname{cos} 115^\circ = \operatorname{cos}(78^\circ + 37^\circ) = \operatorname{cos} 78^\circ \cos 37^\circ - \operatorname{sen} 78^\circ \operatorname{sen} 37^\circ = 0,2 \cdot 0,8 - 0,98 \cdot 0,6 = -0,428$
- $\operatorname{tg} 115^\circ = \frac{\operatorname{sen} 115^\circ}{\operatorname{cos} 115^\circ} = -\frac{0,904}{0,428} = -2,112$

**4 a) Halla el valor exacto de las razones trigonométricas de  $75^\circ$  a partir de las de  $30^\circ$  y  $45^\circ$ .**

**b) Utilizando los resultados del apartado anterior, calcula las razones trigonométricas de:  $105^\circ$ ;  $165^\circ$ ;  $15^\circ$ ;  $195^\circ$  y  $135^\circ$ .**

$$\text{a) } \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 75^\circ = \operatorname{cos}(30^\circ + 45^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ \cos 75^\circ + \cos 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 105^\circ = \operatorname{cos}(30^\circ + 75^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = -\sqrt{3} - 2$$

$$\operatorname{sen} 165^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ + 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ + \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 165^\circ = \operatorname{cos}(90^\circ + 75^\circ) = \operatorname{cos} 90^\circ \cos 75^\circ - \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 165^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \sqrt{3} - 2$$

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(90^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 90^\circ \cos 75^\circ - \cos 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos}(90^\circ - 75^\circ) = \operatorname{cos} 90^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 195^\circ = \operatorname{sen}(270^\circ - 75^\circ) = \operatorname{sen} 270^\circ \cos 75^\circ - \cos 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 195^\circ = \operatorname{cos}(270^\circ - 75^\circ) = \operatorname{cos} 270^\circ \cos 75^\circ + \operatorname{sen} 270^\circ \operatorname{sen} 75^\circ = -\operatorname{sen} 75^\circ = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 195^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}{\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{-\sqrt{2} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$



$$\operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} (180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 180^\circ \cos 45^\circ - \cos 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 135^\circ = \operatorname{cos} (180^\circ - 45^\circ) = \operatorname{cos} 180^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = -\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = -1$$

**5** Desarrolla, en función de las razones trigonométricas de  $\alpha$ , y simplifica las siguientes expresiones:

a)  $\operatorname{sen} (45^\circ + \alpha) - \operatorname{cos} (\alpha - 45^\circ)$

b)  $\frac{\operatorname{cos} 2\alpha}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha}$

c)  $(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha)^2 - 2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} 2\alpha$

d)  $\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha$

a)  $\operatorname{sen} (45^\circ + \alpha) - \operatorname{cos} (\alpha - 45^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos \alpha + \operatorname{cos} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha - (\operatorname{cos} \alpha \cos 45^\circ + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 45^\circ) =$   
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \alpha = 0$

b)  $\frac{\operatorname{cos} 2\alpha}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{(\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)(\operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha)}{\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha$

c)  $(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha)^2 - 2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha =$   
 $= 2(\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{sen} \alpha)$

d)  $\operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha = \left(\pm \sqrt{\frac{1+\operatorname{cos} \alpha}{2}}\right)^2 \cdot \left(\pm \sqrt{\frac{1-\operatorname{cos} \alpha}{2}}\right)^2 + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha =$   
 $= \frac{1+\operatorname{cos} \alpha}{2} \cdot \frac{1-\operatorname{cos} \alpha}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1-\operatorname{cos}^2 \alpha}{4} + \frac{\operatorname{cos}^2 \alpha}{4} = \frac{1}{4}$

**6** Sabiendo que  $\operatorname{cos} \alpha = \frac{-7}{25}$  ( $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ) y  $\operatorname{tg} \beta = \frac{4}{3}$  ( $180^\circ < \beta < 270^\circ$ ), calcula  $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

Usamos la relación  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$  para calcular  $\operatorname{sen} \alpha$ :

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{49}{625} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{576}{625} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{24}{25} \text{ porque el ángulo está en el 3.º cuadrante.}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = \frac{4}{3} \rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \operatorname{cos} \beta$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{16}{9} \operatorname{cos}^2 \beta + \operatorname{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{25}{9} \operatorname{cos}^2 \beta = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \beta = \frac{9}{25} \rightarrow \operatorname{cos} \beta = -\frac{3}{5} \text{ porque también pertenece al tercer cuadrante.}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Como  $360^\circ < \alpha + \beta < 540^\circ$ , dividiendo las desigualdades entre 2 tenemos que  $180^\circ < \frac{\alpha + \beta}{2} < 270^\circ$ .

Por tanto,  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  pertenece al tercer cuadrante y la tangente de  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  es positiva.

$$\operatorname{Calculamos} \operatorname{cos} (\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{-7}{25} \cdot \frac{-3}{5} - \frac{-24}{25} \cdot \frac{-4}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{Por tanto,} \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} (\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{cos} (\alpha + \beta)}} = \sqrt{\frac{1 - (-3/5)}{1 + (-3/5)}} = 2$$

**7** Si  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3$  y  $\alpha < 270^\circ$ , halla  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -3 \rightarrow \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}} = -3 \rightarrow \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha} = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \operatorname{cos} \alpha = 9 + 9 \operatorname{cos} \alpha \rightarrow 10 \operatorname{cos} \alpha = -8 \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-3/5}{-4/5} = \frac{3}{4}$$

**8** Si  $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{6}$  y  $\alpha < 90^\circ$ , halla  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cos} \alpha$  y  $\operatorname{tg} \alpha$ .

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \sqrt{6} \rightarrow 2 \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{6} - \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha \rightarrow \sqrt{6} \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{6} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2\sqrt{6}} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$$

Como  $\alpha$  está en el primer cuadrante, solo puede darse que  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}}{\sqrt{6}}$ .

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \operatorname{cos} \alpha$$

$$\left(\frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}}\right)^2 \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{8 - 2\sqrt{7}}{6} \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{7 - \sqrt{7}}{3} \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{3}{7 - \sqrt{7}} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7 - \sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{7} - 1}{2(7 - \sqrt{7})}}$$

**9** Expresa en función de  $\alpha$  y simplifica esta expresión:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha)$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{cos}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{sen} (90^\circ - \alpha) = \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{2} - \frac{1 + \operatorname{cos} \alpha}{2} + 2(\operatorname{sen} 90^\circ \operatorname{cos} \alpha - \operatorname{cos} 90^\circ \operatorname{sen} \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha + 2 \operatorname{cos} \alpha = \operatorname{cos} \alpha$$

**10** Transforma las siguientes sumas en productos:

a)  $\operatorname{sen} 65^\circ + \operatorname{sen} 35^\circ$

b)  $\operatorname{sen} 65^\circ - \operatorname{sen} 35^\circ$

c)  $\operatorname{cos} 48^\circ + \operatorname{cos} 32^\circ$

d)  $\operatorname{cos} 48^\circ - \operatorname{cos} 32^\circ$

e)  $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} 50^\circ$

f)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{cos} 75^\circ$

a)  $\operatorname{sen} 65^\circ + \operatorname{sen} 35^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{65^\circ + 35^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{65^\circ - 35^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 50^\circ \operatorname{cos} 15^\circ$

b)  $\operatorname{sen} 65^\circ - \operatorname{sen} 35^\circ = 2 \operatorname{cos} \frac{65^\circ + 35^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{65^\circ - 35^\circ}{2} = 2 \operatorname{cos} 50^\circ \operatorname{sen} 15^\circ$

c)  $\operatorname{cos} 48^\circ + \operatorname{cos} 32^\circ = 2 \operatorname{cos} \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = 2 \operatorname{cos} 40^\circ \operatorname{cos} 8^\circ$

d)  $\operatorname{cos} 48^\circ - \operatorname{cos} 32^\circ = -2 \operatorname{sen} \frac{48^\circ + 32^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{48^\circ - 32^\circ}{2} = -2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{sen} 8^\circ$

e)  $\frac{1}{2} + \operatorname{sen} 50^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ + \operatorname{sen} 50^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{30^\circ + 50^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{30^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{cos} (-10^\circ) = 2 \operatorname{sen} 40^\circ \operatorname{cos} 10^\circ$

f)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{cos} 75^\circ = \operatorname{cos} 45^\circ + \operatorname{cos} 75^\circ = 2 \operatorname{cos} \frac{45^\circ + 75^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{45^\circ - 75^\circ}{2} = 2 \operatorname{cos} 60^\circ \operatorname{cos} (-15^\circ) = 2 \operatorname{cos} 60^\circ \operatorname{cos} 15^\circ$

