Autoevaluación

Página 100

1 Explica si es verdadera o falsa cada una de estas frases:

a) Todo número decimal se puede expresar como fracción.

b) La suma de dos números irracionales es irracional.

c) Hay números irracionales que no son reales.

d) El producto de dos números irracionales puede ser un número racional.

a) Falsa. Los números decimales no periódicos no se pueden poner como fracción.

b) Falsa: $\pi + (-\pi) = 0 \in \mathbb{Q}$

c) Falsa. Lo snúmeros reales contienen a los números racionales y también a los irracionales.

d) Verdadera: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$

2 Dados los intervalos $A = [1, 6)$ y $B = (-2, 5]$, expresa como intervalo $A \cup B$ y $A \cap B$.

$A \cup B = (-2, 6)$; $A \cap B = [1, 5]$

3 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt[4]{a^2} + 3a\sqrt[6]{a^3} - \sqrt[8]{a^{12}}$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

c) $\dfrac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

a) $a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = a\sqrt{a}$

b) $\dfrac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \dfrac{30\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 30$

c) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

d) $\dfrac{5}{\sqrt{6}} + \dfrac{2(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} - \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6} - \dfrac{2\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{12} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} =$

$= \dfrac{5\sqrt{6}}{6} - \dfrac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} - \dfrac{4\sqrt{6}}{3} = \dfrac{5\sqrt{6} - \sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{6} = \dfrac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{6}$

4 Expresa el resultado de la siguiente operación con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido:

$$(5 \cdot 10^{-18})(3{,}52 \cdot 10^{15}) : (-2{,}18 \cdot 10^{-7})^2$$

$3{,}70 \cdot 10^{11}$

$|\text{Error absoluto}| < 0{,}005 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^8$

$|\text{Error relativo}| < \dfrac{5 \cdot 10^8}{3{,}70 \cdot 10^{11}} = 1{,}35 \cdot 10^{-3}$

5 **Si $log\ k = -1{,}3$ calcula el valor de estas expresiones:**

a) $log\ k^3$

b) $log\ \dfrac{1}{k}$

c) $log\ \dfrac{k}{100}$

a) $log\ k^3 = 3\ log\ k = 3\,(-1{,}3) = -3{,}9$

b) $log\ \dfrac{1}{k} = log\ 1 - log\ k = 0 - (-1{,}3) = 1{,}3$

c) $log\ \dfrac{k}{100} = log\ k - log\ 100 = -1{,}3 - 2 = -3{,}3$

6 **Calcula x aplicando la definición de logaritmo:**

a) $log_2 \sqrt{x} = -1$

b) $ln\ \dfrac{3}{x} = -\dfrac{1}{2}$

a) $log_2 \sqrt{x} = -1 \rightarrow 2^{-1} = \sqrt{x} \rightarrow x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

b) $ln\ \dfrac{3}{x} = -\dfrac{1}{2} \rightarrow e^{-1/2} = \dfrac{3}{x} \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{e}} = \dfrac{3}{x} \rightarrow x = 3\sqrt{e}$

7 **Escribe los valores que puede tomar x para que sean válidas las siguientes expresiones:**

a) $|x^2 - 3| = 1$

b) $|5 - x| < 2$

a) $|x^2 - 3| = 1 \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ x^2 - 3 = -1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 2;\ x_2 = -2;\ x_3 = \sqrt{2};\ x_4 = -\sqrt{2}$

b) $|5 - x| = 2 \begin{cases} 5 - x = 2 \rightarrow x = 3 \\ 5 - x = -2 \rightarrow x = 7 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 3;\ x_2 = 7$

8 **Escribe el cuarto término del desarrollo de $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{x}\right)^8$.**

El cuarto término del desarrollo de $\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{x}\right)^8$ es:

$$\binom{8}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)^5\left(\frac{-3}{x}\right)^3 = \frac{8!}{5!\,3!}\,\frac{x^{10}}{2^5}\,\frac{(-3)^3}{x^3} = 56x^7\left(\frac{-27}{32}\right) = -\frac{189}{4}x^7$$

9 **Calcula el término general de cada una de estas sucesiones; halla después la suma de los 20 primeros términos y, si es posible, calcula la suma de sus infinitos términos:**

a) $\frac{13}{4}, 2, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\ldots$

b) **8, 18, 32, 50, 72…**

c) $\sqrt{512}, 16, \sqrt{128}, 8, \sqrt{32}\ldots$

d) $18, -6, 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\ldots$

a) Progresión aritmética de diferencia $d = -\frac{5}{4}$.

$a_n = \frac{13}{4} + (n-1)\left(-\frac{5}{4}\right) \qquad a_{20} = \frac{13}{4} + (19)\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{41}{2}$

$$S_{20} = \frac{\frac{13}{4} + \left(-\frac{41}{2}\right)}{2} \cdot 20 = -\frac{345}{2}$$

b) No es progresión.

$b_n = 2(n+1)^2$

Usamos la fórmula de la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales.

Para la suma que nos piden, tenemos que sumar desde 2^2 hasta $(n+1)^2$. Para eso, sumamos los cuadrados de los $n+1$ primeros números naturales y le restamos 1^2.

$$S_{20} = 2\left(\frac{(20+1)\cdot(20+2)\cdot(2\cdot 21+1)}{6} - 1\right)$$

$$S_{20} = 2\left(\frac{21\cdot 22\cdot 43}{6} - 1\right) = 6\,620$$

c) Progresión geométrica de razón $r = \sqrt{2}$.

$c_n = \sqrt{512}\,(\sqrt{2})^{n-1} = \sqrt{2^9}\,(\sqrt{2})^{n-1} = \sqrt{2^{n+8}}$

$c_1 = \sqrt{512}$

$c_{20} = \sqrt{2^{28}}$

$$S_{20} = \frac{\sqrt{2^{28}}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{512}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2^{29}} - \sqrt{2^9}}{\sqrt{2}-1} = \frac{16\,384\sqrt{2} - 16\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 16\,368\sqrt{2} + 32\,736$$

d) Progresión geométrica de razón $r = -\frac{1}{3}$.

$$d_n = 18\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$d_{20} = 18\left(-\frac{1}{3}\right)^{19} = -\frac{2}{129\,140\,163}$$

$$S_{20} = \frac{-\frac{2}{129\,140\,163}\cdot -\frac{1}{3} - 18}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{1\,743\,392\,200}{129\,140\,163}$$

$$S_\infty = \frac{18}{1+\frac{1}{3}} = \frac{27}{2}$$

10 **Calcula la suma de los doce primeros términos de una progresión aritmética con $a_3 = 24$ y $a_2 + a_{11} = 41$.**

Expresamos las condiciones mediante un sistema de ecuaciones para calcular el término general de la sucesión:

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + d \\ a_{11} = a_3 + 8d \\ a_2 + a_{11} = 41 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24 = a_2 + d \\ a_{11} = 24 + 8d \\ a_2 + a_{11} = 41 \end{cases} \rightarrow [d = -1,\ a_2 = 25,\ a_{11} = 16]$$

$a_1 = 26$

$a_n = 26 + (n-1)(-1) = 27 - n$

$S_{12} = \dfrac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12$

$a_{12} = 27 - 12 = 15$

$S_{12} = \dfrac{26 + 15}{2} \cdot 12 = 246$

11 **Si al comienzo de cada año ingresamos 500 € en un banco al 4 % anual, ¿cuánto dinero tendremos al final del quinto año?**

1.^{er} año	2.º año	3.^{er} año	4.º año	5.º año	
500	⟶				$500 \cdot 1{,}04^5$
	500	⟶			$500 \cdot 1{,}04^4$
		500	⟶		$500 \cdot 1{,}04^3$
			500	⟶	$500 \cdot 1{,}04^2$
				500 ⟶	$500 \cdot 1{,}04$
					Capital

El capital disponible al final del 5.º año es la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica con $a_1 = 500 \cdot 1{,}04$ y razón $r = 1{,}04$:

$$S = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{500 \cdot 1{,}04^5 \cdot 1{,}04 - 500 \cdot 1{,}04}{1{,}04 - 1} = 2\,816{,}49 \text{ €}$$

12 **Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos avanzados e indica su límite:**

