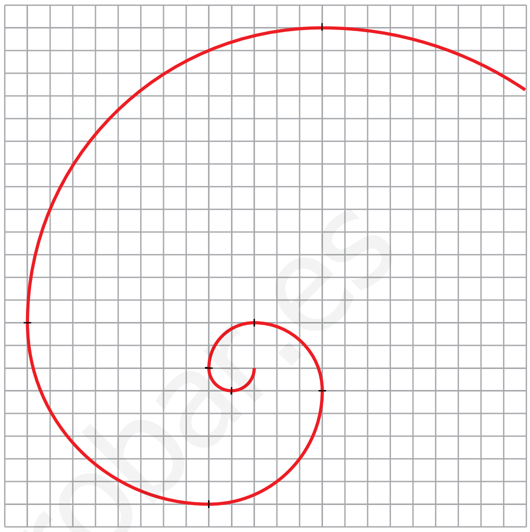
Resuelve

Página 55

Una hermosa curva



La curva de la derecha está construida con ocho arcos de circunferencia. Los siete primeros son de un cuarto de circunferencia. El octavo, es solo un trocito.

a) Localiza los centros y averigua los radios de los ocho arcos dibujados.

¿Ves la relación de los radios con la sucesión de Fibonacci?

b) Reproduce la curva en tu cuaderno completando el octavo tramo y añadiendo el noveno.

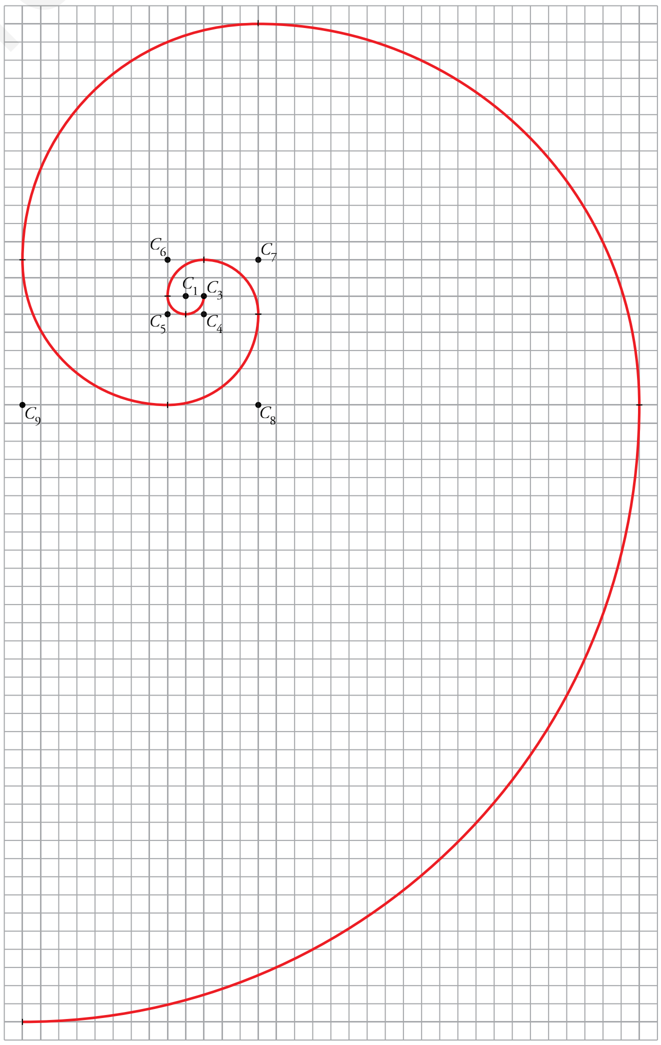
¿Qué radio tiene este último?

c) Como ves, esta curva se podría ir ampliando indefinidamente. Di cuáles serían los radios de los siguientes cinco tramos (10.º, 11.º, …).

a) Los dos primeros centros de arcos de circunferencia coinciden $C_1 = C_2$ y están representados como un único centro. El centro del tercer arco es C_3 y así sucesivamente.

Los radios de los arcos de circunferencias coinciden con los términos de Fibonacci. Es decir, si llamamos r_i al radio de centro C_i, $r_1 = r_2 = 1$, $r_3 = 2$, $r_4 = 3$, $r_5 = 5$, $r_6 = 8$, $r_7 = 13$, $r_8 = 21$.

b)



El último radio es $r_9 = 34$.

c) $r_{10} = 55$, $r_{11} = 89$, $r_{12} = 144$, $r_{13} = 233$, $r_{14} = 377$

1 Concepto de sucesión

Página 57

1 Obtén los seis primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

$a_n = n^2 + 2n$ $\quad b_n = (-1)^{n+1} n^2$ $\quad c_n = (-1)^n (2n + 1)$

$d_n = (-2)^n$ $\quad e_1 = 3,\ e_2 = -1,\ e_n = e_{n-2} + 2e_{n-1}$ $\quad f_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

$g_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n}$ $\quad h_n = n! - (n-1)!$ $\quad i_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

$a_n = n^2 + 2n \to a_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3,\ a_2 = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8,\ a_3 = 3^2 + 2 \cdot 3 = 15,$

$a_4 = 4^2 + 2 \cdot 4 = 24,\ a_5 = 5^2 + 2 \cdot 5 = 35,\ a_6 = 6^2 + 2 \cdot 6 = 48$

$b_n = (-1)^{n+1} n^2 \to b_1 = (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 1,\ b_2 = (-1)^{1+2} \cdot 2^2 = -4,\ b_3 = (-1)^{1+3} \cdot 3^2 = 9,$

$b_4 = (-1)^{1+4} \cdot 4^2 = -16,\ b_5 = (-1)^{1+5} \cdot 5^2 = 25,\ b_6 = (-1)^{1+6} \cdot 6^2 = -36$

$c_n = (-1)^n(2n + 1) \to c_1 = (-1)^1(2 \cdot 1 + 1) = -3,\ c_2 = (-1)^2(2 \cdot 2 + 1) = 5,\ c_3 = (-1)^3(2 \cdot 3 + 1) = -7,$

$c_4 = (-1)^4(2 \cdot 4 + 1) = 9,\ c_5 = (-1)^5(2 \cdot 5 + 1) = -11,\ c_6 = (-1)^6(2 \cdot 6 + 1) = 13$

$d_n = (-2)^n \to d_1 = (-2)^1 = -2,\ d_2 = (-2)^2 = 4,\ d_3 = (-2)^3 = -8,$

$d_4 = (-2)^4 = 16,\ d_5 = (-2)^5 = -32,\ d_6 = (-2)^6 = 64$

$e_1 = 3,\ e_2 = -1,\ e_3 = 3 + 2 \cdot (-1) = 1,\ e_4 = -1 + 2 \cdot 1 = 1,\ e_5 = 1 + 2 \cdot 1 = 3,\ e_6 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$

$f_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \to f_1 = \dfrac{(-1)^1}{2 \cdot 1-1} = -1,\ f_2 = \dfrac{(-1)^2}{2 \cdot 2-1} = \dfrac{1}{3},\ f_3 = \dfrac{(-1)^3}{2 \cdot 3-1} = -\dfrac{1}{5},$

$f_4 = \dfrac{(-1)^4}{2 \cdot 4-1} = \dfrac{1}{7},\ f_5 = \dfrac{(-1)^5}{2 \cdot 5-1} = -\dfrac{1}{9},\ f_6 = \dfrac{(-1)^6}{2 \cdot 6-1} = \dfrac{1}{11}$

$g_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n} \to g_1 = \dfrac{1^2+1}{1^2+2 \cdot 1} = \dfrac{2}{3},\ g_2 = \dfrac{2^2+1}{2^2+2 \cdot 2} = \dfrac{5}{8},\ g_3 = \dfrac{3^2+1}{3^2+2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3},$

$g_4 = \dfrac{4^2+1}{4^2+2 \cdot 4} = \dfrac{17}{24},\ g_5 = \dfrac{5^2+1}{5^2+2 \cdot 5} = \dfrac{26}{35},\ g_6 = \dfrac{6^2+1}{6^2+2 \cdot 6} = \dfrac{37}{48}$

$h_n = n! - (n-1)! \to h_1 = 1! - (1-1)! = 0,\ h_2 = 2! - (2-1)! = 1,\ h_3 = 3! - (3-1)! = 4,$

$h_4 = 4! - (4-1)! = 18,\ h_5 = 5! - (5-1)! = 96,\ h_6 = 6! - (6-1)! = 600$

$i_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \to i_1 = \left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2,\ i_2 = \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4},\ i_3 = \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{64}{27},$

$i_4 = \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = \dfrac{625}{256},\ i_5 = \left(1+\dfrac{1}{5}\right)^5 = \dfrac{7776}{3125},\ i_6 = \left(1+\dfrac{1}{6}\right)^6 = \dfrac{117649}{46656}$

2 Da el término general o el criterio de recurrencia (o ambas cosas) de las siguientes sucesiones:

a) 3, 8, 13, 18, 23, …

b) 1, 8, 27, 64, 125, …

c) 0, 3, 8, 15, 24, …

d) 1, –3, 5, –7, 9, …

e) 1, –2, 6, –24, 120, …

f) 1, 4, 8, 11, 22, 25, …

g) $\frac{2}{4}, \frac{5}{9}, \frac{8}{16}, \frac{11}{25}, \frac{14}{36}, \dots$

h) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

i) 1, 3, 4, 7, 11, 18, …

j) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \dots$

a) Cada término es 5 unidades mayor que el término anterior de la sucesión. $a_n = 5n - 2$

Por recurrencia: $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 5$.

b) Cada término es el cubo del lugar que ocupa en la sucesión. $b_n = n^3$

c) Cada término es una unidad menor que el cuadrado del lugar que ocupa. $c_n = n^2 - 1$

d) Son los números impares con los signos + y – alternativamente. $d_n = (-1)^{n+1}(2n - 1)$

e) Son los números factoriales con los signos + y – alternativamente. $e_n = (-1)^{n+1} n!$

Por recurrencia: $e_1 = 1$, $e_n = e_{n-1} \cdot (-n)$.

f) El primer término impar es 1 y los demás términos impares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

El primer término par es 4 y los demás términos pares se obtienen sumando a este un múltiplo de 7.