## ■ Identidades trigonométricas

**11** Demuestra las siguientes identidades teniendo en cuenta las relaciones fundamentales:

a)  $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

b)  $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha = \operatorname{sen} \alpha$

c)  $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$

d)  $\frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos 2\alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$

a)  $(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)^2 - (\operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - (\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) =$   
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha = 4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$

b)  $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha = \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \cdot 1 = \operatorname{sen} \alpha$

c)  $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$

d)  $\frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} \cdot \cos 2\alpha = \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \frac{\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha} (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) =$   
 $= (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha =$   
 $= 1 + 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 1 + \operatorname{sen} 2\alpha$

**12** Prueba que son verdaderas las identidades siguientes:

a)  $\cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x$

b)  $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

a)  $\cos(x + 60^\circ) - \cos(x + 120^\circ) = \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - (\cos x \cos 120^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ) =$   
 $= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cos 120^\circ + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 120^\circ =$   
 $= \cos x \cos 60^\circ - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ - \cos x \cdot (-\cos 60^\circ) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 60^\circ =$   
 $= 2 \cos x \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} \cos x = \cos x$

b)  $\operatorname{tg}(x + 45^\circ) - \operatorname{tg}(x - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} - \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{1 + \operatorname{tg} x} =$   
 $= \frac{1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - (-1 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \operatorname{tg} x)} = \frac{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

**13** Comprueba que se verifican las dos identidades siguientes:

a)  $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \cos \beta$

b)  $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

\* En b), divide numerador y denominador entre  $\cos \alpha \cos \beta$ .

a)  $\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) + \cos \alpha (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) =$   
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \cos^2 \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta =$   
 $= (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cos \beta = \cos \beta$

b)  $\frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$

**14** Demuestra.

a)  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$

b)  $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$

a)  $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha}$

b)  $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = 2 \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} - \operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{2} \frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

**15 Demuestra.**

a)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b)  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

a)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) =$   
 $= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta =$   
 $= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = (1 - \sin^2 \alpha) \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) =$   
 $= \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$

b)  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) =$   
 $= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \sin \beta + \cos \alpha \sin \beta \sin \alpha \cos \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta =$   
 $= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - (1 - \sin^2 \alpha) \sin^2 \beta =$   
 $= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

**16 Demuestra las siguientes igualdades:**

a)  $\frac{2 \sin \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$

b)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

c)  $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin \alpha$

d)  $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

e)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

a)  $\frac{2 \sin \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} =$   
 $= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$

b)  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{1 - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$

c)  $\sin 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) =$   
 $= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin^3 \alpha =$   
 $= \sin \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \sin \alpha$

d)  $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha)} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

e)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$

(\*)  $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \rightarrow -\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - 1$

**17 Comprueba, sin utilizar la calculadora, las siguientes igualdades.**

a)  $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b)  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

a)  $\sin 130^\circ + \sin 50^\circ = 2 \sin \frac{130^\circ + 50^\circ}{2} \cos \frac{130^\circ - 50^\circ}{2} = 2 \sin 90^\circ \cos 40^\circ = 2 \cos 40^\circ$

b)  $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \sin \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} = -2 \sin 45^\circ \sin 30^\circ = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Página 143

■ Ecuaciones trigonométricas

18 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$                       b)  $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$                       c)  $1 - 4 \operatorname{cos}^2 x = 0$                       d)  $3 \operatorname{tg} x + 4 = 0$

a)  $2 \operatorname{sen}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Si  $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 45^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = 225^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

Es decir, las soluciones son todos los ángulos del tipo  $x = 45^\circ + 90^\circ \cdot k$

b)  $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

• Si  $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 210^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 330^\circ + 360^\circ \cdot k$

c)  $1 - 4 \operatorname{cos}^2 x = 0 \rightarrow \operatorname{cos}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{cos} x = \pm \frac{1}{2}$

• Si  $\operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k$

d)  $3 \operatorname{tg} x + 4 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3} \rightarrow x = 126^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k; x = 306^\circ 52' 12'' + 360^\circ \cdot k$

19 Resuelve estas ecuaciones:

a)  $2 \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

b)  $\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$

c)  $2 \operatorname{cos}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{cos} x = 0$

a)  $2 \operatorname{cos}^2 x - \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + 1}_{\operatorname{cos}^2 x} = 0 \left. \vphantom{2 \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0} \right\} \rightarrow 2 \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{cos}^2 x = 0$

$\operatorname{cos}^2 = 0 \rightarrow \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$

Al comprobarlas en la ecuación inicial, las dos soluciones son válidas. Luego:

$\begin{cases} x_1 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 = 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Lo que podemos expresar como:

$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

b)  $\operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x_3 = 90^\circ \end{cases}$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que las tres son válidas. Luego:

$\begin{cases} x_1 = k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 = 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 = 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

O, de otra forma:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k\pi = k \cdot 180^\circ \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

( $x_1$  así incluye las soluciones  $x_1$  y  $x_2$  anteriores)

$$c) \cos x (2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

NOTA: Obsérvese que las dos primeras soluciones podrían escribirse como una sola de la siguiente forma:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

## 20 Resuelve.

a)  $\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 1$       b)  $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 0$       c)  $2 \cos^2 x + \text{sen} x = 1$       d)  $3 \text{tg}^2 x - \sqrt{3} \text{tg} x = 0$

$$a) (1 - \cos^2 x) - \cos^2 x = 1 \rightarrow 1 - 2 \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) (1 - \text{sen}^2 x) - \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow 1 - 2 \text{sen}^2 x = 0 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• Si  $\text{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_1 = 45^\circ, x_2 = 135^\circ$

• Si  $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x_3 = 225^\circ, x_4 = 315^\circ$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_2 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_3 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x &= 1 \rightarrow 2 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 210^\circ, x_3 = 330^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las tres soluciones son válidas, es decir:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} x (3 \operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 210^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las posibles soluciones en la ecuación inicial y vemos que las cuatro son válidas. Entonces:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Lo que podría expresarse con solo dos soluciones que englobaran las cuatro anteriores:

$$x_1 = k \cdot 180^\circ = k\pi \text{ y } x_2 = 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

### 21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} - x \right) + \operatorname{cos} \left( \frac{\pi}{3} - x \right) = \frac{1}{2}$

b)  $\operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 0$

c)  $\operatorname{cos} 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$

d)  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) - \sqrt{2} \operatorname{sen} x = 0$

a)  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{cos} x - \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} \operatorname{cos} x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \operatorname{cos} x - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{cos} x + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \operatorname{cos} x + \frac{1}{2} \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{cos} x = \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = \pi/3 \\ x_2 = 5\pi/3 \end{cases}$$

Comprobamos y vemos que:

$$x_1 \rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{cos} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{6} \right) + \operatorname{cos} 0 = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 \rightarrow \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{3} \right) + \operatorname{cos} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) = \operatorname{sen} \left( -\frac{3\pi}{2} \right) + \operatorname{cos} \left( -\frac{4\pi}{3} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Son válidas las dos soluciones. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi = 60^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi = 300^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

b)  $2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{cos}^2 x = 0 \rightarrow 2 \operatorname{cos} x (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{cos} x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \operatorname{sen} x = \operatorname{cos} x \rightarrow x_3 = 45^\circ, x_4 = 225^\circ \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones. Todas son válidas.

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

También podríamos expresarlas como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x + 1 &= 0 \rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0 \rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \sin x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 1/2 \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\sin x| \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Comprobamos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sin \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sqrt{2} \sin x &= 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \sqrt{2} \sin x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x &= 0 \rightarrow \cos x - \sin x = 0 \rightarrow \cos x = \sin x \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4} \end{aligned}$$

Al comprobar, podemos ver que ambas soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi = 45^\circ + k \cdot 360^\circ \\ x_2 &= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi = 225^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Podemos agrupar las dos soluciones en:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$  con  $k \in \mathbb{Z}$

## 22 Resuelve.

a)  $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} = 0$

b)  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 = \cos x$

c)  $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

d)  $4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \cos^2 x - 2 = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1+\cos x}{2} + \cos x - \frac{1}{2} &= 0 \rightarrow 1 + \cos x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 3 \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 0 \begin{cases} x_1 = 90^\circ \\ x_2 = 270^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las dos soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones:  $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + 1 &= \cos x \rightarrow 1 - \cos x + 1 + \cos x = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \\
 &\rightarrow 2 = \cos x + \cos^2 x \rightarrow \cos^2 x + \cos x - 2 = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ -2 \rightarrow \text{¡Imposible, pues } |\cos x| \leq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Luego:  $x = k \cdot 360^\circ = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 2 \cdot \frac{1-\cos x}{2} + \cos^2 x - \sin^2 x &= 0 \rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - \cos x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 0 \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, x_2 = 270^\circ \\ \cos x = 1/2 \rightarrow x_3 = 60^\circ, x_4 = 300^\circ \end{cases}
 \end{aligned}$$

