

1. Contesta a los siguientes apartados utilizando la teoría del Binomio de Newton:

a) Desarrollar la potencia  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$  y simplificar en lo posible el resultado. **(1 punto)**

b) Escribe, simplificado, el término de grado 4 en el desarrollo de  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$ . **(0,5 puntos)**

2. Contesta a las siguientes cuestiones relacionadas con los radicales:

a) Simplifica la siguiente expresión:  $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{32} - 3\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$  **(0,6 puntos)**

b) Simplifica reduciendo a común índice y extrayendo factores:  $\frac{\sqrt[6]{ab}\sqrt[3]{a^2b^4}\sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}}$  **(0,6 puntos)**

c) Racionaliza y simplifica el resultado:  $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3}$  **(0,8 puntos)**

3. Disponer la siguiente operación en notación científica y, posteriormente, dar el resultado en notación científica con tres cifras significativas (utilícese la calculadora):  $\frac{0,00016(25 \cdot 10^3 + 2000)}{0,0025}$  **(0,8 puntos)**

Determinar una cota del error absoluto. **(0,2 puntos)**

4. Hallar, en forma de intervalo, los números reales que verifican la siguiente desigualdad:  $|x - 4| > 3$ . **(0,5 puntos)**

5. Factorizar el siguiente polinomio:  $x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x$ . **(0,6 puntos)**

Escribir todas sus raíces. **(0,4 puntos)**

6. Realiza la siguiente operación con fracciones algebraicas y simplifica el resultado: **(1 punto)**

$$\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^2 - 2x + 1}{(x - 1)^2}$$

7. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $(x - 2)x - \frac{x + 2}{3} - \frac{x^2 - 4}{2} = (x - 2)^2 - 4$  **(1 punto)**

b)  $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x + 4} = 6$  **(1 punto)**

c)  $\frac{x - 1}{x + 1} - \frac{3 + x}{x - 1} = 2$  **(1 punto)**

## Soluciones

1. a)  $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = x^4 - 4x^3 \frac{1}{\sqrt{x}} + 6x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 4x \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 =$   
 $= x^4 - 4x^3 \frac{\sqrt{x}}{x} + 6x^2 \frac{1}{x} - 4x \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = x^4 - 4x^2\sqrt{x} + 6x - \frac{4\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2}$
- b)  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6 = (2x)^6 + 6(2x)^5 \frac{1}{x} + 15(2x)^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 20(2x)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 15(2x)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 6(2x) \left(\frac{1}{x}\right)^5 +$   
 $\left(\frac{1}{x}\right)^6 = 64x^6 + 192x^4 + 240x^2 + 160 + \frac{60}{x^2} + \frac{12}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

Por tanto el término de grado cuatro es  $192x^4$ .

2. a)  $\frac{\sqrt{8} - \sqrt{32} - 3\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 3 \cdot 6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(2 - 4 - 18)\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -20$
- b)  $\frac{\sqrt[6]{ab^3} \sqrt[3]{a^2b^4} \sqrt{b^5}}{\sqrt[4]{a^2b^3}} = \frac{\sqrt[12]{a^2b^2} \sqrt[12]{a^8b^{16}} \sqrt[12]{b^{30}}}{\sqrt[12]{a^6b^9}} = \frac{\sqrt[12]{a^{10}b^{48}}}{\sqrt[12]{a^6b^9}} = \sqrt[12]{\frac{a^{10}b^{48}}{a^6b^9}} = \sqrt[12]{a^4b^{39}} = b^3 \sqrt[12]{a^4b^3}$
- c)  $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3} = \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 3)}{(2\sqrt{2} + 3)(2\sqrt{2} - 3)} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{(2\sqrt{2})^2 - 3^2} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{8 - 9} = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2} - 4$
3.  $\frac{0,00016(25 \cdot 10^3 + 2000)}{0,0025} = \frac{1,6 \cdot 10^{-4}(2,5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3)}{2,50 \cdot 10^{-3}} = 1,73 \cdot 10^3$

Con tres cifras significativas, la cota del error absoluto es  $0,005 \cdot 10^3 = 5$ . El resultado exacto es  $1728 = 1,728 \cdot 10^3$  que, si se redondea a dos cifras significativas es  $1,73 \cdot 10^3 = 1730$ . Obsérvese como no se comete un error mayor que 5 al tomar 1730 como aproximación de 1728.

4. Resolvamos la desigualdad contraria:  $|x - 4| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x - 4 \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow x \in [1, 7]$ . Por tanto el intervalo de números que verifican la desigualdad  $|x - 4| > 3$  es  $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ .
5. Extraemos  $x$  factor común:  $x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x = x(x^4 - 5x^3 - x^2 + 19x - 14)$ . Aplicando la regla de Ruffini se obtienen dos raíces de  $x^4 - 5x^3 - x^2 + 19x - 14$ : 1 y  $-2$ , con lo que  $x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x = x(x - 1)(x + 2)(x^2 - 6x + 7)$ .

Finalmente, para obtener las raíces de  $x^2 - 6x + 7$  resolvemos la ecuación  $x^2 - 6x + 7 = 0$ :

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

De este modo la factorización queda:

$$\begin{aligned} x^5 - 5x^4 - x^3 + 19x^2 - 14x &= x(x - 1)(x + 2) \left(x - (3 + \sqrt{2})\right) \left(x - (3 - \sqrt{2})\right) = \\ &= x(x - 1)(x + 2) \left(x - 3 - \sqrt{2}\right) \left(x - 3 + \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

Las raíces son: 0, 1,  $-2$ ,  $3 + \sqrt{2}$  y  $3 - \sqrt{2}$ .

$$6. \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(x^2 + 1)}{x(x-1)^2} - \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{x(x-1)^2} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 1)}{x(x-1)^2} - \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x(x-1)^2} =$$

$$\frac{(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) - (x^3 - 2x^2 + x)}{x(x-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{x(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2(x^2 - x + 1)}{x(x-1)^2} =$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x}$$

Hay una forma más sencilla de hacerlo si tenemos en cuenta que  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ . Entonces:

$$\frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x} - 1 = \frac{x^2 + 1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{x^2 - x + 1}{x}$$

$$7. \text{ a) } (x-2)x - \frac{x+2}{3} - \frac{x^2-4}{2} = (x-2)^2 - 4 \Leftrightarrow 6x(x-2) - 2(x+2) - 3(x^2-4) = 6(x^2-4x+4) - 24 \Leftrightarrow$$

$$6x^2 - 12x - 2x - 4 - 3x^2 + 12 = 6x^2 - 24x + 24 - 24 \Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 8 = 6x^2 - 24x \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{ b) } \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 6 - \sqrt{x+4} = 6 \Leftrightarrow 2x-1 = 36 - 12\sqrt{x+4} + x+4 \Leftrightarrow$$

$$12\sqrt{x+4} = 41 - x \Leftrightarrow 144(x+4) = 1681 - 82x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 226x + 1105 = 0$$

El discriminante es  $\Delta = (-226)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1105 = 51076 - 4420 = 46656$ .

$$\text{ Entonces: } x = \frac{226 \pm 216}{2} = \begin{cases} x_1 = 221 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

La solución  $x_1 = 221$  no es válida pues  $\sqrt{2 \cdot 221 - 1} + \sqrt{221 + 4} = \sqrt{441} + \sqrt{225} = 21 + 15 = 36 \neq 6$ .

$$\text{ c) } \frac{x-1}{x+1} - \frac{3+x}{x-1} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (3+x)(x+1) = 2(x+1)(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - (3x + 3 + x^2 + x) = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow -6x - 2 = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$