$f_1 = 1$, $f_2 = 4$. Para n impar, $f_n = f_1 + 7(n - 2)$. Para n par, $f_n = f_1 + 7(n - 3)$.

g) Cada numerador es 3 unidades mayor que el numerador anterior. Cada denominador es el cuadrado del número natural siguiente al lugar que ocupa. $g_n = \frac{3n-1}{(n+1)^2}$

h) Los denominadores son los números naturales. Cada numerador es una unidad inferior a su denominador. $h_n = \frac{n-1}{n}$

i) Por recurrencia: $i_1 = 1$, $i_2 = 3$, $i_n = i_{n-1} + i_{n-2}$.

j) Son los inversos de los números naturales con los signos + y – alternativamente. $j_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

2 Algunas sucesiones especialmente interesantes

Página 59

1 En las siguientes sucesiones identifica las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas. Añade dos términos y escribe su término general:

a) 3, 7, 11, 15, 19, … **b) 3, 4, 6, 9, 13, 18, …** **c) 3, 6, 12, 24, 48, …**

d) 1, 3, 9, 27, 81, … **e) 5, –5, 5, –5, 5, …** **f) 10, 7, 4, 1, –2, …**

g) 100; 50; 25; 12,5; … **h) 12, 12, 12, 12, …** **i) 3, –5, 7, –9, 11, …**

j) 2 840; 284; 28,4; … **k) 90, –30, 10, –10/3, 10/9, …** **l) 17,4; 15,8; 14,2; 12,6; …**

a) Progresión aritmética en la que $a_1 = 3$ y $d = 4$.

$a_6 = 23$, $a_7 = 27$. Término general: $a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión.

$b_7 = 24$, $b_8 = 31$. Término general: $b_n = 3 + \dfrac{n(n-1)}{2}$

c) Progresión geométrica en la que $c_1 = 3$ y $r = 2$.

$c_6 = 96$, $c_7 = 192$. Término general: $c_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

d) Progresión geométrica en la que $d_1 = 1$ y $r = 3$.

$d_6 = 243$, $d_7 = 729$. Término general: $d_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

e) Progresión geométrica en la que $e_1 = 5$ y $r = -1$.

$e_6 = -5$, $e_7 = 5$. Término general: $e_n = 5 \cdot (-1)^{n-1}$

f) Progresión aritmética en la que $f_1 = 10$ y $d = -3$.

$f_6 = -5$, $f_7 = -8$. Término general: $f_n = 10 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 13$

g) Progresión geométrica en la que $g_1 = 100$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$g_5 = 6{,}25$, $g_6 = 3{,}125$. Término general: $g_n = 100 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

h) Es a la vez una progresión aritmética de diferencia $d = 0$ y una progresión geométrica de razón $r = 1$.

$h_5 = 12$, $h_6 = 12$. Término general: $h_n = 12$

i) No es una progresión.

$i_6 = -13$, $i_7 = 15$. Término general: $i_n = (-1)^{n+1}(2n + 1)$

j) Progresión geométrica en la que $j_1 = 2\,840$ y $r = \dfrac{1}{10}$.

$j_4 = 2{,}84$, $j_5 = 0{,}284$. Término general: $j_n = 2\,840 \cdot \left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$

k) Progresión geométrica en la que $k_1 = 90$ y $r = -\dfrac{1}{3}$.

$k_6 = \dfrac{-10}{27}$, $k_7 = \dfrac{10}{81}$. Término general: $k_n = 90 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

l) Progresión aritmética en la que $l_1 = 17{,}4$ y $d = -1{,}6$.

$l_5 = 11$, $l_6 = 10{,}4$. Término general: $l_n = 17{,}4 + (n-1) \cdot (-1{,}6) = -1{,}6n + 19$

2 **En 1a) halla S_{20}.**

$a_{20} = 4 \cdot 20 - 1 = 79;\ S_{20} = \dfrac{(3+79)\cdot 20}{2} = 820$

3 **En 1f) halla S_{15}.**

$f_{15} = -3 \cdot 15 + 13 = -32;\ S_{15} = \dfrac{(10+(-32))\cdot 15}{2} = -165$

4 **En 1d) halla S_{10}.**

$d_{10} = 3^9 = 19\,683;\ S_{10} = \dfrac{19\,683 \cdot 3 - 1}{3-1} = 29\,524$

5 **En 1k) halla S_{10}.**

$$k_{10} = 90 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^9 = -\frac{10}{2187};\ S_{10} = \frac{-\dfrac{10}{2187}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right) - 90}{-\dfrac{1}{3} - 1} = \frac{147\,620}{2187}$$

6 **¿En cuáles de las sucesiones del ejercicio 1 puedes hallar la suma de los infinitos términos? Hazlo.**

En las de los apartados g), j) y k) porque las razones son, en valor absoluto, menores que 1.

En el caso del apartado g), $S_\infty = \dfrac{100}{1-\dfrac{1}{2}} = 200$.

En el caso del apartado j), $S_\infty = \dfrac{2\,840}{1-\dfrac{1}{10}} = \dfrac{28\,400}{9}$.

En el caso del apartado k), $S_\infty = \dfrac{90}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{135}{2}$.

7 **Calcula:**

a) $1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2$

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3$

c) $20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2$

d) $16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3$

a) $\dfrac{30\cdot(30+1)\cdot(60+1)}{6} = \dfrac{30\cdot 31\cdot 61}{6} = 9\,455$

b) $\dfrac{15^2\cdot 16^2}{4} = 14\,400$

c) $20^2 + 21^2 + \ldots + 30^2 = (1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2) - (1^2 + 2^2 + \ldots + 19^2) = \dfrac{30\cdot 31\cdot 61}{6} - \dfrac{19\cdot 20\cdot 39}{6} = 6\,985$

d) $16^3 + 17^3 + \ldots + 30^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 30^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 15^3) = \dfrac{30^2\cdot 31^2}{4} - \dfrac{15^2\cdot 16^2}{4} = 201\,825$

8 **Calcula:**

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3$$

Ten en cuenta que, por ejemplo, $6^3 = (2 \cdot 3)^3 = 8 \cdot 3^3$ y que $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 8 \cdot 10^3$.

$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 20^3 = (2 \cdot 1)^3 + (2 \cdot 2)^3 + (2 \cdot 3)^3 + \ldots + (2 \cdot 10)^3 =$

$= 2^3 \cdot 1^3 + 2^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 2^3 + \ldots + 2^3 \cdot 10^3 =$

$= 2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3) = 8 \cdot \dfrac{10^2\cdot 11^2}{4} = 8\cdot 3025 = 24\,200$

Página 60

9 Calcula el 6.º término de la sucesión de Fibonacci, $f_6 = 8$, aplicando la fórmula.

$$f_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(9+4\sqrt{5})-(9-4\sqrt{5})\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 8\sqrt{5} = 8$$

(Hemos usado el binomio de Newton en cada una de las potencias sextas.)

10 Observa que, para valores "algo grandes" de n, el número ϕ^{-n} es "pequeño". Por tanto, podemos hallar los términos avanzados de la sucesión de Fibonacci, de forma aproximada, prescindiendo del sustraendo:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi^{-n}) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$$

Por ejemplo, para calcular $f_{13} = 233$ procederíamos así: $f_{13} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^{13}$. Hazlo y comprueba que el error cometido es menor que 0,001. Calcula de este modo f_{20}.

El error cometido es igual a $\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{13}\right| \approx 8{,}5837 \times 10^{-4}$, que es inferior a 0,001.

$$f_{20} \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 6765$$

11 La *sucesión de Lucas* se define así: $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_n = l_{n-2} + l_{n-1}$

Como ves, es muy parecida a la de Fibonacci y también tiene relación con el mundo vegetal.

a) Halla sus 11 primeros términos.

b) $l_1 + l_2 + \ldots + l_n = l_{n+2} - 3$. Compruébalo para $n = 6$.

c) Esta sucesión se relaciona con la de Fibonacci así:

$$f_n = \frac{l_{n-1} + l_{n+1}}{5}$$

Compruébalo hallando los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci a partir de la de Lucas.

a) $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 4$, $l_4 = 7$, $l_5 = 11$, $l_6 = 18$, $l_7 = 29$, $l_8 = 47$, $l_9 = 76$, $l_{10} = 123$, $l_{11} = 199$

b) $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 = 44$

$47 - 3 = 44$

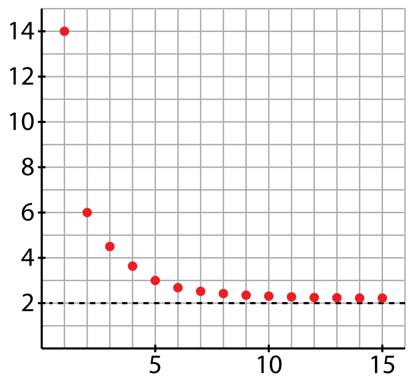
c) $f_2 = \frac{l_1 + l_3}{5} = \frac{1+4}{5} = 1$, $f_3 = \frac{3+7}{5} = 2$, $f_4 = \frac{4+11}{5} = 3$, $f_5 = \frac{7+18}{5} = 5$, $f_6 = \frac{11+29}{5} = 8$,

$f_7 = \frac{18+47}{5} = 13$, $f_8 = \frac{29+76}{5} = 21$, $f_9 = \frac{47+123}{5} = 34$, $f_{10} = \frac{76+199}{5} = 55$

3 Límite de una sucesión

Página 61

1 **Representa la sucesión** $a_n = \dfrac{4n+10}{2n-1}$ **y asigna un valor a su límite.**



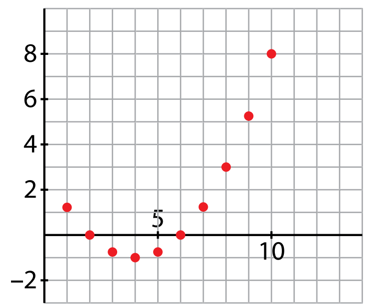
$a_1 = 14$, $a_2 = 6$, $a_3 = 4{,}4$; $a_4 \approx 3{,}71$;

$a_5 \approx 3{,}33$; …, $a_{10} \approx 2{,}63$; …;

$a_{100} \approx 2{,}06$; …; $a_{1\,000} \approx 2{,}006$; …

$\lim a_n = 2$

2 **Representa la sucesión** $b_n = \dfrac{n^2}{4} - 2n + 3$ **y asigna un valor a su límite.**



$b_1 = 1{,}25$; $b_2 = 0$; $b_3 = -0{,}75$;

$b_4 = -1$; $b_5 = -0{,}75$; $b_6 = 0$;