Se comprueba que son válidas todas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_4 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando las soluciones quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 60^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 300^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 4(1 - \cos^2 x)\cos^2 x + 2\cos^2 x - 2 &= 0 \rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos^4 x + 2\cos^2 x - 2 = 0 \rightarrow \\
 &\rightarrow 4\cos^4 x - 6\cos^2 x + 2 = 0 \rightarrow 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Sea } \cos^2 x = z \rightarrow \cos^4 x = z^2$$

Así:

$$2z^2 - 3z + 1 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} z_1 = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1 \begin{cases} x_1 = 0^\circ \\ x_2 = 180^\circ \end{cases} \\ z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{cases} x_3 = 45^\circ, x_4 = 315^\circ \\ x_5 = 135^\circ, x_6 = 225^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Comprobando las posibles soluciones, vemos que todas son válidas. Por tanto:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 45^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x_4 &= 315^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ x_5 &= 135^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ x_6 &= 225^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, agrupando las soluciones:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k \pi \\ x_2 &= 45^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

**23** Transforma estas ecuaciones en otras equivalentes cuya incógnita sea  $\operatorname{tg} x$  y resuélvelas:

a)  $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$

b)  $\operatorname{sen}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x \cos x + 3 \cos^2 x = 0$

c)  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x = 0$

a) Dividimos toda la ecuación entre  $\cos x$ :

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$$

b) Dividimos toda la ecuación entre  $\cos^2 x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2\sqrt{3} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} &= 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 3 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2\sqrt{3} \pm 0}{2} = \sqrt{3} \rightarrow x = 60^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{aligned}$$

c) Dividimos toda la ecuación entre  $\cos^2 x$ :

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x} = 0 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}$$

• Si  $\operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\operatorname{tg} x = -1 \rightarrow x = 135^\circ + 360^\circ \cdot k; x = 315^\circ + 360^\circ \cdot k$

**24** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\sqrt{3} \cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) + \cos (x - \pi) = 2$

b)  $\cos \left( \frac{5\pi}{6} - x \right) + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0$

c)  $\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = 1$

d)  $\cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) - \sqrt{3} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} - x \right) = 1$

a)  $\sqrt{3} \left( \cos \frac{3\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} \operatorname{sen} x \right) + \cos x \cos \pi + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \pi = 2 \rightarrow$

$$\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - \cos x = 2 \rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 2 = \cos x$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = \cos^2 x \rightarrow 3 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 4 = 1 - \operatorname{sen}^2 x \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x - 4\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 3 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4\sqrt{3} \pm 0}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

$$x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{3} - \pi \right) = 1 \neq 2 \text{ No vale.}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \sqrt{3} \cdot \cos \left( \frac{3\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \frac{2\pi}{3} - \pi \right) = 2 \text{ Vale.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \frac{5\pi}{6} \cos x + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 &\rightarrow -\frac{\sqrt{3} \cos x}{2} + \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3}{2} \operatorname{sen} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cos x \end{aligned}$$

Dividimos los dos miembros entre  $\cos x$ :

$$\frac{3}{2} \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{2} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k; x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \cdot k$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos x + \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} x = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \operatorname{sen} x + \cos x - \operatorname{sen} x) = 1 &\rightarrow 2 \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \\ \rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} &\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot k; x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi \cdot k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x - \sqrt{3} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x \right) = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{\cos x}{2} + \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} x}{2} - \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3} \cos x}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{2} \right) = 1 &\rightarrow \\ \rightarrow \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x - 3 \cos x + \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow \\ \rightarrow -2 \cos x + 2\sqrt{3} \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 1 + \cos x \end{aligned}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad:

$$\begin{aligned} 3 \operatorname{sen}^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x &\rightarrow 3 - 3 \cos^2 x = 1 + 2 \cos x + \cos^2 x \rightarrow \\ &\rightarrow 4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 0 \rightarrow 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

• Si  $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \cdot k$

• Si  $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot k$

Ahora debemos comprobar las soluciones porque pueden aparecer falsas soluciones al elevar al cuadrado.

• Si  $x = \frac{\pi}{3} \rightarrow \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \right) = 1$  Vale.

• Si  $x = \frac{5\pi}{3} \rightarrow \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{3} \right) = -2 \neq 1$  No vale.

• Si  $x = \pi \rightarrow \cos \left( \frac{\pi}{3} - \pi \right) - \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} - \pi \right) = 1$  Vale.

### 25 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2$

b)  $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$

c)  $\cos x \cos 2x + 2 \cos^2 x = 0$

d)  $2 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} 2x$

e)  $\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

f)  $\operatorname{sen} 2x \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$

g)  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) + \operatorname{tg} x = 1$

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 &\rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ \\ 1/2 \rightarrow x_2 = 30^\circ, x_3 = 150^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Las tres soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$b) \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg}^2 x \rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ, & x_2 = 210^\circ \\ x_3 = 150^\circ, & x_4 = 330^\circ \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 &= 210^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_4 &= 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupando:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x_2 &= 150^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$c) \cos x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 \cos^3 x - \cos x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x (2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ, & x_2 = 270^\circ \\ \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{cases} \begin{cases} \approx -1,366 \rightarrow \text{¡Imposible!}, \text{ pues } |\cos x| \leq 1 \\ \approx 0,366 \rightarrow x_3 = 68^\circ 31' 51,1'', & x_4 = 291^\circ 28' 8,9'' \end{cases}$$

Las soluciones son todas válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x_2 &= 270^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x_3 &= 68^\circ 31' 51,5'' + k \cdot 360^\circ \approx 0,38\pi + 2k\pi \\ x_4 &= 291^\circ 28' 8,9'' + k \cdot 360^\circ \approx 1,62\pi + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Agrupadas, serían:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x_2 &= 68^\circ 31' 51,1'' + k \cdot 360^\circ \approx 0,38\pi + 2k\pi \\ x_3 &= 291^\circ 28' 8,9'' + k \cdot 360^\circ \approx 1,62\pi + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$d) 2 \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{tg}^2 x = 2 \operatorname{tg} x \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x \cos x \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{sen} x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (\cos^2 x - 1 + \cos^2 x - \cos x) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, & x_2 = 180^\circ \\ 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_3 = 0^\circ = x_1 \\ -1/2 \rightarrow x_4 = 240^\circ, & x_5 = 120^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Las cuatro soluciones son válidas. Luego:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_4 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ x_5 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

Que, agrupando soluciones, quedaría:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \sqrt{3} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} + \cos x - 1 &= 0 \rightarrow \frac{3-3\cos x}{2} = (1-\cos x)^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 3-3\cos x = 2(1+\cos^2 x - 2\cos x) \rightarrow 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \rightarrow x_1 = 0^\circ \\ -1/2 \rightarrow x_2 = 120^\circ, x_3 = 240^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Al comprobar, vemos que las tres soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 120^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ x_3 &= 240^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x &= 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen}^3 x = 6 \operatorname{sen}^3 x \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ \\ x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ \end{cases}$$

Comprobamos que todas las soluciones son válidas.

Damos las soluciones agrupando las dos primeras por un lado y el resto por otro:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 90^\circ = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}(\pi/4) \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x &= 1 \rightarrow \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = 1 \rightarrow 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg} x \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 3) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{tg} x = 3 \rightarrow x_3 = 71^\circ 33' 54,2'', x_4 = 251^\circ 33' 54,2'' \end{cases} \end{aligned}$$

Las cuatro soluciones son válidas:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 360^\circ = 2k\pi \\ x_2 &= 180^\circ + k \cdot 360^\circ = \pi + 2k\pi \\ x_3 &= 71^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{2\pi}{5} + 2k\pi \\ x_4 &= 251^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 360^\circ \approx \frac{7\pi}{5} + 2k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

O, lo que es lo mismo:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k\pi \\ x_2 &= 71^\circ 33' 54,2'' + k \cdot 180^\circ \approx \frac{2\pi}{5} + k\pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

## ■ Ángulos en radianes

**26** Expresa en grados los siguientes ángulos dados en radianes:

$$\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{3}; \frac{4\pi}{9}; \frac{3\pi}{5}; 1,5; 3,2$$

$$\frac{5\pi}{6} \text{ rad} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$$

$$\frac{7\pi}{3} \text{ rad} = \frac{7 \cdot 180^\circ}{3} = 420^\circ$$

$$\frac{4\pi}{9} \text{ rad} = \frac{4 \cdot 180^\circ}{9} = 80^\circ$$

$$\frac{3\pi}{5} \text{ rad} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$1,5 \text{ rad} = \frac{1,5 \cdot 180^\circ}{\pi} = 85^\circ 56' 37''$$

$$3,2 \text{ rad} = \frac{3,2 \cdot 180^\circ}{\pi} = 183^\circ 20' 47''$$

**27** Pasa a radianes los siguientes ángulos. Exprésalos en función de  $\pi$ :

$$135^\circ; 210^\circ; 108^\circ; 72^\circ; 126^\circ; 480^\circ$$

$$135^\circ = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$210^\circ = \frac{210 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$108^\circ = \frac{108 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{5} \text{ rad}$$

$$72^\circ = \frac{72 \cdot \pi}{180} = \frac{2\pi}{5} \text{ rad}$$

$$126^\circ = \frac{126 \cdot \pi}{180} = \frac{7\pi}{10} \text{ rad}$$

$$480^\circ = \frac{480 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{3} \text{ rad}$$