$a_n = \dfrac{3}{n^2}$ $\qquad b_n = 5 - \dfrac{1}{n}$ $\qquad c_n = \dfrac{n^2+1}{n}$

$d_n = \dfrac{4n-5}{2n+1}$ $\qquad e_n = \dfrac{3n^2-2n}{4-2n^2}$ $\qquad f_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2n^3}{4n^3+3n^2}$

$a_n = \dfrac{3}{n^2};\ a_{100} = 0{,}0003;\ a_{1\,000} = 0{,}000003$ $\qquad lím\ \dfrac{3}{n^2} = 0$

$b_n = 5 - \dfrac{1}{n};\ b_{100} = 4{,}99;\ b_{1\,000} = 4{,}999$ $\qquad lím\ 5 - \dfrac{1}{n} = 5$

$c_n = \dfrac{n^2+1}{n};\ c_{100} = 100{,}01;\ c_{1\,000} = 1\,000{,}01$ $\qquad lím\ \dfrac{n^2+1}{n} = +\infty$

$d_n = \dfrac{4n-5}{2n+1};\ d_{100} = 1{,}965;\ d_{1\,000} = 1{,}997$ $\qquad lím\ \dfrac{4n-5}{2n+1} = 2$

$e_n = \dfrac{3n^2-2n}{4-2n^2};\ e_{1\,000} = -1{,}499$ $\qquad lím\ \dfrac{3n^2-2n}{4-2n^2} = -\dfrac{3}{2}$

$f_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2n^3}{4n^3 + 3n^2}$; $f_{1\,000} = 0{,}49963$; $f_{1\,001} = -0{,}49963$

Los términos pares se acercan a $\dfrac{1}{2}$ y los impares a $-\dfrac{1}{2}$, luego no tiene límite.

13 **Simplifica la expresión del término general de la siguiente sucesión e indica su límite:**

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$$

Suma de 1, 2, 3, …, n es $S_n = \dfrac{1+n}{2} \cdot n = \dfrac{n+n^2}{2}$

$$a_n = \frac{\frac{n+n^2}{2}}{n^2} = \frac{n+n^2}{2n^2} \to \textit{lím}\ \frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

14 **Simplifica:**

a) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{x^5+2x^4+2x^3+x^2}{x^5+3x^4+4x^3+3x^2+x}$

a) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x+2}{x-1}$

b) $\dfrac{x^5+2x^4+2x^3+x^2}{x^5+3x^4+4x^3+3x^2+x} = \dfrac{x^2(x+1)(x^2+x+1)}{x(x^2+x+1)(x+1)^2} = \dfrac{x}{x+1}$

15 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $(x+4)^2 - 7 = (2x+3)^2 + 2x$

b) $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$

c) $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 5$

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

a) $x^2 + 16 + 8x - 7 = 4x^2 + 9 + 12x + 2x$

$3x^2 + 6x = 0 \to 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

b) $8x^6 - 7x^3 - 1 = 0$. Hacemos el cambio de variable $x^3 = y$.

$8y^2 - 7y - 1 = 0 \to y = \dfrac{7 \pm \sqrt{49+32}}{16} = \dfrac{7 \pm 9}{16} = \begin{cases} y = 1 \\ y = -1/8 \end{cases}$

$y = 1 \to x = 1$

$y = -\dfrac{1}{8} \to x = -\dfrac{1}{2}$

Soluciones: $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

c) $\sqrt{3-2x} + \sqrt{1-x} = 5 \to \sqrt{3-2x} = 5 - \sqrt{1-x} \to$

$\to 3 - 2x = (5 - \sqrt{1-x})^2 \to 3 - 2x = 26 - 10\sqrt{1-x} - x \to$

$\to 10\sqrt{1-x} = x + 23 \to 100(1-x) = (x+23)^2 \to$

$\to 100 - 100x = x^2 + 46x + 529 \to x^2 + 146x + 429 = 0 \to x = -3$; $x = -143$ no válida

Solución: $x = -3$

d) $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = x^2(3x^3 - 4x^2 - 5x + 2) =$

$= x^2(x+1)(x-2)(3x-1)$

Soluciones: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 2$; $x_4 = \dfrac{1}{3}$

	3	–4	–5	2
–1		–3	7	–2
	3	–7	2	0
2		6	–2	
	3	–1	0	

16 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \le 9 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ y = 3 - x \\ \to\ x(3 - x) + x = 0 \ \to\ 3x - x^2 + x = 0 \end{array}$

$-x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \ \to\ y_1 = 3 \\ x_2 = 4 \ \to\ y_2 = -1 \end{cases}$

Soluciones: (0, 3) y (4, –1)

b) $\left.\begin{array}{l} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \le 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to\ x > 2 \\ \to\ 2x \le 10 \ \to\ x \le 15 \end{array}$

Soluciones: $x \in (2, 5]$

17 **Opera y simplifica:** $\left(\dfrac{x^2 - 4}{x + 1} : \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 - x}\right) - (x^2 - 3x)$

$$\left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x}\right) - (x^2 - 3x) = \frac{(x^2 - 4)(x^3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 2x)} - (x^2 - 3x) =$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2)\,x(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)\,x(x + 2)} - (x^2 - 3x) = (x - 2)(x - 1) - (x^2 - 3x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x = 2$$

18 **Resuelve:**

a) $\dfrac{7 - x}{x^2 + 4x + 4} + \dfrac{x}{x + 2} = 1$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2x + 6}} = \dfrac{3 + x}{\sqrt{5 - 11x}}$

c) $3^{x^2 - 2} = 1/3$

d) $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x + 1} + 16 = 0$

e) $\log(x + 1) = 1 + \log x$

f) $\ln \sqrt{x} + 1 = \ln x$

a) $\dfrac{7 - x}{(x + 2)^2} + \dfrac{x}{x + 2} = 1 \ \to\ \dfrac{7 - x + x(x + 2)}{(x + 2)^2} = 1 \ \to$

$\to\ 7 - x + x^2 + 2x = x^2 + 4x + 4 \ \to\ 3x - 3 = 0 \ \to\ x = 1$

Solución: $x = 1$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2x + 6}} = \dfrac{3 + x}{\sqrt{5 - 11x}} \ \to\ \sqrt{5 - 11x} = (3 + x)\sqrt{2x + 6} \ \to\ (\sqrt{5 - 11x})^2 = ((3 + x)\sqrt{2x + 6})^2 \ \to$

$\to\ 5 - 11x = (x^2 + 6x + 9)(2x + 6) \ \to$

$\to\ 2x^3 + 18x^2 + 54x + 11x + 49 = 0 \ \to$

$\to\ (x + 1)(2x^2 + 16x + 49) = 0$

Solución: $x = -1$

c) $3^{x^2 - 2} = \dfrac{1}{3} = 3^{-1} \ \to\ x^2 - 2 = -1 \ \to\ x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$

d) $(4^x)^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4 + 16 = 0 \xrightarrow[4^x = t]{\text{cambio}} t^2 - 8t + 16 = 0 \to$

$\to (t-4)^2 = 0 \to t = 4 \to 4^x = 4 \to x = 1$

Solución: $x = 1$

e) $log\,(x+1) - log\,x = 1 \to log\,\dfrac{x+1}{x} = 1 \to \dfrac{x+1}{x} = 10 \to$

$\to x + 1 = 10x \to 9x = 1 \to x = \dfrac{1}{9}$

Solución: $x = \dfrac{1}{9}$

f) $ln\,\sqrt{x} + 1 = ln\,x \to ln\,\sqrt{x} + ln\,e = ln\,x \to ln\,e\sqrt{x} = ln\,x \to$

$\to e\sqrt{x} = x \to e^2 x = x^2 \to x(e^2 - x) = 0 \to x = 0$ no válida; $x = e^2$

Solución: $x = e^2$

19 **Resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ log\,(x+1) = 1 + log\,y \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = -5 \\ 2^{2x} - 3^y = -11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y + 3z = 7 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ -4x - 11y + 9z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 4y = 5 \\ log\,(x+1) - log\,y = 1 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - 4y = 5 \\ \dfrac{x+1}{y} = 10 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} x - 4y = 5 \\ x + 1 = 10y \end{array}\right\} \to$

$\to \left.\begin{array}{l} -x + 4y = -5 \\ x - 10y = -1 \end{array}\right\} \to -6y = -6 \to y = 1$