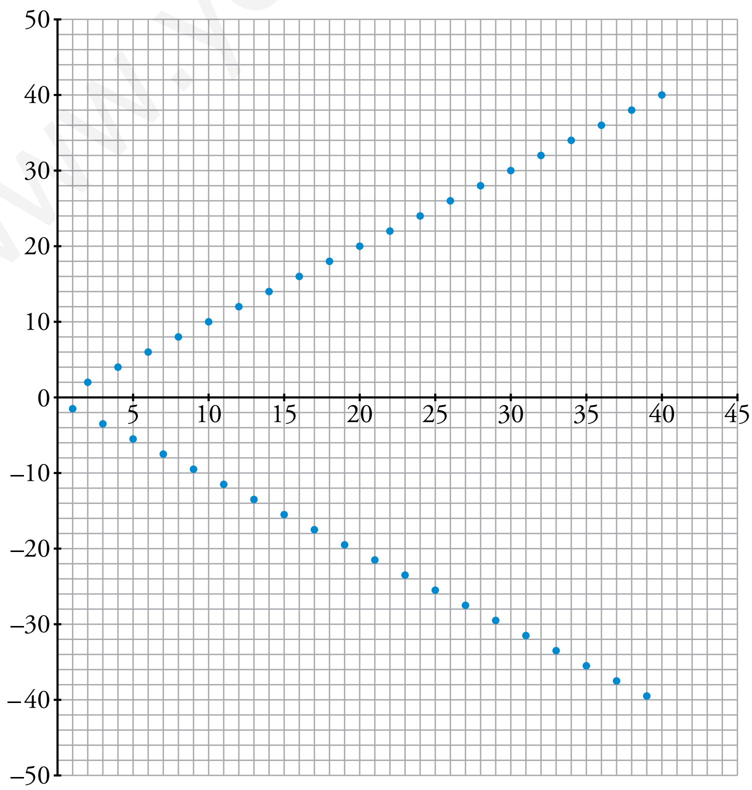
$b_7 = 1{,}25$; $b_8 = 3$; $b_9 = 5{,}25$; $b_{10} = 8, …,$

$b_{100} = 2\,303, …$

$\lim b_n = +\infty$

3 **Representa la sucesión** $c_n = (-1)^n \cdot n$ **y describe su comportamiento.**

¿Podríamos afirmar que $\lim c_n = l$ **o que** $\lim c_n = +\infty$**? ¿O acaso que** $\lim c_n = -\infty$**?**



Se trata de una sucesión oscilante porque su representación gráfica da saltos hacia arriba y hacia abajo. No tiene límite porque los términos no se acercan a ningún valor concreto. Tampoco tiene límte $+\infty$ porque los términos impares (que son negativos) se hacen cada vez más pequeños. Análogamente, tampoco tiene límite $-\infty$.

Página 63

4 Estudia el comportamiento de estas sucesiones para términos muy avanzados e indica su límite:

a) $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n-3}{n+5}$ **c)** $c_n = 3 - 2^n$ **d)** $d_n = 5 - \dfrac{1}{n^3}$

a) $a_{10} \approx 2{,}83$; $a_{100} \approx 32{,}83$; $a_{1\,000} \approx 332{,}83$; … $\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} \approx 1{,}133$; $b_{100} \approx 1{,}876$; $b_{1\,000} \approx 1{,}987$; … $\lim b_n = 2$

c) $c_{10} = -1\,021$; $c_{100} \approx -1{,}27 \cdot 103$; … $\lim c_n = -\infty$

d) $d_{10} = 4{,}999$; $d_{100} = 4{,}999999$; … $\lim d_n = 5$

5 Di, razonadamente, cuáles de las siguientes sucesiones tienen límite:

a) $a_n = -\dfrac{2}{n^2}$ **b)** $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+4}$ **c)** $c_n = (-1)^n n^2$ **d)** $d_n = (-1)^n \dfrac{2}{n^2}$

a) $a_{10} = -0{,}02$; $a_{100} = -0{,}0002$; $a_{1\,000} = -0{,}000002$; … $\lim a_n = 0$.

b) $b_{10} \approx 0{,}714$; $b_{11} \approx -0{,}733$; $b_{100} \approx 0{,}962$; $b_{101} \approx -0{,}962$; …

Los términos pares son positivos y tienden a 1; los términos impares son negativos y tienden a –1. La sucesión no tiene límite.

c) $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, $c_3 = -9$, $c_4 = 16$, $c_5 = -25$; …

Los términos impares son negativos y tienden a $-\infty$; los términos pares son positivos y tienden a $+\infty$. Es una sucesión oscilante. No tiene límite.

d) $d_1 = -2$; $d_2 = 0{,}5$; …; $d_{100} = 0{,}0002$; $d_{101} = -0{,}000196$; … $\lim d_n = 0$.

4 Algunos límites importantes

Página 65

1 a) Calcula $\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}$ y comprueba que "se parece mucho" a $e^{-1}=\frac{1}{e}$. Haz lo mismo con $\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1000}$.

¿Podemos suponer que $lím\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{1}{e}$?

b) Calcula $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}$ y comprueba que es aproximadamente igual a e^{-1}.

¿Podemos suponer también que la sucesión $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}$ tiende a e^{-1}?

a) $a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

$a_{80}=\left(1-\frac{1}{80}\right)^{80}=\left(\frac{79}{80}\right)^{80}\approx 0{,}36557$

$a_{1\,000}=\left(1-\frac{1}{1000}\right)^{1\,000}=\left(\frac{999}{1000}\right)^{1\,000}\approx 0{,}36770$

$e^{-1}=\frac{1}{e}\approx 0{,}36788$

Observamos que los resultados se acercan cada vez más a $\frac{1}{e}$.

Comprobándolo con algún término más avanzado, sí podríamos suponerlo.

b) $1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}=\frac{16\,481}{44\,800}\approx 0{,}36788$

Sí podemos suponerlo. Además, esta sucesión se acerca mucho más rápido a $\frac{1}{e}$ que la del apartado a), puesto que el término décimo de la sucesión ya es casi $\frac{1}{e}$.

2 Teniendo en cuenta que el término general de la sucesión de Fibonacci para n "grande" es:

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n-\phi^{-n})\approx\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

demuestra que $lím\,\frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.

Para n "grande", $\frac{f_{n+1}}{f_n}=\frac{\frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}\,\phi^{n+1}}{\sqrt{5}\,\phi^n}=\phi$, luego $lím\,\frac{f_{n+1}}{f_n}=\phi$.

3 Sabiendo que f_n es el término general de la sucesión de Fibonacci, calcula los siguientes límites:

a) $lím\,\frac{f_n}{f_{n+2}}$ **b) $lím\,\frac{f_n}{f_{n+3}}$**

Razonando de forma análoga al problema anterior, $lím\,\frac{f_n}{f_{n+2}}=\frac{1}{\phi^2}=\phi^{-2}$ y $lím\,\frac{f_n}{f_{n+3}}=\frac{1}{\phi^3}=\phi^{-3}$.

Ejercicios y problemas resueltos

Página 66

2. Los cuadrados van contracorriente

Hazlo tú. Halla la suma:

$-1 + 2 + \dots + 7 - 8 + 9 + \dots + 26 - 27 + 28 + \dots + 63 - 64 + 65 + \dots + 999 - 1\,000$

(suma de los 1 000 primeros naturales pero con los cubos perfectos con signo menos).

Calculamos la suma de los mil primeros números naturales sabiendo que forman una progresión aritmética.

$$S_{1\,000} = \frac{(1+1000)\cdot 1000}{2} = 500\,500$$

Ahora debemos restar dos veces la suma de los primeros 10 cubos perfectos:

$$Sc_{10} = 1^3 + 2^3 + \dots + 10^3 = \frac{10^2 \cdot 11^2}{4} = 3025$$

Por tanto, la suma pedida es $S_{1\,000} - 2 \cdot Sc_{10} = 500\,500 - 2 \cdot 3\,025 = 494\,450$.

Página 67

3. Término general

Hazlo tú. Halla el término general de estas sucesiones:

a) $\frac{2}{-1}, \frac{5}{1}, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \dots$

b) 5,23; 5,2323; 5,232323; …

c) $\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, \dots$

a) No es una progresión aritmética ni geométrica.

Los numeradores son una unidad mayor que los cuadrados perfectos.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia $d = 2$.

$$a_n = \frac{n^2+1}{-1+(n-1)\cdot 2} = \frac{n^2+1}{2n-3}$$

b) Podemos escribir así los términos de la sucesión:

$$b_1 = 5 + \frac{23}{100},\quad b_2 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000},\quad b_3 = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000}$$

Luego $b_n = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{100^2} + \dots + \frac{23}{100^n} = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots + \frac{1}{100^n}\right) =$

$$= 5 + 23 \cdot \left(\frac{\frac{1}{100} - \frac{1}{100^{n+1}}}{1 - \frac{1}{100}}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{100^n}}{100 - 1}\right) = 5 + 23 \cdot \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{99 \cdot 100^n}\right) = 5 + \frac{23}{99} - \frac{23}{99 \cdot 100^n}$$

c) Se trata de una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{-3}{5}$.

$$c_n = \frac{7}{5} + (n-1)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{10-3n}{5}$$

4. Límite de sucesiones

Hazlo tú. Estudia los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{5n+7}{2n-1}$ **b)** $b_n = \dfrac{(-1)\,n^2+4}{n+2}$

a) $a_{100} = \dfrac{5\cdot 100+7}{2\cdot 100-1} = \dfrac{507}{199} \approx 2{,}5477$

$a_{1\,000} = \dfrac{5\cdot 1000+7}{2\cdot 1000-1} = \dfrac{5\,007}{1999} \approx 2{,}5048$

$a_{10\,000} = \dfrac{5\cdot 10\,000+7}{2\cdot 10\,000-1} = \dfrac{50\,007}{19\,999} \approx 2{,}5005$

Observamos que los términos independientes del numerador y del denominador se hacen insignificantes comparados con los múltiplos de n.

Por tanto, $\lim \dfrac{5n+7}{2n-1} = \lim \dfrac{5n}{2n} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

b) $b_{100} = \dfrac{(-1)\cdot 100^2+4}{100+2} = -98$

$b_{1\,000} = \dfrac{(-1)\cdot 1000^2+4}{1000+2} = -998$

$b_{10\,000} = \dfrac{(-1)\cdot 10\,000^2+4}{10\,000+2} = -9\,998$

De forma similar al apartado anterior, los términos independientes son insignificantes comparados con los otros términos.

Por tanto, $\lim \dfrac{(-1)\,n^2+4}{n+2} = \lim \dfrac{(-1)\,n^2}{n} = \lim\,(-1)\,n = -\infty$

Ejercicios y problemas guiados

Página 68

1. Paso de decimal periódico a fracción

Utilizar las sucesiones para pasar el número periódico $5,4\overset{\frown}{7}$ a fracción.

- $5,477... = 5,4 + 0,07 + 0,007 + 0,0007 + ...$
- $a_1 = \frac{7}{100},\ a_2 = \frac{7}{1000},\ a_3 = \frac{7}{10\,000};\ r = \frac{1}{10};\ S_\infty = \frac{\frac{7}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{7}{90}$
- $5,4 = \frac{54}{10} = \frac{27}{5}$
- $5,477... = \frac{27}{5} + \frac{7}{90} = \frac{493}{90}$

2. Intereses bancarios

Se hace un depósito de 5 000 € en un banco que paga un interés del 4 % anual. ¿Cuántos años se ha de dejar para superar los 8 000 €?