**28** Prueba que:

$$\text{a) } 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cos} \pi = 2$$

$$\text{b) } 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 3$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cos} \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{a) } 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cos} \pi = 4 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$\text{b) } 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 2 = 3$$

$$\text{c) } \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{cos} \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

**29** Halla el valor exacto de cada una de estas expresiones sin utilizar la calculadora:

a)  $5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi$

b)  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \pi$

c)  $\cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$

d)  $\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$

Comprueba los resultados con calculadora.

a)  $5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$

b)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$

c)  $\frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d)  $\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$

**30** Halla las razones trigonométricas de los siguientes ángulos e indica, sin pasar a grados, en qué cuadrante está cada uno:

a) 0,8 rad

b) 3,2 rad

c) 2 rad

d) 4,5 rad

e)  $\pi/8$  rad

f)  $7\pi/4$  rad

g)  $3\pi/5$  rad

h)  $1,2\pi$  rad

\* Ten en cuenta que:  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ ;  $\pi \approx 3,14$ ;  $\frac{3\pi}{2} \approx 4,7$ ;  $2\pi \approx 6,28$ .

Para saber en qué cuadrante está cada uno, podemos usar también los signos de las razones trigonométricas.

a)  $\operatorname{sen} 0,8 = 0,72$

$\cos 0,8 = 0,50$

$\operatorname{tg} 0,8 = 1,03 \rightarrow$  Cuadrante I

b)  $\operatorname{sen} 3,2 = -0,06$

$\cos 3,2 = -1$

$\operatorname{tg} 3,2 = 0,06 \rightarrow$  Cuadrante III

c)  $\operatorname{sen} 2 = 0,91$

$\cos 2 = -0,42$

$\operatorname{tg} 2 = -2,19 \rightarrow$  Cuadrante II

d)  $\operatorname{sen} 4,5 = -0,98$

$\cos 4,5 = -0,21$

$\operatorname{tg} 4,5 = 4,64 \rightarrow$  Cuadrante III

e)  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = 0,38$

$\cos \frac{\pi}{8} = 0,92$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0,41 \rightarrow$  Cuadrante I

f)  $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = -0,71$

$\cos \frac{7\pi}{4} = 0,71$

$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{4} = -1 \rightarrow$  Cuadrante IV

g)  $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{5} = 0,95$

$\cos \frac{3\pi}{5} = -0,31$

$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} = -3,08 \rightarrow$  Cuadrante II

h)  $\operatorname{sen} 1,2\pi = -0,59$

$\cos 1,2\pi = -0,81$

$\operatorname{tg} 1,2\pi = 0,73 \rightarrow$  Cuadrante III

**31** En cada caso halla, en radianes, dos valores para el ángulo  $\alpha$  tales que:

a)  $\operatorname{sen} \alpha = 0,32$

b)  $\cos \alpha = 0,58$

c)  $\operatorname{tg} \alpha = -1,5$

d)  $\operatorname{sen} \alpha = -0,63$

a)  $\alpha_1 = 0,33$ ;  $\alpha_2 = 2,82$

b)  $\alpha_1 = 0,95$ ;  $\alpha_2 = 5,33$

c)  $\alpha_1 = -0,98$ ;  $\alpha_2 = 2,16$

d)  $\alpha_1 = -0,68$ ;  $\alpha_2 = 3,82$

## Para resolver

### 32 Representa las siguientes funciones trigonométricas:

a)  $y = -\text{sen } x$

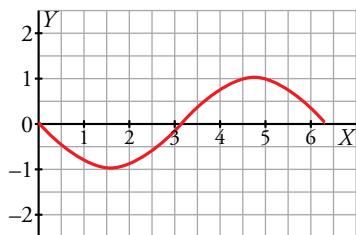
b)  $y = 1 + \text{sen } x$

c)  $y = -\text{cos } x$

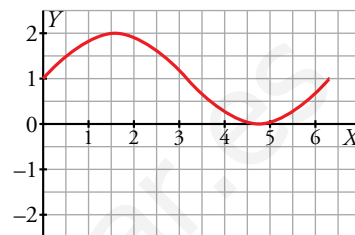
d)  $y = 1 + \text{cos } x$

Todas estas funciones son periódicas, de período  $2\pi$ . Están representadas en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . A partir de aquí, se repite.

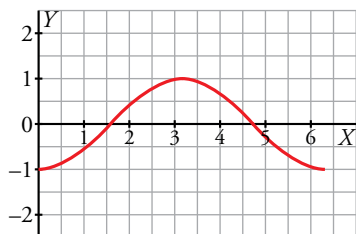
a)  $y = -\text{sen } x$



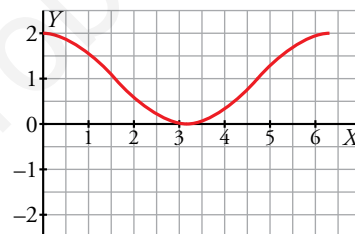
b)  $y = 1 + \text{sen } x$



c)  $y = -\text{cos } x$



d)  $y = 1 + \text{cos } x$



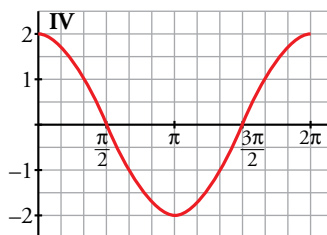
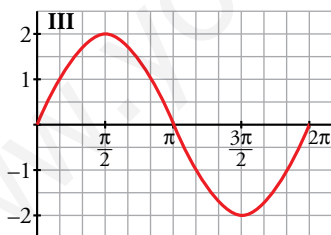
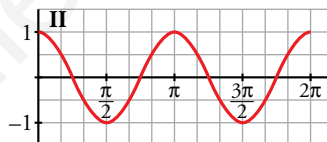
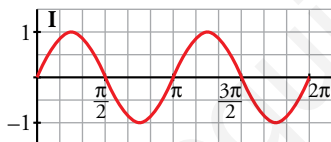
### 33 Asocia a cada una de las siguientes funciones la gráfica que le corresponde:

a)  $y = 2 \text{sen } x$

b)  $y = \text{cos } 2x$

c)  $y = 2 \text{cos } x$

d)  $y = \text{sen } 2x$



a) Gráfica III.

b) Gráfica II.

c) Gráfica IV.

d) Gráfica I.

### 34 Halla los puntos de corte de las funciones $y = \text{sen } x$ e $y = \text{tg } x$ .

Los puntos de corte serán aquellos cuyas abscisas cumplan  $\text{sen } x = \text{tg } x$ .

Resolvemos la ecuación:

$$\text{sen } x - \text{tg } x = 0 \rightarrow \text{sen } x - \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = 0 \rightarrow \text{sen } x \left(1 - \frac{1}{\text{cos } x}\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 1 - \frac{1}{\text{cos } x} = 0 \end{cases}$$

• Si  $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k; x = \pi + 2\pi \cdot k$

• Si  $1 - \frac{1}{\text{cos } x} = 0 \rightarrow \text{cos } x = 1 \rightarrow x = 0 + 2\pi \cdot k$

En resumen,  $x = \pi \cdot k$

En todos ellos tanto el seno como la tangente valen 0. Por tanto, los puntos de corte de las funciones son de la forma  $(\pi \cdot k, 0)$ .

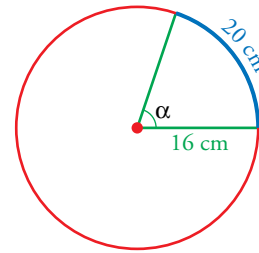


- 35** En una circunferencia de 16 cm de radio, un arco mide 20 cm. Halla el ángulo central que corresponde a ese arco en grados y en radianes.