$-x + 4y = -5 \to -x + 4 = -5 \to x = 9$

Solución: $x = 9,\ y = 1$

b) $\begin{cases} 2^x - 3^{y-1} = -5 \\ 2^{2x} - 3^y = -1 \end{cases}$ Hacemos el siguiente cambio de variable: $2^x = t$; $3^y = z$

$\begin{cases} t - \dfrac{z}{3} = -5 \\ t^2 - z = -11 \end{cases} \to \begin{cases} z = 15 + 3t \\ z = t^2 + 11 \end{cases} \to 15 + 3t = t^2 + 11 \to t = 4,\ t = -1$ no válida

$t = 4 \to z = 15 + 3t = 27$

Solución: $x = 2,\ y = 3$

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -2x + y - z = -5 \\ 3x - y + 3z = 10 \end{array}\right\}$

(1.ª)
(2.ª) – 2 · (1.ª)
(3.ª) – 3 · (1.ª)

$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 5y + z = -3 \\ -7y = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{array}$

Solución: $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 7 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ -4x - 11y + 9z = 0 \end{array}\right\}$

(1.ª)
(2.ª) – 2 · (1.ª)
(3.ª) + 4 · (1.ª)

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 7 \\ 5y - 7z = -9 \\ -15y + 21z = 28 \end{array}\right\}$

(1.ª)
(2.ª)
(3.ª) + 3 · (2.ª)

$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 7 \\ 5y - 7z = -9 \\ 0 = 1 \end{array}\right\}$

La última ecuación es imposible, luego no tiene solución.

20 **Resuelve:**

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 \le 0$

b) $\dfrac{x^2+6}{x^2-4} \ge 0$

a) $x^3 - 2x^2 - x + 2 \le 0 \;\to\; (x-1)(x-2)(x+1) \le 0$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
$(x-1)$	–	–	+	+
$(x-2)$	–	–	–	+
$(x+1)$	–	+	+	+
$(x-1)(x-2)(x+1)$	–	+	–	+

Solución: $(-\infty, -1) \cup [1, 2]$

b) $\dfrac{x^2+6}{x^2-4} \ge 0$ El numerador nunca vale cero.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
x^2+6	+	+	+
x^2-4	+	–	+
$\dfrac{x^2+6}{x^2-4}$	+	–	+

Solución: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ Los intervalos son abiertos porque el denominador no puede ser 0.

21 **Una pastelería vendió 27 tartas. El número de las de chocolate duplicó al de tartas de nata y entre ambas excedieron en 3 a las ventas de tartas de queso. ¿Cuántas se vendieron de cada tipo?**

x = n.º de tartas de chocolate

y = n.º de tartas de nata

z = n.º de tartas de queso

Expresamos las condiciones mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=27 \\ x=2y \\ x+y=z+3 \end{cases} \to x=10,\; y=5,\; z=12$$

Vendió 10 tartas de chocolate, 5 tartas de nata y 12 tartas de queso.

Autoevaluación

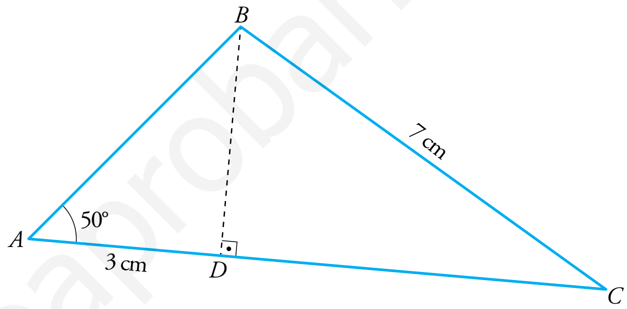
Página 166

1 **Halla el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm.**

El ángulo central del pentágono regular es $\frac{360°}{5} = 72°$.

Si l representa al lado: $sen\ 36° = \frac{l/2}{8} \rightarrow l = 16\ sen\ 36° = 9,4$ cm

2 **Calcula los lados y los ángulos del triángulo *ABC*.**



$cos\ 50° = \frac{3}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{3}{cos\ 50°} = 4,67$ cm

$tg\ 50° = \frac{\overline{BD}}{3} \rightarrow \overline{BD} = 3 \cdot tg\ 50° = 3,58$ cm

$\overline{DC}^2 + 3,58^2 = 7^2 \rightarrow \overline{DC} = \sqrt{7^2 - 3,58^2} = 6,02$ cm

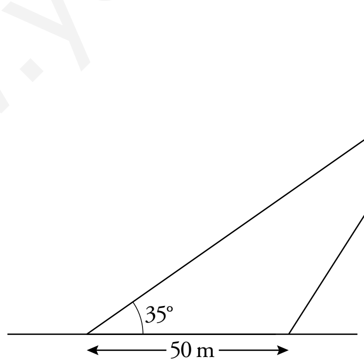
$\overline{AC} = 3 + 6,02 = 9,02$ cm

$sen\ \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{3,58}{7} = 0,511$

$\hat{C} = 30°\ 43'\ 49''$

$\hat{B} = 180° - 50° - 30°\ 43'\ 49'' = 99°\ 16'\ 10''$

3 **Un globo aerostático está sujeto al suelo en dos puntos que distan entre sí 50 m. El cable más corto mide 75 m y el más largo forma un ángulo de 35° con el suelo. Halla la altura a la que se encuentra el globo y la longitud del cable más largo.**



Llamemos h a la altura del globo y x a la distancia desde la base de esa altura hasta el cable más corto.

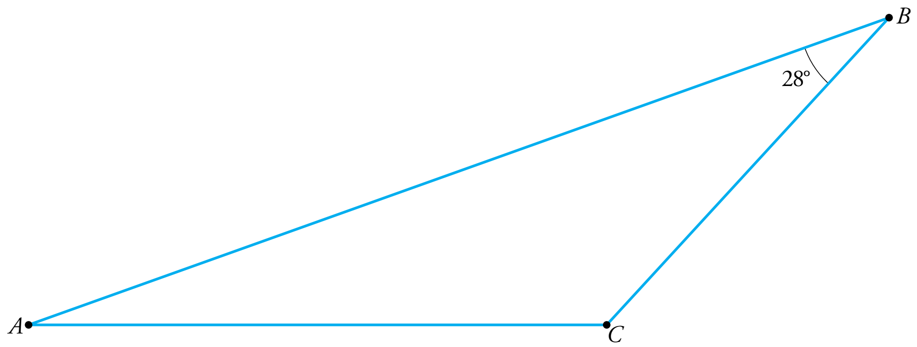
$$\begin{cases} tg\ 35° = \frac{h}{50 + x} \rightarrow h = tg\ 35° (50 + x) \rightarrow h = 0,7 (50 + x) \rightarrow h = 3,5 + 0,7x \\ x^2 + h^2 = 75^2 \end{cases}$$

$x^2 + (3,5 + 0,7x)^2 = 75^2 \rightarrow 1,49x^2 + 4,9x - 5612,75 = 0$, que da lugar a una solución válida, $x = 59,7$ m.

La altura del globo es h = 3,5 + 0,7 · 59,7 = 45,29 m

La longitud del cable más largo es $\sqrt{(50 + 59,7)^2 + 45,29^2} = 118,68$ m

4 **En un triángulo ABC conocemos $\overline{AC} = 115$ m, $\overline{BC} = 83$ m y $\widehat{ABC} = 28°$. Calcula los demás elementos del triángulo. ¿Podemos asegurar que $\overline{AB} > \overline{AC}$?**



$$\frac{115}{sen\ 28°} = \frac{83}{sen\ \hat{A}} \to sen\ \hat{A} = \frac{83 \cdot sen\ 28°}{115} = 0,34 \to \hat{A} = 19°\ 52'\ 37''$$

$$\hat{C} = 180° - (28° + 19°\ 52'\ 37'') = 132°\ 7'\ 23''$$

$$\frac{115}{sen\ 28°} = \frac{\overline{AB}}{sen\ \widehat{C}} \to \overline{AB} = \frac{115 \cdot sen\ \widehat{C}}{sen\ 28°} = 181,7 \text{ m}$$

Sí podemos asegurarlo porque los ángulos opuestos respectivos cumplen que $\hat{C} > \hat{B}$.