- En n años el capital se multiplicará por $1,04^n$.
- $8\,000 = 5\,000 \cdot 1,04^n \to \frac{8\,000}{5\,000} = 1,04^n \to 1,6 = 1,04^n \to$

$$\to \log 1,6 = n \cdot \log 1,04 \to n = \frac{\log 1,6}{\log 1,04} \approx 11,984$$

Por tanto, superará los 8 000 € a los 12 años.

3. Límites de sucesiones

Hallar el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\frac{4}{3},\ 7,\ -10,\ -\frac{13}{3},\ -\frac{16}{5},\ ...$

b) $\sqrt{3},\ \sqrt{3\sqrt{3}},\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}},\ ...$

a) $\frac{4}{3}, \frac{7}{1}, \frac{10}{-1}, \frac{13}{-3}, \frac{16}{-5}, ...$

Los numeradores forman una progresión aritmética de diferencia $d = 3$.

Los denominadores forman una progresión aritmética de diferencia $d = -2$.

$$a_n = \frac{4+(n-1)\cdot 3}{3+(n-1)\cdot(-2)} = \frac{3n+1}{-2n+5}$$

$$a_{1\,000} = \frac{3\cdot 1000+1}{-2\cdot 1000+5} = -\frac{3001}{1995} \approx -1,5043 \qquad a_{10\,000} = \frac{3\cdot 10\,000+1}{-2\cdot 10\,000+5} = -\frac{30\,001}{19\,995} \approx -1,5004$$

$$\text{lím}\ \frac{3n+1}{-2n+5} = -\frac{3}{2} = -1,5$$

b) $b_1 = \sqrt{3} = 3^{1/2} \qquad b_2 = \sqrt{3\sqrt{3}} = (3\cdot 3^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4} \qquad b_3 = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = (3\cdot(3\cdot 3^{1/2})^{1/2})^{1/2} = 3^{1/2+1/4+1/8}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ es la suma de los elementos de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

La suma es $S_\infty = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

Luego $\text{lím}\ b_n = 3^1 = 3$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 69

Para practicar

Criterio para formar sucesiones

1 Escribe los cinco primeros términos de las sucesiones cuyos términos generales son estos:

a) $a_n = 3 + \dfrac{2}{10^n}$ **b)** $b_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ **c)** $c_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$

d) $d_n = 2^{-n}$ **e)** $e_n = n!$ **f)** $f_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n - n}{2}$

a) $a_1 = 3{,}2$; $a_2 = 3{,}02$; $a_3 = 3{,}002$; $a_4 = 3{,}0002$; $a_5 = 3{,}00002$

b) $b_1 = 0$; $b_2 = \dfrac{3}{2}$; $b_3 = \dfrac{8}{3}$; $b_4 = \dfrac{15}{4}$; $b_5 = \dfrac{24}{5}$

c) $c_1 = 1$; $c_2 = \dfrac{5}{3}$; $c_3 = 2$; $c_4 = \dfrac{11}{5}$; $c_5 = \dfrac{7}{3}$

d) $d_1 = \dfrac{1}{2}$; $d_2 = \dfrac{1}{4}$; $d_3 = \dfrac{1}{8}$; $d_4 = \dfrac{1}{16}$; $d_5 = \dfrac{1}{32}$

e) $e_1 = 1$; $e_2 = 2$; $e_3 = 6$; $e_4 = 24$; $e_5 = 120$

f) $f_1 = -1$; $f_2 = 0$; $f_3 = -3$; $f_4 = 0$; $f_5 = -5$

2 Escribe el término general de estas sucesiones:

a) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$ **b)** $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$

c) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{9}{9}, \dfrac{16}{11}, \ldots$ **d)** $0, \dfrac{3}{5}, \dfrac{8}{10}, \dfrac{15}{17}, \dfrac{24}{26}, \ldots$

e) 2, 5, 10, 17, 26, … **f)** 1, 3, 6, 10, 15, …

a) $a_n = \dfrac{n}{n-1}$

b) $b_n = \dfrac{1}{n+1}$

c) Los numeradores son cuadrados perfectos y los denominadores forman una progresión aritmética.

$$c_n = \frac{n^2}{5+(n-1)\cdot 2} = \frac{n^2}{2n+3}$$

d) $d_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$

e) $e_n = n^2 + 1$

f) $f_1 = 1$; $f_2 = 1 + 2$; $f_3 = 1 + 2 + 3$; $f_4 = 1 + 2 + 3 + 4$; …; $f_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3 Construye dos sucesiones cuyas leyes de recurrencia sean:

a) $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$ **b)** $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = \dfrac{a_{n-1} \cdot a_{n-2}}{2}$

a) $0, 2, 1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{11}{8}, \dfrac{21}{16}, \dfrac{43}{32}, \ldots$

b) $1, 2, 1, 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{128}, \ldots$

4 **Busca una ley de recurrencia para definir las siguientes sucesiones. Halla tres términos más de cada una.**

a) $4, 7, 3, -4, -7, \ldots$

b) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

a) $a_1 = 4,\ a_2 = 7,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ para $n > 2$

b) $b_1 = 2,\ b_2 = 3,\ b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$ para $n > 2$

Progresiones aritméticas

5 **De las siguientes sucesiones, di cuáles son progresiones aritméticas y escribe su término general:**

a) 1,2; 2,4; 3,6; 4,8; 6; …

b) 5; 4,6; 4,2; 3,8; 3,4; …

c) 1, 2, 4, 7, 11, …

d) 14, 13, 11, 8, 4, …

e) $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$

f) $1, \frac{89}{100}, \frac{78}{100}, \frac{67}{100}, \frac{56}{100}, \ldots$

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 1{,}2$ y $d = 1{,}2$.

$a_n = 1{,}2 + (n-1) \cdot 1{,}2 = 1{,}2n.$

b) Es una progresión aritmética con $b_1 = 5$ y $d = -0{,}4$.

$b_n = 5 + (n-1) \cdot (-0{,}4) = -0{,}4n + 5{,}4.$

c) y d) no son progresiones aritméticas.

e) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{4}$.

$e_n = \frac{3}{4} + (n-1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{n+2}{4}$

f) La sucesión es una progresión aritmética de diferencia $d = \frac{-11}{100}$.

$f_n = 1 + (n-1) \cdot \left(-\frac{11}{100}\right) = \frac{111-11n}{100}$

6 **Di cuáles de estas sucesiones son progresiones aritméticas:**

a) $a_n = 3n$

b) $b_n = 5n - 4$

c) $c_n = \frac{1}{n}$

d) $d_n = \frac{8-3n}{4}$

e) $e_n = 5 + \frac{n}{2}$

f) $f_n = n^2 - 1$

a) $a_n - a_{n-1} = 3n - 3(n-1) = 3n - 3n + 3 = 3$

Es una progresión aritmética con $d = 3$.

b) $b_n - b_{n-1} = 5n - 4 - [5(n-1) - 4)] = 5n - 4 - 5n + 5 + 4 = 5$

Es una progresión aritmética con $d = 5$.

c) $c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ c_3 = \frac{1}{3}, c_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

$c_2 - c_1 = \frac{-1}{2} \neq c_3 - c_2 = \frac{1}{6}$. No es una progresión aritmética.

d) $d_n - d_{n-1} = \frac{8-3n}{4} - \frac{8-3(n-1)}{4} = \frac{8-3n-8+3n-3}{4} = \frac{-3}{4}$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{-3}{4}$.

e) $e_n - e_{n-1} = 5 + \frac{n}{2} - \left(5 + \frac{n-1}{2}\right) = 5 + \frac{n}{2} - 5 - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{2}$.

f) $f_1 = 0,\ f_2 = 3,\ f_3 = 8,\ f_4 = 15, \ldots$

$f_2 - f_1 = 3 \neq f_3 - f_2 = 5$. No es una progresión aritmética.

7 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

a) 3, 6, 9, 12, 15, …

b) 5; 4,9; 4,8; 4,7; 4,6; …

c) $c_n = 4n - 2$

d) $d_n = \dfrac{1-2n}{2}$

a) $a_1 = 3;\ \ a_{25} = a_1 + 24d = 3 + 24 \cdot 3 = 75$

$$S_{25} = \frac{(a_1 + a_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(3+75) \cdot 25}{2} = 975$$

b) $b_1 = 5;\ \ b_{25} = b_1 + 24d = 5 - 24 \cdot 0{,}1 = 2{,}6$

$$S_{25} = \frac{(b_1 + b_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(5+2{,}6) \cdot 25}{2} = 95$$

c) $c_1 = 2;\ \ c_{25} = 98$

$$S_{25} = \frac{(c_1 + c_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{(2+98) \cdot 25}{2} = 1250$$

d) $d_1 = \dfrac{-1}{2};\ \ d_{25} = \dfrac{-49}{2}$

$$S_{25} = \frac{(d_1 + d_{25}) \cdot 25}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{2} - \frac{49}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{-625}{2} = -312{,}5$$

8 Halla la suma de los términos comprendidos entre a_{25} y a_{30}, ambos inclusive, de las progresiones aritméticas del ejercicio anterior.

a) $a_{25} = 3 + 24 \cdot 3 = 75$ $\qquad a_{30} = 3 + 29 \cdot 3 = 90$

La suma es: $\dfrac{(75+90) \cdot 6}{2} = 495$

b) $b_{25} = 5 + 24 \cdot (-0{,}1) = 2{,}6$ $\qquad b_{30} = 3 + 29 \cdot (-0{,}1) = 0{,}1$

La suma es: $\dfrac{(2{,}6+0{,}1) \cdot 6}{2} = 8{,}1$

c) $c_{25} = 4 \cdot 25 - 2 = 98$ $\qquad c_{30} = 4 \cdot 30 - 2 = 118$

La suma es: $\dfrac{(98+118) \cdot 6}{2} = 648$

d) $d_{25} = \dfrac{1-2 \cdot 25}{2} = -\dfrac{49}{2}$ $\qquad d_{30} = \dfrac{1-2 \cdot 30}{2} = -\dfrac{59}{2}$

La suma es: $\dfrac{\left[-\frac{49}{2} + \left(-\frac{59}{2}\right)\right] \cdot 6}{2} = -162$

Progresiones geométricas

9 De las siguientes sucesiones, ¿cuáles son progresiones geométricas? Escribe tres términos más en cada una y su término general.

a) 32, 16, 8, 4, 2, …

b) 1; 0,1; 0,01; 0,001; …

c) 1, 4, 9, 16, 25, …

d) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

a) Es una progresión geométrica con $a_1 = 32$ y $r = \dfrac{1}{2}$.

$$a_6 = 1,\ \ a_7 = \frac{1}{2},\ \ a_8 = \frac{1}{4};\ \ a_n = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2^5}{2^{n-1}} = 2^{6-n}$$

b) No es una progresión geométrica; $b_6 = 36$, $b_7 = 49$, $b_8 = 64$, $b_n = n^2$.

c) Es una progresión geométrica con $c_1 = 1$ y $r = 0{,}1$.