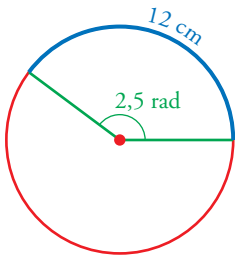
Como la circunferencia completa (100,53 cm) son  $2\pi$  rad, entonces:

$$\frac{100,53}{20} = \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \alpha = \frac{20 \cdot 2\pi}{100,53} = 1,25 \text{ rad}$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot 1,25 = 71^\circ 37' 11''$$



- 36** En una determinada circunferencia, a un arco de 12 cm de longitud le corresponde un ángulo de 2,5 radianes. ¿Cuál es el radio de esa circunferencia?



$$\frac{2,5 \text{ rad}}{1 \text{ rad}} = \frac{12 \text{ cm}}{R \text{ cm}} \rightarrow R = \frac{12}{2,5} = 4,8 \text{ cm}$$

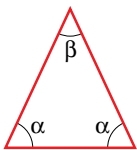
- 37** Halla, en radianes, el ángulo comprendido entre 0 y  $2\pi$  tal que sus razones trigonométricas coincidan con las de  $\frac{19\pi}{5}$ .

Como  $\frac{19}{5} = 3,8$ , el ángulo  $\alpha$  dado verifica  $2\pi < \alpha < 4\pi$ , luego tiene más de una vuelta completa y menos de dos vueltas.

Si le restamos una vuelta ( $2\pi$ ) obtendremos el ángulo que nos piden.

Tiene las mismas razones trigonométricas que el ángulo  $\frac{19\pi}{5} - 2\pi = \frac{9\pi}{5}$  y  $0 < \frac{9\pi}{5} \text{ rad} < 2\pi$ .

- 38** Si en este triángulo isósceles sabemos que  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ , calcula, sin hallar el ángulo  $\alpha$ , el valor de  $\cos \beta$ .



Para calcular  $\cos \beta$  necesitamos averiguar primero el valor de  $\sin \alpha$ :

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{8} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{7}{8} \rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{7}{8}} \text{ ya que es un ángulo agudo.}$$

$$\cos \beta = \cos (180^\circ - 2\alpha) = \cos 180^\circ \cos 2\alpha + \sin 180^\circ \sin 2\alpha = -\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -\left(\frac{1}{8} - \frac{7}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

- 39** En un triángulo  $ABC$  conocemos  $\hat{B} = 45^\circ$  y  $\cos \hat{A} = -\frac{1}{5}$ . Calcula, sin hallar los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$ , las razones trigonométricas del ángulo  $\hat{C}$ .

Calculamos primero las razones trigonométricas de  $\hat{A}$  y de  $\hat{B}$ .

$$\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A} = 1 \rightarrow \sin^2 \hat{A} + \frac{1}{25} = 1 \rightarrow \sin^2 \hat{A} = \frac{24}{25} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ ya que } \hat{A} < 180^\circ.$$

$$\sin \hat{B} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \hat{B} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \hat{C} = \sin (180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})) = \sin 180^\circ \cos (\hat{A} + \hat{B}) - \cos 180^\circ \sin (\hat{A} + \hat{B}) = \sin (\hat{A} + \hat{B}) =$$

$$= \sin \hat{A} \cos \hat{B} + \cos \hat{A} \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}$$

$$\begin{aligned} \cos \widehat{C} &= \cos (180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})) = \cos 180^\circ \cos (\widehat{A} + \widehat{B}) + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} (\widehat{A} + \widehat{B}) = -\cos (\widehat{A} + \widehat{B}) = \\ &= -(\cos \widehat{A} \cos \widehat{B} - \operatorname{sen} \widehat{A} \operatorname{sen} \widehat{B}) = -\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{24}}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{\operatorname{sen} \widehat{C}}{\cos \widehat{C}} = \frac{\frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{10}}{\frac{4\sqrt{3} + \sqrt{2}}{10}} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{25 - 4\sqrt{6}}{23}$$

**40** Si  $\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$  y  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ , calcula  $\operatorname{sen} \alpha$  y  $\cos \alpha$ , sin hallar el ángulo  $\alpha$ .

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} &\rightarrow \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow 2\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \\ &\rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{6}} \text{ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{3 - \sqrt{3}}{6}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} \text{ ya que el ángulo está en el cuarto cuadrante.}$$

**41** Demuestra estas igualdades:

a)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha$       b)  $\operatorname{sen} 4\alpha = 2 \operatorname{sen} 2\alpha (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha)$       c)  $\cos 4\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{2 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} 4\alpha &= \operatorname{sen} (2 \cdot 2\alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \operatorname{sen} 2\alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \\ &= 2 \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{c) } \cos 4\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos (2 \cdot 2\alpha) + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha - \operatorname{sen}^2 2\alpha + 2 \operatorname{sen}^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha = 1$$

**42** Simplifica:

a)  $\frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha}$       b)  $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos 2\alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2 \cos (45^\circ + \alpha) \cos (45^\circ - \alpha)}{\cos 2\alpha} &= \frac{2 (\cos 45^\circ \cos \alpha - \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha) (\cos 45^\circ \cos \alpha + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 (\cos^2 45^\circ \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 45^\circ \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot [(\sqrt{2}/2)^2 \cos^2 \alpha - (\sqrt{2}/2)^2 \operatorname{sen}^2 \alpha]}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \cdot 1/2 \cos^2 \alpha - 2 \cdot 1/2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos (2\alpha) - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} (2\alpha) &= \operatorname{sen} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \cos \alpha 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = -\operatorname{sen}^3 \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= -\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

**43** Resuelve estas ecuaciones:

a)  $\frac{\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 3x} = 1$

b)  $\frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x}{\cos 3x - \cos x} = \sqrt{3}$

c)  $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 2x$

d)  $\operatorname{sen} 3x - \cos 3x = \operatorname{sen} x - \cos x$

a)  $\frac{2 \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}} = 1 \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 4x \cos x}{2 \cos 2x \cos x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow \frac{\operatorname{sen}(2 \cdot 2x)}{\cos 2x} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x}{\cos 2x} = 1 \rightarrow 2 \operatorname{sen} 2x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 30^\circ \rightarrow x_1 = 15^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 150^\circ \rightarrow x_2 = 75^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 390^\circ \rightarrow x_3 = 195^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \\ 2x = 510^\circ \rightarrow x_4 = 255^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Al comprobar, vemos que todas las soluciones son válidas.

b)  $\frac{2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}{-2 \operatorname{sen} \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2}} = \sqrt{3} \rightarrow \frac{2 \operatorname{sen} 2x \cos x}{-2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{-\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 150^\circ \\ x_2 = 330^\circ \end{cases}$

Ambas soluciones son válidas, luego:

$\left. \begin{array}{l} x_1 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 330^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

c)  $2 \cos \frac{3x+x}{2} \operatorname{sen} \frac{3x-x}{2} = \cos 2x$

$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = \cos 2x \rightarrow 2 \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ$

Comprobando, vemos que las dos soluciones son válidas. Luego:

$\left. \begin{array}{l} x_1 = 30^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = 150^\circ + k \cdot 360^\circ = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

d)  $\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x = \cos 3x - \cos x \rightarrow 2 \cos 2x \operatorname{sen} x = -2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x \rightarrow$  (Dividimos entre  $2 \operatorname{sen} x$ )

$\rightarrow \cos 2x = -\operatorname{sen} 2x \rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = -1 \rightarrow \operatorname{tg} 2x = -1 \rightarrow$

$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x = 315^\circ \rightarrow x_1 = 157,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 135^\circ \rightarrow x_2 = 67,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 675^\circ \rightarrow x_3 = 337,5^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2x = 495^\circ \rightarrow x_4 = 247,5^\circ + k \cdot 360^\circ \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

Podemos comprobar que las cuatro soluciones son válidas. Agrupándolas:

$x = 67,5^\circ + k \cdot 90^\circ \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

**44 a) Demuestra que  $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$ . b) Resuelve la ecuación  $\operatorname{sen} 3x - 2 \operatorname{sen} x = 0$ .**

a)  $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen}(2x + x) = \operatorname{sen} 2x \cos x + \cos 2x \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \cos x \cos x + (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \operatorname{sen} x =$   
 $= 2 \operatorname{sen} x \cos^2 x + \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x = 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$

b)  $\operatorname{sen} 3x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$  por el resultado del apartado anterior:

$$3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow 3 \operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \operatorname{sen} x - 3 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^3 x - 2 \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4 \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (4 \operatorname{sen}^2 x - 1) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x_1 = 0^\circ, x_2 = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = \pm \frac{1}{2} \rightarrow x_3 = 30^\circ, x_4 = 150^\circ, x_5 = 210^\circ, x_6 = 330^\circ \end{cases}$$

Todas las soluciones son válidas y se pueden expresar como:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= k \cdot 180^\circ = k \pi \\ x_2 &= 30^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{\pi}{6} + k \pi \\ x_3 &= 150^\circ + k \cdot 180^\circ = \frac{5\pi}{6} + k \pi \end{aligned} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

**45 Demuestra las siguientes igualdades:**

a)  $\operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$       b)  $\cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta$

a) El primer miembro de la igualdad es una diferencia de cuadrados, luego podemos factorizarlo como una suma por una diferencia:

$$\left[ \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen} \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] \stackrel{(*)}{=} \left[ 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[ 2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} =$$

$$= \sqrt{(1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta)(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

(\*) Transformamos la suma y la diferencia en productos, teniendo en cuenta que:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} = \beta$$

b) Procedemos de manera análoga al apartado anterior, pero ahora:

$$\frac{\alpha - \beta}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} = -\beta$$

$$\cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \left[ \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] \cdot \left[ \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right] =$$

$$= \left[ 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{-\beta}{2} \right] \cdot \left[ -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{-\beta}{2} \right] = \left[ 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right] \cdot \left[ 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \right] =$$

$$= 4 \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{2}} = \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \beta} = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

NOTA: También podríamos haberlo resuelto aplicando el apartado anterior como sigue:

$$\cos^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cos^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 1 - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) - 1 + \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$= \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

(\*) Por el apartado anterior.