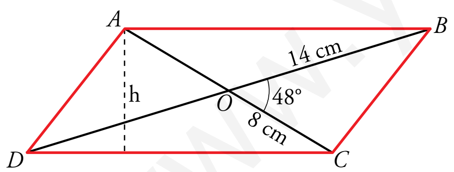
5 **Justifica si existe algún ángulo α tal que $tg\ \alpha = \frac{2}{3}$ y $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$.**

$$tg\ \alpha = \frac{2}{3} \to \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{2}{3} \to cos\ \alpha = \frac{3}{2} sen\ \alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{16} \neq 1$$

No se satisface la identidad fundamental, luego no existe tal ángulo.

6 **Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48°. Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.**



Utilizamos el teorema del coseno en los triángulos BOC y AOB.

$$\overline{BC}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8\ cos\ 48° \to \overline{BC} = 10,49 \text{ cm}$$

$$\overline{AB}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8\ cos\ (180° - 48°) \to \overline{AB} = 20,25 \text{ cm}$$

Perímetro = (10,49 + 20,25) · 2 = 61,48 cm

Para hallar el área, necesitamos conocer un ángulo del paralelogramo.

Hallamos el ángulo $\hat{A}$ del triángulo AOB.

$$\frac{14}{sen\ \widehat{BAO}} = \frac{20,35}{sen\ 132°} \to sen\ \widehat{BAO} = \frac{14 \cdot sen\ 132°}{20,25} \to \widehat{BAO} = 30°\ 54'\ 57''$$

En el triángulo ACD, hallamos la altura.

$$\widehat{BAO} = \widehat{ACD} \to sen\ 30°\ 54'\ 57'' = \frac{h}{16} \to h = 8,22 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{20,25 \cdot 8,22}{2} = 83,23 \text{ cm}^2$$

7 **Busca, en cada caso, un ángulo del primer cuadrante que tenga una razón trigonométrica igual que el ángulo dado y di cuál es esa razón.**

a) $297°$ **b)** $1\,252°$ **c)** $-100°$ **d)** $\dfrac{13\pi}{5}$

a) $297° = 360° - 63° \rightarrow cos\ 297° = cos\ 63°$

b) $1\,252° = 360° \cdot 3 + 172°;\ \ 172° = 180° - 8°;\ \ sen\ 1\,252° = sen\ 8°$

c) $-100° + 360° = 260°;\ \ 260° = 180° + 80°;\ \ tg\ (-100°) = tg\ 80°$

d) $\dfrac{13\pi}{5} = 2\pi + \dfrac{3\pi}{5};\ \ \dfrac{3\pi}{5} = \pi - \dfrac{2\pi}{5};\ \ sen\ \dfrac{13\pi}{5} = sen\ \dfrac{2\pi}{5}$

8 **Si** $tg\ \alpha = 2$ **y** $cos\ \alpha > 0$, **halla:**

a) $cos\ 2\alpha$ **b)** $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **c)** $sen\ \dfrac{\alpha}{2}$ **d)** $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

$tg\ \alpha = 2$ y $cos\ \alpha > 0$, α está en el primer cuadrante.

$$1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\ \alpha} \rightarrow 5 = \frac{1}{cos^2\ \alpha} \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{\sqrt{5}/5} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

a) $cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{5} = -\dfrac{3}{5}$

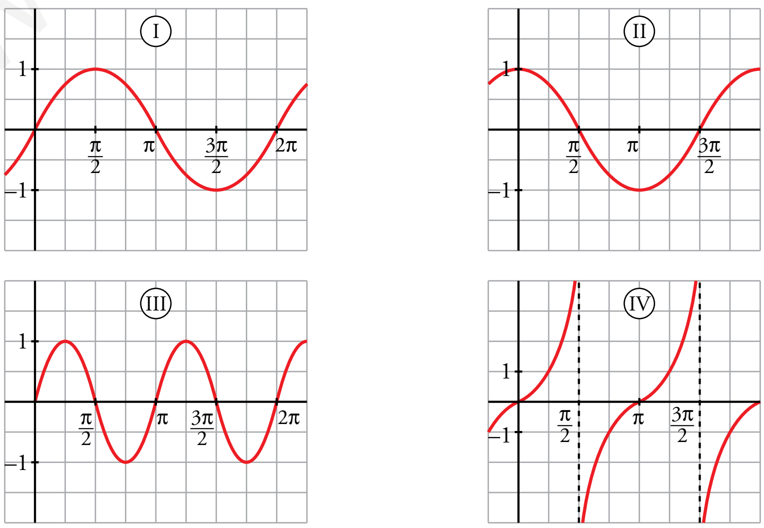
b) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\ \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c) $sen\ \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ \alpha}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - (\sqrt{5}/5)}{2}} = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{10}}$

d) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{tg\ \dfrac{\pi}{4} + tg\ \alpha}{1 - tg\ \dfrac{\pi}{4} \cdot tg\ \alpha} = \dfrac{1 + 2}{1 - 2} = -3$

9 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

a) $y = tg\ x$ **b)** $y = sen\ 2x$ **c)** $y = cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = sen\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$



a) → IV b) → III c) → I d) → II

10 Demuestra las siguientes identidades:

a) $\boldsymbol{cos^4 x - sen^4 x = 2\,cos^2 x - 1}$

b) $\boldsymbol{2tg\,x\,cos^2 \frac{x}{2} - sen\,x = tg\,x}$

a) $cos^4 x - sen^4 x = (cos^2 x + sen^2 x)(cos^2 x - sen^2 x) = cos^2 x - sen^2 x = cos^2 x - (1 - cos^2 x) = 2\,cos^2 x - 1$

b) $2tg\,x\,cos^2 \frac{x}{2} - sen\,x = 2tg\,x\,\frac{1+cos\,x}{2} - sen\,x = tg\,x + tg\,x\,cos\,x - sen\,x = tg\,x + \frac{sen\,x}{cos\,x}\,cos\,x - sen\,x = tg\,x$

11 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\boldsymbol{2sen\,x + cos\,x = 1}$

b) $\boldsymbol{2sen^2 \frac{x}{2} + cos\,2x = 0}$

a) $2sen\,x + cos\,x = 1 \rightarrow (2\,sen\,x)^2 = (1 - cos\,x)^2 \rightarrow 4sen^2 x = 1 + cos^2 x - 2\,cos\,x \rightarrow$

$$\rightarrow 5\,cos^2 x - 2\,cos\,x - 3 = 0 \rightarrow cos\,x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} \begin{cases} cos\,x = 1 \\ cos\,x = -3/5 \end{cases}$$

$cos\,x = 1 \rightarrow x_1 = 0° + 360° \cdot k;\;\; k \in \mathbb{Z} \rightarrow$ Vale.

$$cos\,x = -\frac{3}{5} \begin{cases} x_2 = 126°\,52'\,12'' + 360°\,k, \quad k \in \mathbb{Z} \rightarrow \text{Vale.} \\ x_3 = 233°\,7'\,48'' \rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Hemos comprobado las soluciones en la ecuación dada.

b) $2sen^2 \frac{x}{2} + cos\,2x = 0 \rightarrow 2\,\frac{1 - cos\,x}{2} + cos^2 x - sen^2 x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 1 - cos\,x + cos^2 x - (1 - cos^2 x) = 0 \rightarrow 2\,cos^2 x - cos\,x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow cos\,x(cos\,x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} cos\,x = 0 \rightarrow x = 90° + 360°\,k;\; x = 270° + 360°\,k \\ cos\,x = 1 \rightarrow x = 0° + 360°\,k \end{cases}$$

12 Dado el número complejo $\boldsymbol{z = 3_{60°}}$, expresa en forma polar el conjugado, el opuesto y el inverso.

$\bar{z} = 3_{360° - 60°} = 3_{300°}$

$-z = 3_{60° + 180°} = 3_{240°}$

$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{3_{60°}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-60°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{300°}$

13 Simplifica: $\boldsymbol{\dfrac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}}$

$i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = -1;\;\; i^7 = i^4 \cdot i^2 \cdot i = -i$

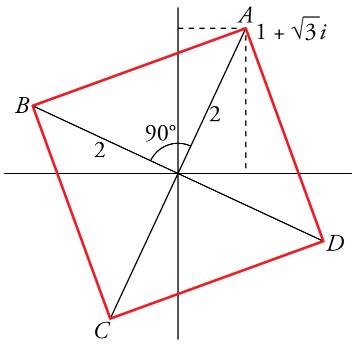
$i^{33} = (i^4)^8 \cdot i = i$

$$\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}} = \frac{-1 - 2(-i)}{2 + i} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = \frac{(-1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-2 + i + 4i - 2i^2}{(2)^2 - (i)^2} = \frac{5i}{5} = i$$

14 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $\boldsymbol{-1 + \sqrt{3}\,i}$ y $\boldsymbol{-1 - \sqrt{3}\,i}$.