$c_6 = 0{,}00001$; $c_7 = 0{,}000001$; $c_8 = 0{,}0000001$; $c_n = 1 \cdot 0{,}1^{n-1} = 0{,}1^{n-1}$

d) Es una progresión geométrica con $d_1 = \sqrt{2}$ y $r = \sqrt{2}$.

$d_6 = 8$; $d_7 = 8$; $d_8 = 16$; $d_n = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^n$.

10 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas y halla la suma de los infinitos términos en los casos que sea posible:

a) $a_1 = 32$, $r = 1/2$

b) $a_1 = 10$, $r = 1/10$

c) $a_1 = 2^{-10}$, $r = 2$

d) $a_1 = -5$, $r = -1/4$

$$S_{25} = \frac{a_{25} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot r^{25} - a_1}{r-1}, \quad S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

a) $S_{25} = \dfrac{32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{25} - 32}{\frac{1}{2} - 1} = 63{,}99999809 \approx 64$

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{32}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{32}{\frac{1}{2}} = 64$

b) $S_{25} = \dfrac{10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{25} - 10}{\frac{1}{2} - 1} \approx 11{,}1 \approx \dfrac{100}{9}$

$S_\infty = \dfrac{a_1}{1-r} = \dfrac{32}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{100}{9} = 11{,}1$

c) $S_{25} = \dfrac{2^{-10} \cdot 2^{25} - 2^{-10}}{2-1} = 32\,767{,}99902 \approx 32\ 768$

No se puede calcular S_∞ porque $|r|$ no es mayor que 1.

d) $S_{25} = \dfrac{(-5) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^{25} - (-5)}{-\frac{1}{4} - 1} \approx -4$

$S_\infty = \dfrac{-5}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \dfrac{-5}{\frac{5}{4}} = -4$

11 Halla la suma de los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de la progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = \dfrac{1}{512}$ y cuya razón es $r = -2$.

$a_{10} = \dfrac{1}{512} \cdot (-2)^9 = -1$

$a_{20} = \dfrac{1}{512} \cdot (-2)^{19} = -1024$

La suma es $\dfrac{(-2) \cdot (-1024) - (-1)}{-2-1} = -683$.

Suma de potencias

12 Calcula.

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 100^2$

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2 = \dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 42\,925$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2) = 2^2 \dfrac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 171\,700$

13 **Calcula.**

$\mathbf{21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3}$

$21^3 + 22^3 + \ldots + 58^3 + 59^3 + 60^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + 60^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 20^3) =$

$$= \frac{60^2 \cdot 61^2}{4} - \frac{20^2 \cdot 21^2}{4} = 3\,304\,800$$

Límites

14 **Calcula los términos a_{10}, a_{100} y $a_{1\,000}$, en estas sucesiones e indica cuál es su límite:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n-1}$ **b)** $a_n = \dfrac{2n+5}{n}$ **c)** $a_n = \dfrac{5}{n} - 1$ **d)** $a_n = 3 - 7n$

a) $a_{10} = 0,\widehat{1}$; $a_{100} = 0,\widehat{01}$; $a_{1\,000} = 0,\widehat{001}$

$\lim a_n = 0$

b) $a_{10} = 2{,}5$; $a_{100} = 2{,}05$; $a_{1\,000} = 2{,}005$

$\lim a_n = 2$

c) $a_{10} = -0{,}5$; $a_{100} = -0{,}95$; $a_{1\,000} = -0{,}995$

$\lim a_n = -1$

d) $a_{10} = -6{,}7$; $a_{100} = -697$; $a_{1\,000} = -6\,997$

$\lim a_n = -\infty$

15 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos muy avanzados e indica cuál es el límite de cada una de ellas:**

a) $a_n = 5n - 10$ **b)** $b_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ **c)** $c_n = \dfrac{n}{2n+1}$ **d)** $d_n = 10 - 5n + n^2$

e) $e_n = 1 - (n+2)^2$ **f)** $f_n = \dfrac{n \cdot (-1)^n}{n+1}$ **g)** $g_n = (-1)^n \cdot (n-1)^2$ **h)** $h_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

i) $i_n = n \cdot (-1)^n - n^2$ **j)** $j_n = \dfrac{3n}{n^2+1}$ **k)** $k_n = \dfrac{5}{3n+2}$ **l)** $l_n = (-1)^{n+1}$

a) $a_{10} = 40$; $a_{100} = 490$; $a_{1\,000} = 4\,990$

$\lim a_n = +\infty$

b) $b_{10} = 0{,}63$; $b_{100} \approx 0{,}9603$; $b_{1\,000} \approx 0{,}996$

$\lim b_n = 1$

c) $c_{10} \approx 0{,}476$; $c_{100} \approx 0{,}498$; $c_{1\,000} \approx 0{,}4998$

$\lim c_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

d) $d_{1\,000} = 10 - 5 \cdot 1\,000 + 1\,000^2 = 995\,010$; $d_{10\,000} = 10 - 5 \cdot 10\,000 + 10\,000^2 = 99\,950\,010$

$\lim d_n = +\infty$

e) $e_{1\,000} = 1 - (1\,000 + 2)^2 = -1\,004\,003$; $e_{10\,000} = 1 - (10\,000 + 2)^2 = -100\,040\,003$

$\lim e_n = -\infty$

f) $f_{1\,000} = \dfrac{1000 \cdot (-1)^{1000}}{1000+1} = \dfrac{1000}{1001}$; $f_{1\,001} = \dfrac{1001 \cdot (-1)^{1001}}{1001+1} = -\dfrac{1001}{1002}$

La sucesión de los términos pares tiende a 1 y la de los impares a –1, luego no tiene límite (además, es oscilante).

g) $g_{1\,000} = (-1)^{1\,000} \cdot (1\,000 - 1)^2 = 998\,001$; $g_{1\,001} = (-1)^{1\,001} \cdot (1\,001 - 1)^2 = -1\,000\,000$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a $+\infty$ y los impares tienden a $-\infty$. Luego no tiene límite.

h) $h_{1\,000} = \dfrac{(-1)^{1000}}{1000^2} = \dfrac{1}{1000\,000}$; $h_{1\,001} = \dfrac{(-1)^{1001}}{1001^2} = -\dfrac{1}{1002\,001}$

Aunque la sucesión es oscilante, todos los términos tienden a 0, luego $\lim h_n = 0$.

i) $i_{1\,000} = 1\,000 \cdot (-1)^{1\,000} - 1\,000^2 = -999\,000$; $i_{1\,001} = 1\,001 \cdot (-1)^{1\,001} - 1\,001^2 = -1\,003\,002$

Cuando n es grande, el primer término apenas influye en n^2 y, por tanto, $\lim i_n = \lim -n^2 = -\infty$.

j) $j_{1\,000} = \dfrac{3 \cdot 1000}{1000^2 + 1} = \dfrac{3000}{1000\,001}$; $j_{10\,000} = \dfrac{3 \cdot 10\,000}{10\,000^2 + 1} = \dfrac{30\,000}{100\,000\,001}$

Observamos que el término independiente del denominador es insignificante con respecto a n^2.

$\lim j_n = \lim \dfrac{3n}{n^2} = \lim \dfrac{3}{n} = 0$

k) $k_{1\,000} = \dfrac{5}{3 \cdot 1000 + 2} = \dfrac{5}{3002}$; $k_{10\,000} = \dfrac{5}{3 \cdot 10\,000 + 2} = \dfrac{5}{30\,002}$

$\lim k_n = 0$

l) $l_{1\,000} = (-1)^{1\,000\,+\,1} = -1$; $l_{1\,001} = (-1)^{1\,001\,+\,1} = 1$

Esta sucesión no tiene límite porque los términos pares siempre valen –1 y los impares, 1.

Página 70

Para resolver

16 Calcula la suma de:

a) Los números impares de tres cifras.

b) Los cuadrados de los números impares de tres cifras.

a) Es la suma de los términos de una progresión aritmética en la que el primer término es 101, el último es 999, y hay 450 sumandos:

$$S = \frac{(101 + 999) \cdot 450}{2} = 247\,500$$

b) Primero calcularemos:

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 999^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$$

$$= \frac{999 \cdot 1\,000 \cdot 1\,997}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = 332\,162\,150$$

Ahora bien:

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2 = (101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 999^2) - (102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2)$$

Por otra parte:

$$102^2 + 104^2 + 106^2 + \ldots + 998^2 = (2 \cdot 51)^2 + (2 \cdot 52)^2 + (2 \cdot 53)^2 + \ldots + (2 \cdot 499)^2 =$$

$$= 4 \cdot (51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2)$$

Y de la misma forma que al principio,

$$51^2 + 52^2 + \ldots + 499^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 499^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 50^2) =$$

$$= \frac{499 \cdot 500 \cdot 999}{6} - \frac{50 \cdot 51 \cdot 101}{6} = 41\,498\,825$$

Finalmente,

$$101^2 + 103^2 + 105^2 + \ldots + 999^2 = 332\,162\,150 - 4 \cdot 41\,498\,825 = 166\,166\,850$$

17 **¿Cuánto vale la suma de los 100 primeros múltiplos de 7?**

Queremos calcular la suma de los 100 primeros términos de una progresión aritmética en la que $a_1 = 7$ y $d = 7$.

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2} = \frac{(7 + 700) \cdot 100}{2} = 35\,350$$

18 **En una progresión aritmética sabemos que $d = 3$, $a_k = 34$ y $S_k = 133$. Calcula k y a_1.**

$$\left.\begin{array}{l} a_k = a_1 + (k-1) \cdot d \;\rightarrow\; 34 = a_1 + (k-1) \cdot 3 \\ S_k = \dfrac{(a_1 + a_k) \cdot k}{2} \;\rightarrow\; 133 = \dfrac{(a_1 + 34) \cdot k}{2} \end{array}\right\}$$

$34 = a_1 + 3k - 3 \;\rightarrow\; a_1 = 37 - 3k$

$$133 = \frac{(37 - 3k + 34) \cdot k}{2} \;\rightarrow\; 266 = (71 - 3k)\,k$$

$26 = 71k - 3k^2 \;\rightarrow\; 3k^2 - 71k + 266 = 0$

$$k = \frac{71 \pm \sqrt{5041 - 3192}}{6} = \frac{71 \pm \sqrt{1849}}{6} = \frac{71 \pm 43}{6} = \begin{cases} k = 14/3 \text{ (no vale)} \\ k = 19 \end{cases}$$

$a_1 = 37 - 3 \cdot 19 = 37 - 57 = -20 \;\rightarrow\; a_1 = -20$

19 **En una progresión geométrica de razón $r = 3$ conocemos $S_6 = 1\,456$. Calcula a_1 y a_4.**

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot 5 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot r^6 - a_1}{r - 1} = \frac{a_1 \cdot 729 - a_1}{2} = \frac{728a_1}{2} = 364a_1 = 1\,456 \;\rightarrow\; a_1 = 4$$

$a_4 = a_1 \cdot r^3 = 4 \cdot 27 = 108$

20 **La suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es igual a 4 y $a_2 = 1$. Calcula a_1 y la razón.**

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r = 1 \;\rightarrow\; a_1 = \dfrac{1}{r} \\ S_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r} = \dfrac{1/r}{1 - r} = \dfrac{1}{r - r^2} = 4 \;\rightarrow\; 1 = 4r - 4r^2 \end{cases}$$

$$4r^2 - 4r + 1 = 0 \;\rightarrow\; r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; r = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; a_1 = 2$$

21 **Sabemos que la suma de 138 números naturales consecutivos es 30 291. ¿Cuáles son el primero y el último?**

Supongamos que el primer término es k. Entonces el último será $k + 137$, luego:

$$30\,291 = \frac{(k + k + 137) \cdot 138}{2} \;\rightarrow\; k = 151$$ es el primer número natural y $k + 137 = 288$ es el último

22 **Calcula la suma de todos los términos comprendidos entre el 10 y el 20, ambos inclusive, de estas sucesiones dadas por recurrencia:**

a) $a_1 = 20$, $a_n = a_{n-1} + 4$

b) $b_1 = 7$, $b_2 = 13$, $b_n = b_{n-2} + 12$

c) $c_1 = 0{,}625$, $c_n = 2c_{n-1}$

d) $d_1 = 4$, $d_2 = 6$, $d_n = d_{n-2} \cdot \dfrac{9}{4}$

a) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $a_1 = 20$ y $d = 4$.