**46** Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante:

a)  $\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ \text{sen } x - \text{sen } y = \frac{1}{2} \end{cases}$       b)  $\begin{cases} \text{sen } x + \text{cos } y = 1 \\ x + y = 90^\circ \end{cases}$       c)  $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 y = 1 \\ \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 y = 1 \end{cases}$       d)  $\begin{cases} \text{sen } x + \text{cos } y = 1 \\ 4 \text{ sen } x \text{ cos } y = 1 \end{cases}$

a) De la segunda ecuación:  $2 \cos \frac{x+y}{2} \text{sen } \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$

Como:

$$x + y = 120^\circ \rightarrow 2 \cos 60^\circ \text{sen } \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \text{sen } \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen } \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{x-y}{2} = 30^\circ \rightarrow x - y = 60^\circ$$

Así:  $x + y = 120^\circ$

$$\frac{x - y = 60^\circ}{2x = 180^\circ} \rightarrow x = 90^\circ \rightarrow y = 30^\circ$$

Luego la solución es  $(90^\circ, 30^\circ)$

b)  $x + y = 90^\circ \rightarrow$  complementarios  $\rightarrow \text{sen } x = \text{cos } y$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\text{cos } y + \text{cos } y = 1 \rightarrow 2 \text{cos } y = 1 \rightarrow \text{cos } y = \frac{1}{2} \rightarrow y = 60^\circ \rightarrow x = 90^\circ - y = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Luego la solución es:  $(30^\circ, 60^\circ)$

c) Como  $\begin{cases} \text{cos}^2 y = 1 - \text{sen}^2 y \\ \text{cos}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \end{cases}$

El sistema queda:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}^2 x + 1 - \text{sen}^2 y = 1 \\ 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = 0 \\ -\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y = 0 \end{array} \right\}$$

$$-2 \text{sen}^2 y = 0 \rightarrow \text{sen } y = 0 \rightarrow y = 0^\circ$$

Sustituyendo en la segunda ecuación (por ejemplo) del sistema inicial, se obtiene:

$$\text{cos}^2 x - 0 = 1 \rightarrow \text{cos}^2 x = 1 = \begin{cases} \text{cos } x = 1 \rightarrow x = 0^\circ \\ \text{cos } x = -1 \rightarrow x = 180^\circ \in 2.^\circ \text{ cuadrante} \end{cases}$$

Luego la solución es:  $(0^\circ, 0^\circ)$

d)  $\begin{cases} \text{sen } x + \text{cos } y = 1 \\ 4 \text{ sen } x \text{ cos } y = 1 \end{cases} \rightarrow \text{cos } y = 1 - \text{sen } x$

$$4 \text{ sen } x (1 - \text{sen } x) = 1 \rightarrow 4 \text{sen}^2 x - 4 \text{sen } x + 1 = 0 \rightarrow \text{sen } x = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{cos } y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Las diferentes posibilidades son:

$$\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 60^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \\ y = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

**47** Sin desarrollar las razones trigonométricas de la suma o de la diferencia de ángulos, averigua para qué valores de  $x$  se verifica cada una de estas igualdades:

a)  $\text{sen}(x - 60^\circ) = \text{sen } 2x$

b)  $\text{cos}(x - 45^\circ) = \text{cos}(2x + 60^\circ)$

c)  $\text{sen}(x + 60^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ)$

d)  $\text{cos}(2x - 30^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ)$

a)  $\text{sen}(x - 60^\circ) = \text{sen } 2x \rightarrow \text{sen } 2x - \text{sen}(x - 60^\circ) = 0 \rightarrow$   
 $\rightarrow 2 \text{cos} \frac{2x + x - 60^\circ}{2} \text{sen} \frac{2x - (x - 60^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{cos} \frac{3x - 60^\circ}{2} \text{sen} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0$

• Si  $\text{cos} \frac{3x - 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow x = 80^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x - 60^\circ}{2} = 270^\circ \rightarrow x = 200^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

Si sumamos  $360^\circ$  encontramos otra solución:

$\frac{3x - 60^\circ}{2} = 90^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 320^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\text{sen} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 60^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 60^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 300^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

b)  $\text{cos}(x - 45^\circ) = \text{cos}(2x + 60^\circ) \rightarrow \text{cos}(2x + 60^\circ) - \text{cos}(x - 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2 \text{sen} \frac{2x + 60^\circ + x - 45^\circ}{2} \text{sen} \frac{2x + 60^\circ - (x - 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} \text{sen} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0$

• Si  $\text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

Si sumamos  $360^\circ$  encontramos otra solución:  $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\text{sen} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x + 105^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x + 105^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 255^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

c)  $\text{sen}(x + 60^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ)$

Como  $\text{cos } x = \text{sen}(x + 90^\circ)$ , podemos sustituir en el segundo miembro obteniendo:

$\text{sen}(x + 60^\circ) = \text{sen}(x + 45^\circ + 90^\circ) \rightarrow \text{sen}(x + 60^\circ) = \text{sen}(x + 135^\circ) \rightarrow \text{sen}(x + 135^\circ) - \text{sen}(x + 60^\circ) = 0$

$-2 \text{cos} \frac{x + 135^\circ + x + 60^\circ}{2} \text{sen} \frac{x + 135^\circ - (x + 60^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{cos} \frac{2x + 195^\circ}{2} \text{sen} \frac{75^\circ}{2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \frac{2x + 195^\circ}{2} = 90^\circ \rightarrow x = 352^\circ 30' + 360^\circ \cdot k \\ \frac{2x + 195^\circ}{2} = 270^\circ \rightarrow x = 172^\circ 30' + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

d)  $\text{cos}(2x - 30^\circ) = \text{cos}(x + 45^\circ) \rightarrow \text{cos}(2x - 30^\circ) - \text{cos}(x + 45^\circ) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2 \text{sen} \frac{2x - 30^\circ + x + 45^\circ}{2} \text{sen} \frac{2x - 30^\circ - (x + 45^\circ)}{2} = 0 \rightarrow \text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} \text{sen} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0$

• Si  $\text{sen} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 15^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 355^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{3x + 15^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 115^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

Si sumamos  $360^\circ$  encontramos otra solución:  $\frac{3x + 15^\circ}{2} = 0 + 360^\circ \rightarrow x = 235^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\text{sen} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x - 75^\circ}{2} = 0^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \\ \frac{x - 75^\circ}{2} = 180^\circ \rightarrow x = 75^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

**48** En una circunferencia goniométrica dibujamos los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ . Llamamos  $\gamma = \alpha - \beta$ .

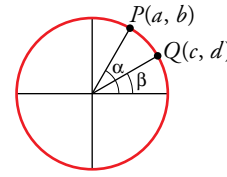
a) ¿Cuál de estas expresiones es igual a  $\text{sen } \gamma$ ?

- I.  $ac + bd$    II.  $bc - ad$    III.  $ad - bc$    IV.  $ab + cd$

b) ¿Alguna de ellas es igual a  $\text{cos } \gamma$ ?

a)  $\text{sen } \gamma = \text{sen } (\alpha - \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta - \text{cos } \alpha \text{sen } \beta = ad - bc$  (III)

b)  $\text{cos } \gamma = \text{cos } (\alpha - \beta) = \text{cos } \alpha \text{cos } \beta + \text{sen } \alpha \text{sen } \beta = bd + ac$  (I)



Página 145

### Cuestiones teóricas

**49** ¿Cuál de las siguientes condiciones deben cumplir  $x$  e  $y$  para que se verifique  $\text{cos } (x + y) = 2 \text{cos } x \text{cos } y$ ?