$[x - (-1 + \sqrt{3}\,i)][x - (-1 - \sqrt{3}\,i)] = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 4 = 0$

15 **Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}\,i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.**



Hacemos giros de 90°. Para ello, multiplicamos por $1_{90°}$:

$A = 1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$ $\quad$ $B = 2_{60°} \cdot 1_{90°} = 2_{150°}$

$C = 2_{150°} \cdot 1_{90°} = 2_{240°}$ $\quad$ $D = 2_{240°} \cdot 1_{90°} = 2_{330°}$

$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \to \overline{AB} = 2\sqrt{2}$ u

16 **Calcula a y b para que se verifique esta igualdad:**

$$\frac{a-2i}{3-i} = \frac{b-i}{5}$$

$$\frac{a-2i}{3-i} = \frac{b-i}{5} \to 5(a-2i) = (b-i)(3-i) \to 5a - 10i = 3b - bi - 3i + i^2 \to$$

$$\to 5a - 10i = 3b - 1 + (-b-3)\,i \to \begin{cases} 5a = 3b - 1 \\ -10 = -b - 3 \end{cases} \to a = 4,\ b = 7$$

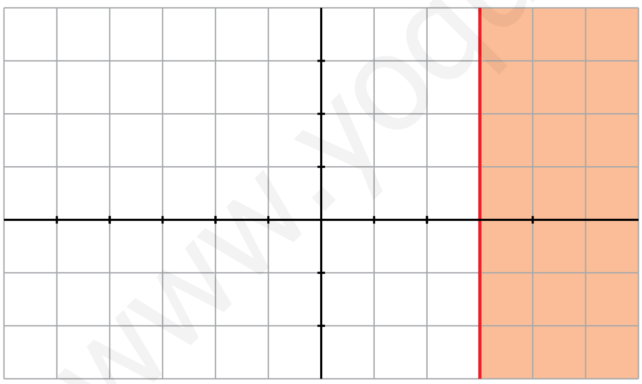
17 **Resuelve la ecuación $2z^2 + 8 = 0$.**

$2z^2 + 8 = 0 \to z^2 = -4 \to z = \pm\sqrt{-4} = \pm\,2i \to z_1 = 2i;\ z_2 = -2i$

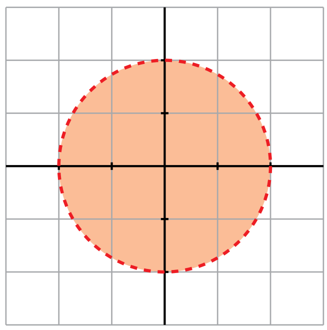
18 **Representa gráficamente:**

a) $Re(z) \geq 3$ $\quad$ **b)** $|z| < 2$ $\quad$ **c)** $z - \bar{z} = -4i$

a)



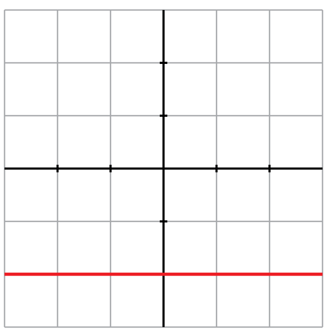
b)



c) Si $z = a + bi \to z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$

$z - \overline{z} = -4i$

Por tanto: $2bi = -4i \to b = -2$



Autoevaluación

Página 242

1 **Dados los vectores $\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $\vec{v}(0, -2)$, calcula:**

a) $|\vec{u}|$ **b)** $-2\vec{u} + 3\vec{v}$ **c)** $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v})$

$\vec{u}\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ $\vec{v}\,(0, -2)$

a) $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

b) $-2\vec{u} + 3\vec{v} = -2\left(\frac{1}{2}, -1\right) + 3(0, -2) = (-1, 2) + (0, -6) = (-1, -4)$

c) $2\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = 2 \cdot (-2) \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -4\left(\frac{1}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot (-2)\right) = -8$

2 **Determina el valor de k para que los vectores $\vec{a}(1, 3)$ y $\vec{b}(6, k)$ sean ortogonales.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 3) \cdot (6, k) = 6 + 3k = 0 \ \rightarrow\ k = -2$

3 **Dados los vectores $\vec{u}(-1, 0)$ y $\vec{v}(1, 2)$:**

a) Calcula $proy_{\vec{u}}\, \vec{v}$.

b) Calcula el ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Da las coordenadas del vector $\vec{w}(4, 6)$ en la base $B(\vec{u}, \vec{v})$.

a) $proy_{\vec{u}}\, \vec{v} = |\vec{v}|\, cos\, \alpha = \frac{|\vec{v}| \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-1}{1} = -1$

b) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 116°\ 33'\ 54''$

c) $\vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v} \ \rightarrow\ (4, 6) = k(-1, 0) + s(1, 2) = (-k + s, 25) \ \rightarrow\ \left.\begin{array}{r} -k + s = 4 \\ 2s = 6 \end{array}\right\}\ s = 3,\ k = -1$

$w = -\vec{u} + 3\vec{v}$

4 **Determina el valor de y para que los puntos $A(0, 1)$, $B(-1, 4)$ y $C(3, y)$ estén alineados.**

Para que A, B y C estén alineados, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ deben tener la misma dirección, es decir, deben ser proporcionales.

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}\,(-1, 3) \\ \overrightarrow{BC}\,(4, y - 4) \end{array}\right\}\ \frac{y - 4}{3} = \frac{4}{-1} \ \rightarrow\ 4 - y = 12 \ \rightarrow\ y = -8$

5 **Halla las coordenadas del vértice D del paralelogramo $ABCD$, donde $A(2, 2)$, $B(3, 1)$ y $C(4, 2)$.**

$D = (x, y)$

El vector $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ en un paralelogramo.

$\overrightarrow{AB} = (1, -1)$; $\overrightarrow{DC} = (4 - x, 2 - y)$

$\left\{\begin{array}{l} 1 = 4 - x \ \rightarrow\ x = 3 \\ -1 = 2 - y \ \rightarrow\ y = 3 \end{array}\right. \ \rightarrow\ D = (3, 3)$

6 **Halla en las formas paramétrica e implícita la ecuación de la recta que pasa por $P(0, 3)$ y es perpendicular a la recta s: $\frac{x+1}{2} = 1 - y$.**

s: $\frac{x+1}{2} = 1 - y \to \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1}$. Vector dirección de s: $\vec{v}(2, -1)$

Un vector perpendicular a $\vec{v}$ es $\vec{u}(1, 2)$.

Buscamos una recta r que pasa por $P(0, 3)$ y tiene como vector dirección a $\vec{u}(1, 2)$:

— Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 3 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x = t \\ t = \frac{y-3}{2} \end{array}\right\} x = \frac{y-3}{2} \to 2x = y - 3 \to 2x - y + 3 = 0$$

— Ecuación implícita: $2x - y + 3 = 0$

7 **Se consideran las rectas r: $2x + y - 1 = 0$ y s: $kx - y + 5 = 0$. Determina k en cada uno de los siguientes casos:**

a) r y s son paralelas.

b) r y s se cortan en el punto $P(2, -3)$.

c) r y s son perpendiculares.

a) r: $2x + y - 1 = 0$

s: $kx - y + 5 = 0$

r y s son paralelas si sus vectores de dirección $\vec{u}(2, 1)$ y $\vec{v}(k, -1)$, lo son:

$$\vec{v} = t\vec{u} \to (k, -1) = t(2, 1) \to \left.\begin{array}{r} k = 2t \\ -1 = t \end{array}\right\} t = -1,\ k = -2$$

b) Comprobamos que $P(2, -3)$ es un punto de $r \to 2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0$

Buscamos ahora el valor de k para el que P también pertenece a s:

$k \cdot 2 - (-3) + 5 = 0 \to 2k + 8 = 0 \to k = -4$

c) Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (-1, 2)$, $\vec{d}_s = (1, k)$

Para que sean perpendiculares, el producto escalar de sus vectores de dirección tiene que ser cero.

$$\vec{d}_r \bullet \vec{d}_s = (-1, 2) \bullet (1, k) = -1 + 2k = 0 \to k = \frac{1}{2}$$

8 **Halla la distancia entre las rectas r y s.**

r: $y = x + 2$ $\qquad$ **s: $\begin{cases} x = t \\ y = t - 2 \end{cases}$**

Vectores de dirección de las rectas: $\vec{d}_r = (1, 1)$, $\vec{d}_s = (1, 1)$, luego son paralelas.