$a_{10} = 20 + 9 \cdot 4 = 56$; $a_{20} = 20 + 19 \cdot 4 = 96$

La suma es: $\dfrac{(56 + 96) \cdot 11}{2} = 836$

b) Esta sucesión es una progresión aritmética en la que $b_1 = 7$ y $d = 6$.

$b_{10} = 7 + 9 \cdot 6 = 61$; $b_{20} = 7 + 19 \cdot 6 = 121$

La suma es: $\dfrac{(61+121)\cdot 11}{2} = 1001$

c) En esta ocasión tenemos una progresión geométrica en la que $c_1 = 0{,}625$ y $r = 2$.

$c_{10} = 0{,}625 \cdot 2^9 = 320$; $c_{20} = 0{,}625 \cdot 2^{19} = 327\,680$

La suma es: $\dfrac{2\cdot 327\,680 - 320}{2-1} = 655\,040$

d) Esta sucesión es una progresión geométrica en la que $d_1 = 4$ y $r = \dfrac{3}{2}$.

$d_{10} = 4\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^9 = \dfrac{19\,683}{128}$; $d_{20} = 4\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{19} = \dfrac{1\,162\,261\,467}{131\,072}$

La suma es: $\dfrac{\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1\,162\,261\,467}{131\,072} - \dfrac{19\,683}{128}}{\dfrac{3}{2}-1} \approx 26\,294{,}5$

23 **Halla la suma de todos los términos a partir del décimo de esta sucesión: $a_1 = 6\,144$, $a_2 = 3\,072$, $a_n = \dfrac{1}{4}\, a_{n-2}$.**

La sucesión dada es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$. Por tanto, se puede calcular la suma de los infinitos términos de la sucesión.

$a_{10} = 6\,144 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = 12$

La suma pedida es $\dfrac{12}{1-\dfrac{1}{2}} = 24$.

24 **Una célula alcanza la madurez y se reproduce por mitosis al cabo de 40 minutos. Partiendo de un cultivo inicial de 625 células, ¿cuántas tendremos al cabo de 4 horas?**

Observemos la sucesión;

$a_1 = 625$ (cultivo de partida)

$a_2 = 625 \cdot 2 = 1\,250$ (40 min)

$a_3 = 1\,250 \cdot 2 = 625 \cdot 2^2 = 2\,500$ (80 min)

Vemos que los términos forman una progresión geométrica de razón $r = 2$.

El término general es $a_n = 625 \cdot 2^{n-1}$.

Por otro lado, 4 h = 4 · 60 min = 240 min se corresponden con $n = 7$.

El número de células es $a_7 = 625 \cdot 2^6 = 40\,000$.

25 **En la primera década del siglo XXI la población española ha crecido un 1,4 % anualmente. Si a finales de 2010 había 46 millones de habitantes, ¿cuántos había a comienzos del año 2001?**

Si llamamos P a la población a comienzos de 2001, la población evolucionará de la siguiente forma:

- Finales de 2001: $P\left(1+\dfrac{1{,}4}{100}\right)$
- Finales de 2002: $P\left(1+\dfrac{1{,}4}{100}\right)^2$

…

- Finales de 2010: $P\left(1+\dfrac{1{,}4}{100}\right)^{10}$

Por tanto, $P\left(1+\dfrac{1{,}4}{100}\right)^{10} = 46 \rightarrow P\cdot 1{,}014^{10} = 46 \rightarrow P = \dfrac{46}{1{,}014^{10}} \approx 40\,029\,326$ habitantes.

26 **Se sabe que los ángulos de cierto pentágono están en progresión aritmética. Si el menor mide 50°, halla los demás.**

* ***Recuerda cómo se obtiene la suma de los ángulos de un pentágono.***

La suma de los ángulos de un pentágono es: $180° \cdot (5 - 2) = 540°$

Si d es la diferencia de dicha progresión, tenemos que: $\frac{(50 + 50 + 4d) \cdot 5}{2} = 540$

de donde se obtiene que $d = 29$ y los demás ángulos son: 79°, 108°, 137° y 166°.

27 **Los lados de un hexágono están en progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el mayor mide 13 cm y que su perímetro es de 48 cm.**

Llamamos a los lados a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

Sabemos que $a_6 = 13$ cm y que $S_6 = 48$. Por tanto:

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 13 = a_1 + 5d \rightarrow a_1 = 13 - 5d \\ S_6 = \frac{(a_1 + a_6) \cdot 6}{2} \rightarrow 48 = (13 - 5d + 13) \cdot 3 \rightarrow 48 = (26 - 5d) \cdot 3 \end{cases}$$

$48 = 78 - 15d \rightarrow 15d = 30 \rightarrow d = \frac{30}{15} = 2 \rightarrow d = 2$

$a_1 = 13 - 5 \cdot 2 = 13 - 10 = 3 \rightarrow a_1 = 3$

Los lados del hexágono miden 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm y 13 cm.

28 **En un cine, la segunda fila de butacas está a 10 m de la pantalla y la séptima fila está a 16 m. ¿En qué fila debe sentarse una persona que le guste ver la pantalla a una distancia de 28 m?**

$a_7 = 16 \rightarrow a_7 = a_2 + 5d = 10 + 5d = 16 \rightarrow d = 1{,}2$

(La distancia entre las dos filas consecutivas es de 1,2 metros).

Buscamos n para que $a_n = 28$ m:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 8{,}8 + (n - 1) \cdot 1{,}2 = 28 \rightarrow 8{,}8 + 1{,}2n - 1{,}2 = 28 \rightarrow 1{,}2n = 20{,}4 \rightarrow n = 17$$

La fila 17 está a 28 metros.

29 **La maquinaria de una fábrica pierde cada año un 20 % de su valor. Si costó 4 millones de euros, ¿en cuánto se valorará después de 10 años de funcionamiento?**

– Al cabo de 1 año valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8$ €

– Al cabo de 2 años valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^2$ €

…

– Al cabo de 10 años valdrá $\rightarrow (4 \cdot 10^6) \cdot 0{,}8^{10} \approx 429496{,}73$ €

30 **El 1 de enero depositamos 5 000 € en una cuenta bancaria a un interés anual del 6 % con abono mensual de intereses. ¿Cuánto dinero tendremos un año después si no hemos sacado nada en ese tiempo?**

* ***Un 6 % anual corresponde a $\frac{6}{12}$ = 0,5 % mensual.***

– Al cabo de 1 mes tendremos $\rightarrow 5\,000 \cdot 1{,}005$ €

– Al cabo de 2 meses tendremos $\rightarrow 5\,000 \cdot 1{,}005^2$ €

…

– Al cabo de 12 meses tendremos $\rightarrow 5\,000 \cdot 1{,}005^{12} \approx 5\,308{,}39$ €

31 **Recibimos un préstamo de 2 000 € al 10 % de interés anual y hemos de devolverlo en 4 años, pagando cada año los intereses de la parte adeudada más la cuarta parte del capital prestado. Calcula lo que tenemos que pagar cada año.**

$a_1 = 500 + 2\,000 \cdot 0{,}1 = 700$ €

$a_2 = 500 + 1\,500 \cdot 0{,}1 = 650$ €

$a_3 = 500 + 1\,000 \cdot 0{,}1 = 600$ €

$a_4 = 500 + 500 \cdot 0{,}1 = 550$ €

32 **Utiliza las sumas de los términos de una progresión geométrica para expresar los siguientes números decimales periódicos como fracciones:**

a) $2{,}\widehat{4}$ **b)** $1{,}\widehat{72}$ **c)** $0{,}3\widehat{5}$ **d)** $3{,}75\widehat{923}$

a) $2{,}444\ldots = 2 + \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \ldots = 2 + 4\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\right) =$

$$= 2 + 4 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 2 + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{22}{9}$$

b) $1{,}727272\ldots = 1 + \frac{72}{100} + \frac{72}{10\,000} + \frac{72}{100\,000} + \ldots = 1 + 72 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{10\,000} + \frac{1}{10\,000\,000} + \ldots\right) =$

$$= 1 + 72 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 1 + 72 \cdot \frac{1}{99} = \frac{19}{11}$$

c) $0{,}35555\ldots = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10\,000} + \ldots = \frac{3}{10} + 5 \cdot \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10\,000} + \ldots\right) =$

$$= \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{1}{90} = \frac{16}{45}$$

d) $3{,}75923923923\ldots = 3 + \frac{75}{100} + \frac{923}{100\,000} + \frac{923}{100\,000\,000} + \ldots =$

$$= \frac{375}{100} + 923 \cdot \left(\frac{1}{100\,000} + \frac{1}{100\,000\,000} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{\frac{1}{100\,000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{375}{100} + 923 \cdot \frac{1}{99\,900} = \frac{93\,887}{24\,975}$$

33 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = 1 + \frac{1}{2^n}$ **b)** $b_n = \frac{5^n}{n^7}$ **c)** $c_n = \frac{(n-1)^2}{n^2+3}$ **d)** $d_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{2n}$

e) $e_n = \frac{3n+1}{\sqrt{n}}$ **f)** $f_n = \sqrt{\frac{4n-3}{n+2}}$ **g)** $g_n = \frac{(1+n)^3}{(n-2)^2}$ **h)** $h_n = \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$

a) $a_{1\,000} = 1 + \frac{1}{2^{1000}} \approx 1$

Vemos que el límite es 1 porque el segundo sumando tiende a 0.