- Ⓐ  $x = y$    Ⓑ  $x - y = \pi$    Ⓒ  $x + y = \pi$    Ⓓ  $x - y = \frac{\pi}{2}$

$\text{cos } (x + y) = \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y$

Si  $\text{cos } (x + y) = 2 \text{cos } x \text{cos } y \rightarrow \text{cos } x \text{cos } y - \text{sen } x \text{sen } y = 2 \text{cos } x \text{cos } y \rightarrow -\text{sen } x \text{sen } y = \text{cos } x \text{cos } y$

Dividiendo entre  $\text{cos } x \text{cos } y$  se obtiene que  $\frac{-\text{sen } x \text{sen } y}{\text{cos } x \text{cos } y} = 1$ , es decir,  $-\text{tg } x \text{tg } y = 1$  y esto ocurre solo

cuando se cumple (IV) porque despejando  $y$  tenemos:  $y = x + \frac{\pi}{2}$ , luego:

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } y = \text{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = \text{cos } x \\ \text{cos } y = \text{cos} \left( x + \frac{\pi}{2} \right) = -\text{sen } x \end{array} \right\} \rightarrow \text{tg } y = \frac{\text{sen } y}{\text{cos } y} = \frac{\text{cos } x}{-\text{sen } x} = -\frac{1}{\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}} = -\frac{1}{\text{tg } x}$$

**50** Expresa  $\text{sen } 4\alpha$  y  $\text{cos } 4\alpha$  en función de  $\text{sen } \alpha$  y  $\text{cos } \alpha$ .

$\text{sen } 4\alpha = \text{sen} (2 \cdot 2\alpha) = 2 \text{sen } 2\alpha \text{cos } \alpha = 2 \cdot 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha (\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = 4 \text{cos}^3 \alpha \text{sen } \alpha - 4 \text{cos } \alpha \text{sen}^3 \alpha$

$\text{cos } 4\alpha = \text{cos} (2 \cdot 2\alpha) = \text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 2\alpha = (\text{cos}^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha)^2 - (2 \text{sen } \alpha \text{cos } \alpha)^2 =$

$= \text{cos}^4 \alpha - 2 \text{cos}^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^4 \alpha - 4 \text{sen}^2 \alpha \text{cos}^2 \alpha = \text{cos}^4 \alpha - 6 \text{cos}^2 \alpha \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^4 \alpha$

**51** Al duplicarse un ángulo, ¿se duplica su seno? Prueba si se cumple  $\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x$  para cualquier valor de  $x$ .

La afirmación es falsa porque, por ejemplo,  $\text{sen } 60^\circ = \sqrt{3} \text{sen } 30^\circ \neq 2 \text{sen } 30^\circ$ .

Veamos ahora si existe algún ángulo que cumpla la relación  $\text{sen } 2x = 2 \text{sen } x$ .

$2 \text{sen } x \text{cos } x = 2 \text{sen } x = \text{sen } x \text{cos } x - \text{sen } x = 0 \rightarrow \text{sen } x (\text{cos } x - 1) = 0$

• Si  $\text{sen } x = 0 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$ ,  $x = 180^\circ + 360^\circ \cdot k$

• Si  $\text{cos } x = 1 \rightarrow x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k$  (solución botenida anteriormente)

Por tanto, los únicos ángulos que cumplen la relación dada son de la forma  $180^\circ \cdot k$ .

**52** Justifica que en un triángulo  $ABC$ , rectángulo en  $A$ , se verifica la siguiente igualdad:

$\text{sen } 2B = \text{sen } 2C$

Como el triángulo es rectángulo en  $\hat{A}$ , se tiene que  $\hat{B} = 90^\circ - \hat{C}$  y, por tanto,

$\text{sen } \hat{B} = \text{sen} (90^\circ - \hat{C}) = \text{cos } \hat{C}$  y  $\text{cos } \hat{B} = \text{cos} (90^\circ - \hat{C}) = \text{sen } \hat{C}$

Luego,  $\text{sen } 2\hat{B} = 2 \text{sen } \hat{B} \text{cos } \hat{B} = 2 \text{cos } \hat{C} \text{sen } \hat{C} = \text{sen } 2\hat{C}$

**53** ¿Para qué valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se verifica la igualdad  $\text{sen } (\alpha + \beta) = 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \beta$ ?

Como  $\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta$ ,  $\text{sen } (\alpha + \beta) = 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen } \alpha \text{cos } \beta + \text{cos } \alpha \text{sen } \beta = 2 \text{sen } \alpha \text{cos } \beta \rightarrow \text{cos } \alpha \text{sen } \beta = \text{sen } \alpha \text{cos } \beta$

Esta relación es cierta, obviamente si  $\alpha = \beta$ .

Por otro lado, dividiendo entre  $\cos \alpha \cos \beta$  se tiene que  $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}$ , luego los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  deben tener la misma tangente.

Esto ocurre cuando  $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$  por la periodicidad de la función  $y = \operatorname{tg} x$ .

Si  $\cos \alpha = 0$  entonces  $0 = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \rightarrow \cos \beta = 0$  ya que  $\operatorname{sen} \alpha = \pm 1$ .

Por tanto, la relación también es cierta si  $\alpha$  y  $\beta$  son simultáneamente de la forma  $90^\circ + 360^\circ \cdot k$  o  $270^\circ + 360^\circ \cdot k$ .

En resumen, se verifica la igualdad cuando  $\beta = \alpha + 180^\circ \cdot k$ .

**54** ¿Qué relación existe entre las gráficas de  $y = \operatorname{sen} x$  e  $y = \cos x$  y la de cada una de las funciones siguientes?:

a)  $y = \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$       b)  $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$       c)  $y = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$       d)  $y = \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

La relación que existe es que la gráfica de la función  $y = \cos x$  está desplazada horizontalmente hacia la izquierda  $\frac{\pi}{2}$  unidades respecto de  $\operatorname{sen} x$ .

- a) Coincide con la gráfica de la función  $y = \cos x$ .      b) Es la gráfica de la función  $y = -\operatorname{sen} x$ .  
c) Coincide con la gráfica de la función  $y = \operatorname{sen} x$ .      d) Coincide con la gráfica de la función  $y = \cos x$ .

(Además de comprobarse mediante la representación gráfica, puede probarse fácilmente usando las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma o diferencia de ángulos).

**55** ¿En qué puntos del intervalo  $[0, 4\pi]$  corta al eje  $X$  cada una de las siguientes funciones?:

a)  $y = \cos \frac{x}{2}$       b)  $y = \operatorname{sen} (x - \pi)$       c)  $y = \cos (x + \pi)$

Los puntos de corte con el eje  $X$  son aquellos para los que  $y = 0$ .

a)  $\cos \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \pi \\ \frac{x}{2} = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = 3\pi \end{cases}$       b)  $\operatorname{sen} (x - \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x - \pi = -\pi \rightarrow x = 0 \\ x - \pi = 0 \rightarrow x = \pi \\ x - \pi = \pi \rightarrow x = 2\pi \\ x - \pi = 2\pi \rightarrow x = 3\pi \\ x - \pi = 3\pi \rightarrow x = 4\pi \end{cases}$

c)  $y = \cos (x + \pi) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + \pi = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{5\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{7\pi}{2} \rightarrow x = \frac{5\pi}{2} \\ x + \pi = \frac{9\pi}{2} \rightarrow x = \frac{7\pi}{2} \end{cases}$

**Para profundizar**

**56** Demuestra que si  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ , se verifica:  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} (360^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \frac{\operatorname{tg} 360^\circ - \operatorname{tg} (\alpha + \beta)}{1 + \operatorname{tg} 360^\circ \cdot \operatorname{tg} (\alpha + \beta)} = \\ &= \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \\ &= \frac{-\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \frac{-\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta [-\operatorname{tg} (\alpha + \beta)] = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} (360^\circ - (\alpha + \beta)) = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \end{aligned}$$



**57 Prueba si existe algún triángulo isósceles en el que el coseno del ángulo distinto sea igual a la suma de los cosenos de los ángulos iguales.**

Si llamamos  $x$  a cada uno de los ángulos iguales, entonces el ángulo desigual es  $180^\circ - 2x$ .

Se trata de ver si la siguiente ecuación tiene solución:  $\cos(180^\circ - 2x) = 2 \cos x$

Veámoslo:

$$\begin{aligned} \cos 180^\circ \cos 2x + \operatorname{sen} 180^\circ \operatorname{sen} 2x &= 2 \cos x \rightarrow -\cos 2x = 2 \cos x \rightarrow -\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos x \rightarrow \\ &\rightarrow -\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 2 \cos x \rightarrow 2 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Si  $\cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \rightarrow x = 68^\circ 31' 45''$  tiene cada uno de los ángulos iguales y el ángulo desigual tiene  $180^\circ - 2 \cdot 68^\circ 31' 45'' = 42^\circ 56' 30''$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} > 1$  que no es posible porque el coseno de un ángulo no puede ser mayor que 1.