Sea $P \in s$, por ejemplo, $P = (0, -2)$.

r: $y = x + 2 \to x - y + 2 = 0$

$$dist\,(r, s) = dist\,(P, r) = \left| \frac{-(-2) + 2}{\sqrt{2}} \right| = 2\sqrt{2}$$

9 **Obtén la expresión analítica del haz de rectas al que pertenecen $r: 2x + y - 3 = 0$ y $s: x + y - 2 = 0$. Halla la recta de ese haz que pasa por $P(2, 3)$.**

Expresión analítica del haz: $k(2x + y - 3) + t(x + y - 2) = 0$

Como la recta que buscamos ha de pasar por el punto (2, 3),

$$k(2 \cdot 2 + 3 - 3) + t(2 + 3 - 2) = 0 \to 4k + 3t = 0$$

Cualquier par de valores de k y t que cumplan la igualdad anterior dan lugar a la misma recta.

Tomamos, por ejemplo, $k = 3$ y $t = -4$. Así:

$$3(2x + y - 3) - 4(x + y - 2) = 0 \to 6x + 3y - 9 - 4x - 4y + 8 = 0 \to$$

$\to 2x - y - 1 = 0$ es la recta del haz que pasa por el punto (2, 3).

10 **Solo una de estas ecuaciones corresponde a una circunferencia. Justifica cuál es y determina su centro y su radio:**

$C_1: x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

$C_2: x^2 + y^2 - 2xy + 6y + 6 = 0$

$C_3: x^2 + y^2 - 3x + 5x + 18 = 0$

C_1: $r = \sqrt{1+9-6} = 2 \to$ Circunferencia de centro $O = (-1, 3)$ y radio $r = 2$.

C_2 No es una circunferencia porque tiene término en xy.

C_3: $r^2 = 4 - 18 < 0 \to$ No es circunferencia porque $r^2 < 0$.

11 **Escribe la ecuación de una elipse de centro (0, 0) y focos en el eje de abscisas, sabiendo que su excentricidad es igual a 4/5 y que uno de sus focos es $F(8, 0)$.**

La ecuación debe ser de la forma $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$a^2 = b^2 + c^2$	• $F(8, 0) = (c, 0) \to c = 8$
$exc = \dfrac{4}{5} = \dfrac{c}{a}$	• $exc = \dfrac{4}{5} = \dfrac{c}{a} \to \dfrac{8}{a} = \dfrac{4}{5} \to a = 10$
$F(8, 0) = (c, 0)$	• $a^2 = b^2 + c^2 \to b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$

Por tanto, la ecuación buscada es: $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

12 **Sin resolver el sistema formado por sus ecuaciones, estudia la posición relativa de la circunferencia de ecuación $C: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la recta $r: 3x - 4y - 1 = 0$.**

Calculamos la distancia de la recta al centro de la circunferencia, $C(1, -2)$:

$$dist\,(r, C) = \frac{3 \cdot 1 - 4(-2) - 1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

Esta distancia coincide con el radio de la circunferencia. Por tanto, son tangentes.

13 **Determina las coordenadas de un vector unitario $\vec{a}(x, y)$ sabiendo que forma un ángulo de 60° con el vector $\vec{u}(2, 0)$.**

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = |\vec{a}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 60° \to 2x = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \to x = \frac{1}{2}$$

$$|\vec{a}| = 1 \to \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \to x^2 + y^2 = 1 \to \frac{1}{4} + y^2 = 1 \to y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Existen, por tanto, dos soluciones: $\vec{a}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\vec{a'}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

14 **Sean $\vec{a}(-5, 5)$ y $\vec{b}(-1, 3)$. Expresa $\vec{a}$ como suma de dos vectores, uno con la misma dirección que $\vec{b}$ y otro perpendicular a $\vec{b}$.**

Los vectores paralelos a $\vec{b}$ son de la forma $k(-1, 3)$, $k \in \mathbb{R}$.

Los vectores perpendiculares a $\vec{b}$ son de la forma $s(3, 1)$, $s \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} = (-5, 5) = k(-1, 3) + s(3, 1) \to \left.\begin{array}{l} -k + 3s = -5 \\ 3k + s = 5 \end{array}\right\} \; s = -1, \;\; k = 2$$

Por tanto, $\vec{a} = (-2, 6) + (-3, -1)$

15 **Halla el simétrico del punto $A(0, 0)$ respecto a la recta $r: x + y - 2 = 0$.**

- Buscamos la ecuación de la recta s que pasa por A y es perpendicular a r:

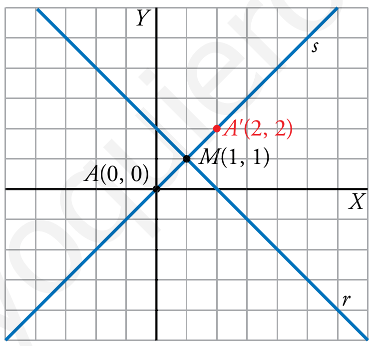
  $s: x - y = 0$

- Punto de intersección de r y s:

$$\left.\left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x = 2 \to x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right\} \; M(1, 1)$$

- El punto $A'(x, y)$ que buscamos es el simétrico de A respecto a M:

$$\left(\frac{x+0}{2}, \frac{y+0}{2}\right) = (1, 1) \to \left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right\} \; A'(2, 2)$$



16 **Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $r: 2x - y + 1 = 0$ y $s: \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{2}$ y forma un ángulo de 45° con la recta r.**

Hallamos el punto de intersección de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 1 = 0 \\ \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{-2} \end{array}\right\} \text{ Resolviendo el sistema obtenemos el punto } P(1, 3).$$

La pendiente de r es 2.

$$1 = tg\, 45° = \left|\frac{2-m}{1+2m}\right| \begin{array}{l} \nearrow\; 2 - m = 1 + 2m \to m = \frac{1}{3} \\ \searrow\; 2 - m = -1 - 2m \to m = -3 \end{array}$$

Hay dos soluciones:

$t: y - 3 = \frac{1}{3}(x - 1)$

$t': y - 3 = -3(x - 1)$

17 **Halla los puntos de la recta $y = 0$ que distan 3 unidades de la recta $3x - 4y = 0$.**

Los puntos de la recta $y = 0$ son de la forma $P(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$.

$r: 3x - 4y = 0$

$$dist\,(P, r) = \frac{|3x - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3x|}{5} = 3$$

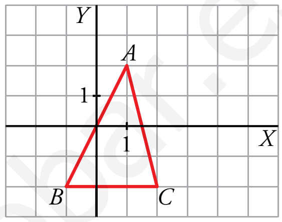
$$|3x| = 15 \begin{cases} 3x = 15 \to x = 5 \\ 3x = -15 \to x = -5 \end{cases}$$

Hay dos puntos que cumplen la condición pedida: $P(5, 0)$ y $P'(-5, 0)$.

18 **En el triángulo ABC de la figura, calcula:**

a) El ortocentro.

b) El área del triángulo.



a) Ortocentro: $R = h_A \cap h_B \cap h_C$, donde h_A, h_B y h_C son las alturas del triángulo desde A, B y C, respectivamente.