b) $b_{10} = \frac{5^{10}}{10^7} = \frac{125}{128}$; $b_{100} = \frac{5^{100}}{100^7} = 7{,}8886 \times 10^{55}$; $b_{150} = \frac{5^{150}}{150^7} = 4{,}1007 \times 10^{89}$

Como se puede ver la sucesión crece indefinidamente y el límite es $+\infty$.

c) $c_{10} = 0{,}7864$; $c_{100} = 0{,}9798$; $c_{1\,000} = 0{,}9980$

$lím\ c_n = 1$

d) $d_{10} = 0{,}5025$; $d_{100} = 0{,}500025$; $d_{1\,000} = 0{,}50000025$

$lím\ d_n = 0{,}5 = \frac{1}{2}$

e) $e_{10} = 9{,}80$; $e_{100} = 30{,}1$; $e_{1\,000} = 94{,}90$

$lím\ e_n = +\infty$

f) $f_{10} = 1{,}756$; $f_{100} = 1{,}973$; $f_{1\,000} = 1{,}997$

$lím\ f_n = 2$

g) $g_{10} = 20{,}797$; $g_{100} = 107{,}278$; $g_{1\,000} = 1007{,}027$

$lím\ g_n = +\infty$

h) $h_{10} = 0{,}760$; $h_{100} = 0{,}909$; $h_{1\,000} = 0{,}969$

$lím\ h_n = 1$

34 Calcula el término general de las siguientes sucesiones y luego halla su límite:

a) $\frac{3}{-2}, \frac{5}{-7}, \frac{7}{-12}, \frac{9}{-17}, \frac{11}{-22}, \dots$ **b)** $\frac{7}{1}, \frac{4}{4}, \frac{1}{9}, \frac{-2}{16}, \frac{-5}{25}, \dots$

c) $\frac{-99}{10}, \frac{-96}{20}, \frac{-91}{30}, \frac{-84}{40}, \frac{-75}{50}, \dots$

a) Tanto las sucesiones de los numeradores como las de los denominadores son progresiones aritméticas.

$a_n = \frac{3+(n-1)\cdot 2}{-2+(n-1)\cdot(-5)} = \frac{2n+1}{-5n+3}$ $lím\ a_n = -\frac{2}{5}$

b) La sucesión de los numeradores es una progresión aritmética y la de los denominadores es la sucesión de los cuadrados de los números naturales.

$b_n = \frac{7+(n-1)\cdot(-3)}{n^2} = \frac{-3n+10}{n^2}$ $lím\ b_n = 0$

c) La sucesión de los numeradores se obtiene restando a 100 los cuadrados de los números naturales. Los denominadores son los múltiplos de 10.

$c_n = \frac{100-n^2}{10n}$ $lím\ c_n = -\infty$

35 Halla el término general y estudia el límite de esta sucesión:

$$\mathbf{2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[5]{2}, \dots}$$

$a_n = \sqrt[n]{2} = 2^{1/n}$

$a_1 = 2$; $a_2 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$; $a_3 = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$; $a_4 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}1892$; …; $a_{10} \approx 1{,}0718$

$a_{100} \approx 1{,}00696$; $lím\ a_n = 1$

36 a) Demuestra que:

$$\mathbf{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)}$$

b) Calcula la suma de los cuadrados de los 50 primeros números pares.

c) Calcula la suma de los cuadrados de todos los números impares menores que 100.

a) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 = (2\cdot 1)^2 + (2\cdot 2)^2 + (2\cdot 3)^2 + (2\cdot 4)^2 + (2\cdot 5)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$

b) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2) = 2^2\,\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6} = 171\,700$

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 99^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 99^2 + 100^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 98^2 + 100^2) =$

$$= \frac{100\cdot 101\cdot 201}{6} - 171\,700 = 338\,350 - 171\,700 = 166\,650$$

37 Halla la siguiente suma:

$$11^3 + 13^3 + 15^3 + 17^3 + \ldots + 33^3$$

Llamamos $S = 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3$.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3 + 11^3 + 12^3 + \ldots + 32^3 + 33^3 = \frac{33^2 \cdot 34^2}{4} = 314\,721$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + 32^3 = 2^3(1^3 + 2^3 + \ldots + 16^3) = 8 \cdot \frac{16^2 \cdot 17^2}{4} = 147\,968$$

Por tanto:

$$1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3 + 11^3 + 13^3 + \ldots + 31^3 + 33^3 = 314\,721 - 147\,968 = 166\,753$$

$$S = 166\,753 - (1^3 + 3^3 + \ldots + 9^3) = 166\,753 - 1\,225 = 165\,528$$

Página 71

Cuestiones teóricas

38 Sea a_n una progresión aritmética con $d > 0$. ¿Cuál es su límite?

Si $d > 0$, la sucesión se va haciendo cada vez mayor. Por tanto, $\lim a_n = +\infty$.

39 Si a_n es una progresión geométrica con $r = \frac{1}{3}$, ¿cuál es su límite?

* ***Ten en cuenta el signo del primer término.***

Al ir multiplicando por $\frac{1}{3}$ sucesivamente, los términos se van aproximando a cero.

Es decir, $\lim a_n = 0$.

40 Si la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica es 5, ¿qué podemos decir del valor de r?

Inventa un ejemplo con r positivo en el que se verifique esto. Inventa otro ejemplo con r negativo.

Podemos decir que $|r| < 1$ porque se pueden sumar sus infinitos términos.

Con $r > 0$ tenemos, por ejemplo: $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ ya que $S_\infty = \dfrac{\frac{5}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 5$.

Con $r < 0$ tenemos, por ejemplo: $\frac{20}{3}, -\frac{20}{9}, \frac{20}{27}, -\frac{20}{81}, \ldots$

En este caso $S_\infty = \dfrac{\frac{20}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = 5$

41 La sucesión 3, 3, 3, 3, … puede considerarse una progresión aritmética y también geométrica. ¿Cuál es la diferencia en el primer caso? ¿Y la razón en el segundo?

– Es una progresión aritmética con $d = 0$.

– También es una progresión geométrica con $r = 1$.

42 **En una progresión geométrica cualquiera, a, ar, ar^2, …, comprueba que:**

$$a_1 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_5 = a_3 \cdot a_4$$

¿Se verifica también que $a_3 \cdot a_7 = a_4 \cdot a_6$? Enuncia una propiedad que exprese los resultados anteriores.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot a_6 = a \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^5 \\ a_2 \cdot a_5 = (a \cdot r) \cdot (a \cdot r^4) = a^2 \cdot r^5 \\ a_3 \cdot a_4 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^3) = a^2 \cdot r^5 \end{array}\right\} \text{Son iguales}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_3 \cdot a_7 = (a \cdot r^2) \cdot (a \cdot r^6) = a^2 \cdot r^8 \\ a_4 \cdot a_6 = (a \cdot r^3) \cdot (a \cdot r^5) = a^2 \cdot r^8 \end{array}\right\} \text{Son iguales}$$

Para profundizar

43 **Calcula el límite de cada una de estas sucesiones:**

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2}$

b) $\dfrac{1^2}{1^3}, \dfrac{1^2+2^2}{1^3+2^3}, \dfrac{1^2+2^2+3^2}{1^3+2^3+3^3}, \ldots$

c) $\dfrac{1 \cdot 1^2}{1^3}, \dfrac{2 \cdot (1^2+2^2)}{1^3+2^3}, \dfrac{3 \cdot (1^2+2^2+3^2)}{1^3+2^3+3^3}, \ldots$

d) $\dfrac{1 \cdot 2^2}{1^3}, \dfrac{2 \cdot (2^2+4^2)}{1^3+2^3}, \dfrac{3 \cdot (2^2+4^2+6^2)}{1^3+2^3+3^3}, \ldots$

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n) = \dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{(1+n)\cdot n}{2}\right) = \dfrac{1}{n^2} \cdot \left(\dfrac{n+n^2}{2}\right) = \dfrac{n^2+n}{2n^2}$

Hallamos el límite: $a_{10} = 0{,}55$; $a_{100} = 0{,}505$; $a_{1\,000} = 0{,}5005$; $lím\ a_n = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

b) Usamos los resultados de la página 59 de esta unidad para el numerador y el denominador.

$$b_n = \frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} = \frac{4n+2}{3n^2+3n};\quad lím\ \frac{4n+2}{3n^2+3n} = 0$$

c) Cada término de esta sucesión es igual al correspondiente de la anterior multiplicado por el lugar que ocupa. Es decir:

$$c_n = n \cdot b_n = \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n};\quad lím\ \frac{4n^2+2n}{3n^2+3n} = \frac{4}{3}$$

d) Observamos que:

$2^2 = 2^2 \cdot 1^2$

$2^2 + 4^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2)$

$2^2 + 4^2 + 6^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2)$

Este resultado es el cuádruple de la sucesión del numerador del apartado b), por tanto, el término general de este numerador es $n \cdot 4 \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

El denominador es igual al denominador de la sucesión del apartado b).

$$d_n = \frac{n \cdot 4 \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}} = \frac{16n^2(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{16n+8}{3n+3};\quad lím\ \frac{16n+8}{3n+3} = \frac{16}{3}$$

44 **Si llamamos f_n y l_n a los términos generales de las sucesiones de Fibonacci y Lucas, respectivamente:**

a) Comprueba que: $l_n = f_{n-1} + f_{n+1} = 2f_{n-1} + f_n$

b) Halla el término l_{20} obteniendo, a partir de la fórmula, los términos de la sucesión de Fibonacci que necesites.

c) Comprueba que $lím\ \dfrac{l_{n+1}}{l_n} = \phi$, dividendo, por ejemplo, $l_{11} : l_{10}$ y $l_{12} : l_{11}$.
¿Sabrías demostrarlo de forma general?

a) Podemos comprobar la relación observando los primeros términos de ambas sucesiones:

Sucesión de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, …

Sucesión de Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

Por ejemplo, $l_3 = 4 = 1 + 3 = f_2 + f_5$ o también, $l_6 = 18 = 5 + 13 = f_5 + f_7$

Veámoslo en general:

Utilizando la propiedad del ejercicio 11 (pág. 60 de la unidad), tenemos que:

$$f_{n+1} + f_{n-1} = \frac{l_n + l_{n+2}}{5} + \frac{l_{n-2} + l_n}{5} = \frac{2}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n-2} + \frac{1}{5}l_{n+2} = \frac{2}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n-2} + \frac{1}{5}(l_{n+1} + l_n) =$$

$$= \frac{3}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n+1} + \frac{1}{5}l_{n-2} = \frac{3}{5}l_n + \frac{1}{5}(l_n + l_{n-1}) + \frac{1}{5}l_{n-2} = \frac{4}{5}l_n + \frac{1}{5}l_{n-1} + \frac{1}{5}l_{n-2} =$$

$$= \frac{4}{5}l_n + \frac{1}{5}(l_{n-1} + l_{n-2}) = \frac{4}{5}l_n + \frac{1}{5}l_n = l_n$$