Luego no existe ningún triángulo con esas condiciones.

**58 Resuelve los sistemas siguientes dando las soluciones en el intervalo  $[0, 2\pi)$ :**

a)  $\begin{cases} \cos x + \cos y = -1/2 \\ \cos x \cos y = -1/2 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x + y = \pi/2 \\ \sqrt{3} \cos x - \cos y = 1 \end{cases}$     c)  $\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \sqrt{3}/2 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 3/4 \end{cases}$     d)  $\begin{cases} \operatorname{sen} x \cdot \cos y = 1/4 \\ \cos x \cdot \operatorname{sen} y = 1/4 \end{cases}$

a)  $\begin{cases} \cos x + \cos y = -\frac{1}{2} \\ \cos x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos y = -\frac{1}{2} - \cos x \\ \cos x \left(-\frac{1}{2} - \cos x\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow -\frac{1}{2} \cos x - \cos^2 x = -\frac{1}{2} \rightarrow \cos x + 2 \cos^2 x = 1$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{-1-3}{4} = -1 \\ \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

• Si  $\cos x = -1 \rightarrow x = \pi$

$$\cos y = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} y = \pi/3 \\ y = 5\pi/3 \end{cases}$$

• Si  $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \rightarrow y = \pi$

Soluciones:  $\left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{5\pi}{3}, \pi\right)$

b)  $y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\sqrt{3} \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{2} \cos x - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \sqrt{3} \cos x = \operatorname{sen} x + 1$$

Elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} 3 \cos^2 x &= \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 3(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1 \rightarrow 4 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

• Si  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}$

$$x = \frac{\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ y } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) \text{ vale.}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \text{ no puede ser porque no está en el intervalo dado.}$$

• Si  $\operatorname{sen} x = -1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$  tampoco es posible por el mismo motivo.

c) Elevamos al cuadrado la primera ecuación:

$$\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{4} \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 0$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi$$

$$\text{Además, } \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3}, y = \frac{2\pi}{3}$$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(0, \frac{2\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{3}\right), \left(\pi, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ Valen.}$$

$$\text{Si } \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow y = 0, y = \pi$$

$$\text{Además, } \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}$$

Sustituimos en el sistema para comprobarlas porque pueden aparecer soluciones falsas al elevar al cuadrado.

$$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ Valen.}$$

d) Elevamos al cuadrado la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}$$

$$\cos^2 x \operatorname{sen}^2 y = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^2 y) = \frac{1}{16} \rightarrow \cos^2 x \left(1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow (1 - \operatorname{sen}^2 x) \left(1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x}\right) = \frac{1}{16} \rightarrow 1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{16 \operatorname{sen}^2 x} - \operatorname{sen}^2 x = 0 \rightarrow 16 \operatorname{sen}^2 x - 1 - 16 \operatorname{sen}^4 x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 16 \operatorname{sen}^4 x - 16 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{16 + \sqrt{192}}{32} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = \frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$x = 75^\circ, x = 105^\circ, y = 75^\circ, y = 285^\circ$$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$$(75^\circ, 75^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

$$(75^\circ, 285^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(105^\circ, 75^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(105^\circ, 285^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

$$\bullet \text{ Si } \operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \rightarrow \cos y = -\frac{1}{4 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$x = 285^\circ, x = 255^\circ, y = 105^\circ, y = 255^\circ$$

Ahora comprobamos las soluciones porque al elevar al cuadrado pueden aparecer resultados falsos:

$$(285^\circ, 105^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

$$(285^\circ, 255^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(255^\circ, 105^\circ) \rightarrow \text{No vale ya que no cumple la segunda ecuación.}$$

$$(255^\circ, 255^\circ) \rightarrow \text{Vale.}$$

**59** Demuestra que:

$$\text{a) } \operatorname{sen} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \text{b) } \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} \quad \text{c) } \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}$$

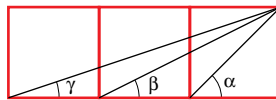
a) Desarrollamos y operamos en el segundo miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2}{1 + \cos x}} = (1 + \cos x) \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \sqrt{(1 + \cos x)^2 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}{1 + \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}}{\frac{1 + \cos x + 1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \cos x}{2} = \cos x$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{1 - \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{1 + \cos x - 1 + \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}{\frac{2 \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\cos x} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{(1 + \cos x)^2 \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \\ &= \frac{1}{\cos x} \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \sqrt{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

**60** Demuestra que, en la siguiente figura,  $\alpha = \beta + \gamma$ :



Supongamos que los cuadrados tienen lado  $l$ .

Por una parte,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{l} = 1$$

Por otro lado,

$$\operatorname{tg}(\beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma} = \frac{\frac{l}{2l} + \frac{l}{3l}}{1 - \frac{l}{2l} \cdot \frac{l}{3l}} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$$

Así,  $\alpha$  y  $\beta + \gamma$  son dos ángulos comprendidos entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$  cuyas tangentes coinciden. Por tanto, los ángulos tienen que ser iguales, es decir,  $\alpha = \beta + \gamma$ .

## Autoevaluación

### Página 145

1 Si  $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$  y  $\alpha < \pi$ , halla:

- a)  $\operatorname{sen} \alpha$                                       b)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$                                       c)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$                                       d)  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

a)  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$  ya que el ángulo está en el 2.º cuadrante.

b)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

c)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{4}\right)}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$  porque  $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$

d)  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{-3\sqrt{5}-1}{8}$

2 Demuestra cada una de estas igualdades:

a)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

b)  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

a)  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{\frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}}{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

b)  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) =$   
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \beta) - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) \operatorname{sen}^2 \beta =$   
 $= \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \beta = \operatorname{sen}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \beta$

3 Resuelve:

a)  $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

b)  $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1$

a)  $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - (-\operatorname{sen} x) = 1 \rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow -2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x (-2 \operatorname{sen} x + 1) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0^\circ, x = 180^\circ \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 30^\circ, x = 150^\circ \end{array} \right.$

Soluciones:

$x_1 = 360^\circ \cdot k; x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k; x_3 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k; x_4 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

b)  $2 \operatorname{tg} x \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow 2 \operatorname{tg} x \frac{1 + \cos x}{2} - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cos x - \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{array} \right\} \text{ con } k \in \mathbb{Z}$

**4 Simplifica:**

a)  $\frac{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 60^\circ + \operatorname{cos} 30^\circ}$

b)  $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)$

a)  $\frac{\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ}{\operatorname{cos} 60^\circ + \operatorname{cos} 30^\circ} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{60^\circ - 30^\circ}{2}}{2 \operatorname{cos} \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \operatorname{cos} \frac{60^\circ - 30^\circ}{2}} = \frac{\operatorname{sen} 45^\circ}{\operatorname{cos} 45^\circ} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

b)  $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(1 + \frac{1 - \operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{cos} \alpha}\right) = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos} \alpha} \left(\frac{2}{1 + \operatorname{cos} \alpha}\right) = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = 2$

**5 Expresa en grados:  $\frac{3\pi}{4}$  rad,  $\frac{5\pi}{2}$  rad, 2 rad.**

$\frac{3\pi}{4}$  rad = 135°

$\frac{5\pi}{2}$  rad = 450°

2 rad = 114° 35' 30"

**6 Expresa en radianes dando el resultado en función de  $\pi$  y como número decimal.**

a) 60°

b) 225°

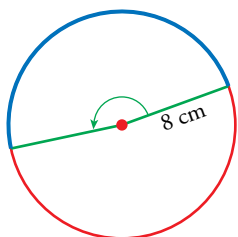
c) 330°

a) 60° =  $\frac{\pi}{3}$  rad = 1,05 rad

b) 225° =  $\frac{5\pi}{4}$  rad = 3,93 rad

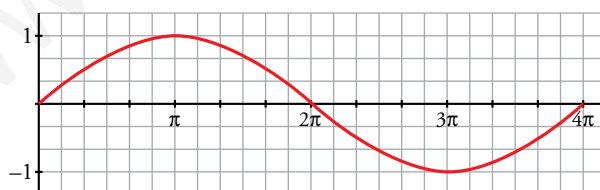
c) 330° =  $\frac{11\pi}{6}$  rad = 5,76 rad

**7 En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?**



$l = 8 \cdot 3 = 24$  cm

**8 Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**



a)  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{2}$

b)  $y = \operatorname{sen} 2x$

c)  $y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

La función representada es de periodo  $4\pi$  y se corresponde con la del apartado c).

Podemos comprobarlo estudiando algunos puntos. Por ejemplo:

$x = \pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$x = 2\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{2} = \operatorname{sen} \pi = 0$

$x = 3\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$

$x = 4\pi \rightarrow y = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{2} = \operatorname{sen} 2\pi = 0$