$A(1, 2)$ $\quad B(-1, -2)$ $\quad C(2, -2)$

Calculamos las ecuaciones de dos de las alturas:

$$h_A \begin{cases} \vec{a} \perp \overrightarrow{BC} = (3, 0) \to \vec{a} = (0, 3) \\ A(1, 2) \in h_A \end{cases} \to h_A: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases} \to h_A: x = 1$$

$$h_B \begin{cases} \vec{b} \perp \overrightarrow{AC} = (1, -4) \to \vec{b} = (4, 1) \\ B(-1, -2) \in h_B \end{cases} \to h_B: \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = t - 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{x+1}{4} \\ t = y + 2 \end{array}\right\} \frac{x+1}{4} = y + 2 \to x + 1 = 4y + 8 \to x - 4y - 7 = 0$$

$h_B: x - 4y - 7 = 0$

Calculamos ahora $h_A \cap h_B$:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ x - 4y - 7 = 0 \end{array}\right\} 1 - 4y - 7 = 0 \to y = -\frac{3}{2}$$

$$R = h_A \cap h_B = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$$

b) Área del triángulo $ABC = \dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AM}|}{2}$, donde $M = h_A \cap r_{BC}$ y r_{BC} es la recta que contiene al lado BC.

$$\left.\begin{array}{l} h_A: x = 1 \\ r_{BC}: y = -2 \end{array}\right\} h_A \cap r_{BC} = (1, -2) = M$$

$\overrightarrow{BC} = (3, 0) \to |\overrightarrow{BC}| = 3$

$\overrightarrow{AM} = (0, -4) \to |\overrightarrow{AM}| = 4$

Área del triángulo $ABC = \dfrac{3 \cdot 4}{2} = 6\ \text{u}^2$

19 **Considera el triángulo formado por la bisectriz del primer cuadrante, b, el eje de abscisas y la recta $r: y = -x + 4$. Obtén:**

a) La mediatriz del lado contenido en la recta r.

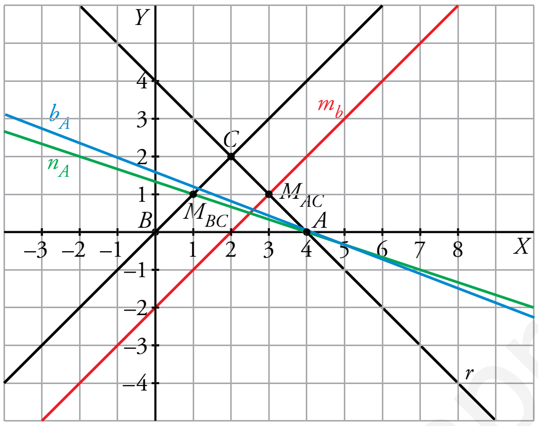
b) La bisectriz del ángulo que forman r y el eje OX.

c) La mediana relativa al lado contenido en b.

Lado AB, eje de abscisas: $y = 0$

Lado BC, bisectriz del primer cuadrante: $y = x$

Lado AC, recta $r: y = -x + 4$



Vértices:

$$A \rightarrow \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 4,\ y = 0 \rightarrow A = (4, 0)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 0,\ y = 0 \rightarrow B = (0, 0)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases} \rightarrow x = 2,\ y = 2 \rightarrow C = (2, 2)$$

a) La mediatriz pasa por M_{AC} y es perpendicular a $\overrightarrow{AC} = (-2, 2)$

$M_{AC} = (3, 1)$

Luego $m_b: \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{2}$

b) Sea $X = (x, y)$ un punto genérico de la bisectriz, entonces cumple:

$$\frac{|x+y-4|}{\sqrt{2}} = |y| \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{2}} = y \rightarrow x + (1-\sqrt{2})y - 4 = 0 \\ \dfrac{x+y-4}{\sqrt{2}} = -y \rightarrow x + (1+\sqrt{2})y - 4 = 0 \end{cases}$$

La bisectriz del ángulo A es $b_A: x + (1 + \sqrt{2})y - 4 = 0$ porque debe tener pendiente negativa como se observa en el dibujo.

c) La mediana pasa por A y M_{BC}.

$M_{BC} = (1, 1)$

$\overrightarrow{M_{BC}A} = (3, -1)$

Luego $n_A: \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y}{-1}$

20 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

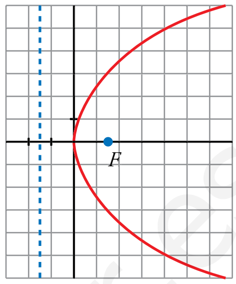
a) $2y^2 - 12x = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 = 16$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

a) $2y^2 - 12x = 0 \;\rightarrow\; y^2 = 6x$

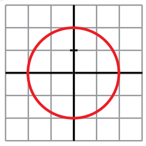


Es un parábola.

Foco $\rightarrow$ $F\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$; recta directriz $\rightarrow$ $r: x = -\dfrac{3}{2}$

Vértice $\rightarrow$ (0, 0)

b) $4x^2 + 4y^2 = 16 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = 4$

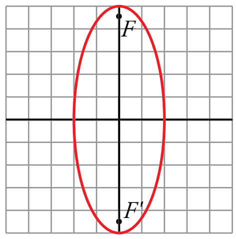


Es una circunferencia.

Centro $\rightarrow$ (0, 0)

Radio $\rightarrow$ $r = 2$

c) $25x^2 + 4y^2 = 100 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$



Es una elipse con los focos en el eje Y.

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

$a = 5$; $b = 2$; $x = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

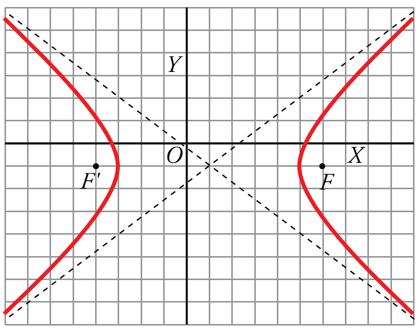
Focos: $F(0, \sqrt{21})$ y $F'(0, -\sqrt{21})$

Semieje mayor: 5

Semieje menor: 2

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92$

d) $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$



Es una hipérbola.

Centro: (1, –1)

Semiejes: $a = 4$; $b = 3$, $c^2 = 4^2 + 3^2 \;\rightarrow\; c = 5$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4} = 1,25$

Asíntotas: $\begin{cases} r: y = \dfrac{3}{4}(x-1) - 1 \\ r': y = -\dfrac{3}{4}(x-1) - 1 \end{cases}$

Focos: $F(6, -1)$ y $F'(-4, -1)$

21 **Halla la ecuación de la parábola de vértice $V(-1, -1)$ y directriz $r: x = -3$.**

Puesto que el vértice tiene que equidistar del foco y de la directriz, ha de ser $F(1, -1)$.

Los puntos $P(x, y)$ de la parábola han de cumplir:

$dist\,(P, F) = dist\,(P, d)$

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = |x + 3|$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$(y + 1)^2 + x^2 + 1 - 2x = x^2 + 6x + 9 \to (y + 1)^2 = 8x + 8 \to (y + 1)^2 = 8(x + 1)$

La ecuación de la parábola es $(y + 1)^2 = 8(x + 1)$.

22 **Dado un segmento AB de longitud 4, halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano que verifican:**

$$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$$

* ***Toma como eje X la recta que contiene al segmento, y como eje Y la mediatriz de AB.***

Tomamos como eje X la recta que contiene al segmento AB, y como eje Y, la mediantriz de AB.

En este caso, será $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto genérico del plano que verifica:

$2\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 18$

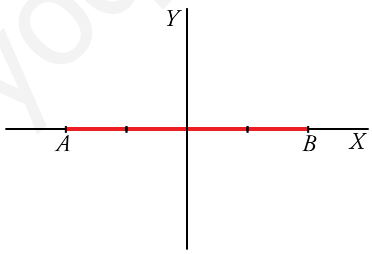
$2\left(\sqrt{(x+2)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-2)^2 + y^2}\right)^2 = 18$

$2(x^2 + 4x + 4 + y^2) + (x^2 - 4x + 4 + y^2) = 18$

$2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 = 18$

$3x^2 + 3y^2 + 4x + 12 = 18$

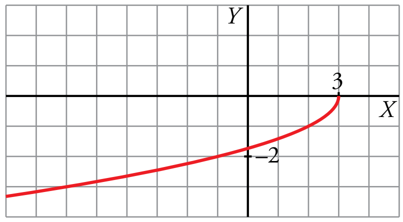
La ecuación pedida es: $3x^2 + 3y^2 + 4x - 6 = 0$.