Además, $f_{n+1} + f_{n-1} = (f_n + f_{n-1}) + f_{n-1} = 2f_{n-1} + f_n$ por la forma en la que se construye la sucesión de Fibonacci.

b) Utilizando la propiedad del ejercicio 10 (pág. 60 de la unidad), tenemos que:

$$f_{19} \approx \frac{\phi^{19}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{19} = 4181$$

$$f_{20} \approx \frac{\phi^{20}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = 6765$$

$l_{20} = 2f_{19} + f_{20} = 2 \cdot 4\,181 + 6765 = 15\,127$

c) $f_9 \approx \dfrac{\phi^9}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9 = 34$

$$f_{10} \approx \frac{\phi^{10}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = 55$$

$f_{11} = 34 + 55 = 89$

$f_{12} = 55 + 89 = 144$

$l_{10} = 2f_9 + f_{10} = 2 \cdot 34 + 55 = 123$

$l_{11} = 2f_{10} + f_{11} = 2 \cdot 55 + 89 = 199$

$l_{12} = 2f_{11} + f_{12} = 2 \cdot 89 + 144 = 322$

$\dfrac{l_{11}}{l_{10}} = \dfrac{199}{123} \approx 1{,}6179$; $\dfrac{l_{12}}{l_{11}} = \dfrac{322}{199} \approx 1{,}6181$, que son valores muy próximos a $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

De forma general:

$$lím\ \frac{l_{n+1}}{l_n} = lím\ \frac{f_n + f_{n+2}}{f_{n-1} + f_{n+1}} = lím\ \frac{\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{\phi^{n+2}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\phi^{n-1}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}} = lím\ \frac{\phi^n(1+\phi^2)}{\phi^{n-1}(1+\phi^2)} = lím\ \phi = \phi$$

Autoevaluación

Página 71

1 Determina los términos a_1, a_{97} y a_{500} de la sucesión cuyo término general es: $a_n = \dfrac{n^2-709}{n+3}$

¿Cuál es su límite?

$a_1 = \dfrac{1^2-709}{1+3} = -177$; $a_{97} = \dfrac{97^2-709}{97+3} = 87$; $a_{500} = \dfrac{500^2-709}{500+3} = \dfrac{249\,291}{503} = 495,61$

Observamos que los términos independientes se hacen insignificantes comparados con los otros términos, luego:

$$lím\ a_n = lím\ \frac{n^2}{n} = lím\ n = +\infty$$

2 Escribe los diez primeros términos de la sucesión definida así: $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$

$a_1 = 4$; $a_2 = 7$; $a_3 = 2 \cdot 4 - 7 = 1$; $a_4 = 2 \cdot 7 - 1 = 13$; $a_5 = 2 \cdot 1 - 13 = -11$;

$a_6 = 2 \cdot 13 - (-11) = 37$; $a_7 = 2 \cdot (-11) - 37 = -59$; $a_8 = 2 \cdot 37 - (-59) = 133$;

$a_9 = 2 \cdot (-59) - 133 = -251$; $a_{10} = 2 \cdot 133 - (-251) = 517$

3 Halla el término general de las siguientes sucesiones. Indica cuáles de ellas son progresiones aritméticas y cuáles progresiones geométricas:

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …

c) 1 024, 512, 256, 128, …

d) 3, –9, 27, –81, 243, …

e) 8/13, 19/52, 3/26, –7/52, …

f) 4, 3, 5, 2, 6, 1, 7, 0, …

g) 24, 18, 27/2, 81/8, 243/32, …

h) 0, 2, 6, 12, 20, 30, …

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) No es una progresión. Los términos son una unidad mayor que los cuadrados perfectos, empezando por el cuadrado de 0.

$b_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

c) Es una progresión geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2}$.

$c_n = 512 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^9 \cdot 2^{1-n} = 2^{10-n}$

d) Es una progresión geométrica de razón $r = -3$.

$d_n = 3 \cdot (-3)^{n-1}$

e) $\dfrac{8}{13} = \dfrac{32}{52}, \dfrac{19}{52}, \dfrac{3}{26} = \dfrac{6}{52}, \dfrac{-7}{52}, \dots$

Así vemos que es una progresión aritmética de diferencia $d = -\dfrac{16}{52}$.

$e_n = \dfrac{8}{13} + (n-1) \cdot \left(-\dfrac{16}{52}\right) = \dfrac{-4n+12}{13}$

f) No es una progresión. Los términos impares forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$. Los términos pares forman una progresión aritmética de diferencia $d = -1$.

$$f_n = \begin{cases} 3 + \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 4 - \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

g) Es una progresión geométrica de razón $r = \frac{3}{4}$.

$g_n = 24 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

h) No es una progresión. Observamos la siguiente relación:

$0 = 1 \cdot 0$

$2 = 2 \cdot 1$

$6 = 3 \cdot 2$

$12 = 4 \cdot 3$

$20 = 5 \cdot 4$

…

Luego $h_n = n(n-1) = n^2 - n$

4 Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, …

b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, …

d) 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, …

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 8 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

d) $a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$

5 Halla las siguientes sumas:

a) 3 + 7 + 11 + … + 43

b) $1\,000 + 1\,000 \cdot 1{,}1 + 1\,000 \cdot 1{,}1^2 + \ldots + 1\,000 \cdot 1{,}1^{15}$

c) 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + …

d) $101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2$

e) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3$

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$a_n = 4n - 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_{11} = 43$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1\,000$ y razón $r = 1{,}1$.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \to S_{15} = \frac{1000 \cdot 1{,}1^{15} - 1000}{1{,}1 - 1} = 31\,772{,}48$$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{80}{1 - 1/2} = 160$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$101^2 + 102^2 + 103^2 + \ldots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2) =$

$= \dfrac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \dfrac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \dfrac{5546960 - 2030100}{6} = 586\,140$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \dfrac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14\,391$

6 En una progresión aritmética, $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$.

a) Calcula S_{100}.

b) Obtén el valor de a_{220}.

$\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} = a_1 + 85d = 85{,}6 \end{array}\right\} \to 85d - 14d = 42{,}6 \to d = 0{,}6$

$a_1 = 43 - 14 \cdot 0{,}6 = 34{,}6$

a) $a_{100} = 34{,}6 + 99 \cdot 0{,}6 = 94$

$S_{100} = \dfrac{(34{,}6 + 94) \cdot 100}{2} = 6\,430$

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34{,}6 + 219 \cdot 0{,}6 = 166$

7 Dados estos dos términos de una sucesión, $a_1 = 2$ y $a_3 = 8$, halla cuatro términos más y el término general suponiendo que se trata de una progresión:

a) aritmética.

b) geométrica.

a) Si es una progresión aritmética, entonces:

$a_3 = a_1 + 2d \to 8 = 2 + 2d$, de donde $d = 3$.

Término general: $a_n = 2 + 3(n - 1)$

Términos de esta progresión son: $a_2 = 5$; $a_4 = 11$; $a_5 = 14$ y $a_6 = 17$.

b) Si es una progresión geométrica, entonces:

$a_3 = 8$

$a_3 = a_1 \cdot r^2 = 8$ y, de aquí, $r = 2$.

Término general: $a_n = 2^n$

Términos de esta progresión son: $a_2 = 4$; $a_4 = 16$; $a_5 = 32$; $a_6 = 64$.

8 Halla los límites de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{5}{n}$	**b)** $b_n = \dfrac{5+3n}{n+1}$	**c)** $c_n = \dfrac{n^2+1}{5n}$
d) $d_n = (-5)^n + n^2$	**e)** $e_n = \dfrac{5n-2}{3-2n}$	**f)** $f_n = (-3)^n$
g) $g_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{n}{3}$	**h)** $h_n = \dfrac{4\,000n^2}{-n^3}$	**i)** $i_n = \dfrac{(-1)^n+1}{2n}$

a) $a_{10} = 0{,}5$	$a_{100} = 0{,}05$	$a_{1\,000} = 0{,}005 \to lím\ \dfrac{5}{n} = 0$
b) $b_{10} = 3{,}18$	$b_{100} = 3{,}02$	$b_{1\,000} = 3{,}002 \to lím\ \dfrac{5+3n}{n+1} = 3$
c) $c_{10} = 2{,}02$	$c_{100} = 20{,}002$	$c_{1\,000} = 200{,}0002 \to lím\ \dfrac{n^2+1}{5n} = +\infty$

d) $d_{100} = (-5)^{100} + 100^2 = 7{,}8886 \cdot 10^{69}$

$d_{101} = (-5)^{101} + 101^2 = -3{,}9443 \cdot 10^{70}$

En esta sucesión la potencia de n apenas influye en el valor de los términos. Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a $+\infty$ y los impares tienden a $-\infty$. Por tanto, no tiene límite.

e) $e_{100} = \dfrac{5 \cdot 100 - 2}{3 - 2 \cdot 100} = -\dfrac{498}{197} = -2{,}5279$

$e_{1\,000} = \dfrac{5 \cdot 1000 - 2}{3 - 2 \cdot 1000} = -\dfrac{4998}{1997} = -2{,}5028$

En esta sucesión los términos independientes tienen una influencia insignificante.

$$lím\ \frac{5n-2}{3-2n} = lím\ \frac{5n}{-2n} = -\frac{5}{2}$$

f) $f_{50} = (-3)^{50} = 7{,}1790 \cdot 10^{23}$

$f_{51} = (-3)^{51} = -2{,}1537 \cdot 10^{24}$

Se trata de una sucesión oscilante en la que los términos pares tienden a $+\infty$ y los impares, a $-\infty$. Por tanto, no tiene límite.

g) $g_{100} = \dfrac{3}{100} + \dfrac{100}{3} = 33{,}363$

$g_{1\,000} = \dfrac{3}{1000} + \dfrac{1000}{3} = 333{,}34$

En esta sucesión la primera fracción se hace cada vez más próxima a cero, ejerciendo una influencia insignificante en el resultado.

La segunda fracción se hace muy grande cuando n crece indefinidamente.

Por tanto, $lím\ g_n = lím\ \dfrac{n}{3} = +\infty$.

h) $lím\ \dfrac{4\,000n^2}{-n^3} = lím\ \dfrac{4\,000}{-n} = 0$ porque el numerador es constante y el denominador, en valor absoluto, se hace muy grande.

i) $i_{1\,000} = \dfrac{(-1)^{1000}+1}{2 \cdot 1000} = \dfrac{1}{1000} = 0{,}001$

$i_{1\,001} = \dfrac{(-1)^{1001}+1}{2 \cdot 1001} = 0$

Los términos impares siempre valen 0 y los pares tienden a 0 porque el numerador es constantemente 2 y el denominador se hace muy grande.

Por tanto, $lím\ i_n = 0$.