Autoevaluación

Página 332

1 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y a partir de ella responde:**



a) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

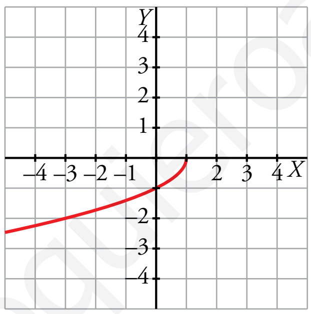
b) Representa gráficamente: $y = f(x + 2)$; $y = f(x) + 1$; $y = -f(x)$

c) Representa la función inversa de $f(x)$.

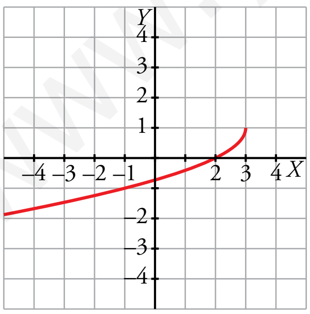
a) Su dominio es el intervalo $(-\infty, 3]$.

Su recorrido es $(-\infty, 0]$.

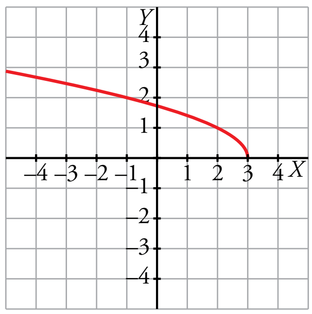
b) La gráfica de $f(x + 2)$ es la de $f(x)$ desplazada dos unidades a la izquierda.



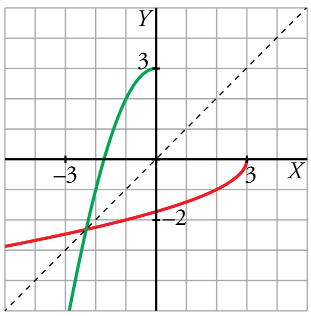
La gráfica de $f(x) + 1$ es la de $f(x)$ desplazada una unidad hacia arriba.



La gráfica de $-f(x)$ es la simétrica de $f(x)$ respecto del eje OX.



c) La gráfica de la función inversa de $f(x)$ es simétrica de la de $f(x)$ respecto a la recta $y = x$:



2 **Representa las funciones:**

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$

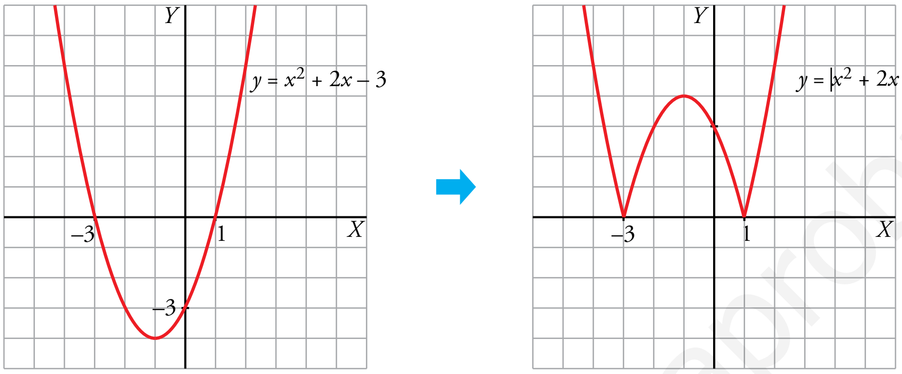
b) $y = log_2\,(x + 3)$

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$. Estudiamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

Cortes con los ejes $\begin{cases} x = 0,\ \ y = -3 \\ y = 0 \ \rightarrow\ x^2 + 2x - 3 = 0 \ \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$

Vértice $\begin{cases} x = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4 \end{cases}$

Su representación es:



Así, los valores positivos quedan igual, y para los negativos tomamos sus opuestos.

b) $y = log_2\,(x + 3) \ \rightarrow\ Dom = (-3, +\infty)$

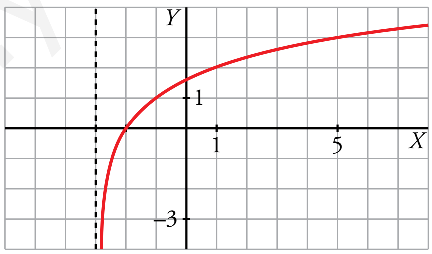
Hallamos algunos puntos

x	–2	–1	1	5
y	0	1	2	3

y vemos que:

$\lim\limits_{x \to -3^+} log_2\,(x + 3) = -\infty$

Su gráfica es:



3 **Un parque de atracciones está abierto al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función $N(t) = -at^2 + 680t + c$, donde t es la hora de visita. Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1 500 visitantes, halla a y c y representa la función.**

Como la gráfica de la función $N(t)$ es una parábola, el máximo se alcanza en su vértice, luego:

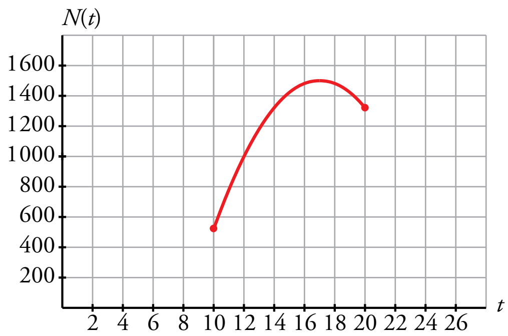
$$\frac{-680}{2 \cdot (-a)} = 17 \ \rightarrow\ a = \frac{680}{34} = 20 \ \rightarrow\ N(t) = -20t^2 + 680t + c$$

Como a las 17 h el parque tiene 1 500 visitantes, se tiene que:

$$1\,500 = -20 \cdot 17^2 + 680 \cdot 17 + c \ \rightarrow\ c = -4\,280$$

La función es $N(t) = -20t^2 + 680t - 4\,280$

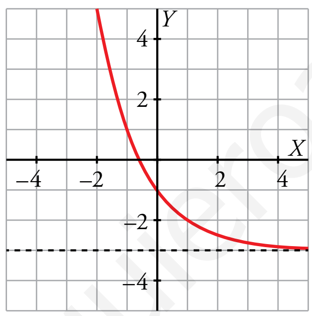
Para representar la función calculamos $N(10)$ y $N(20)$. El vértice y estos dos puntos son suficientes para construir la gráfica.



4 **Representa la función $y = 2^{1-x} - 3$ y halla su función inversa.**

$y = 2^{1-x} - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$

Por tanto, se trata de una función exponencial con base menor que 1. Su gráfica es como la de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ desplazada 1 unidad hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo.



5 **Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x}$ (x = tiempo, en días; y = número de insectos, en miles).**

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en llegar a 10 000 insectos.

a) $x = 0 \rightarrow y = 1 + 0{,}5 \cdot e^0 = 1{,}5 \rightarrow$ Población inicial: 1 500 insectos.

b) $y = 10 \rightarrow 10 = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x} \rightarrow \frac{9}{0{,}5} = e^{0{,}4x} \rightarrow 0{,}4x = \ln 18 \rightarrow x = \frac{\ln 18}{0{,}4} = 7{,}23$

Tarda entre 7 y 8 días.

6 **A partir de las funciones $f(x) = e^x$; $g(x) = sen\ x$; $h(x) = \sqrt{x}$, hemos obtenido, por composición, las funciones:**

$$p(x) = sen\ \sqrt{x};\quad q(x) = e^{sen\ x};\quad r(x) = \sqrt{e^x}$$

Explica el procedimiento seguido.

$p(x) = sen\ \sqrt{x} \rightarrow p(x) = g[h(x)] \rightarrow p = g \circ h$

$q(x) = e^{sen\ x} \rightarrow q(x) = f[g(x)] \rightarrow q = f \circ g$

$r(x) = \sqrt{e^x} \rightarrow r(x) = h[f(x)] \rightarrow r = h \circ f$

7 **Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-5}{x^2+1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-5}{x^2+1} = 0$ porque el grado del numerador es menor que el del denominador.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e}{e^x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \to$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-2} = 0$$

8 **En la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x-b & \text{si } x<2 \\ 3 & \text{si } x=2 \\ -2x+9 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.

b) Después de hallar b, explica si f es continua en $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-b & \text{si } x<2 \\ 3 & \text{si } x=2 \\ -2x+9 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Para que tenga límite en $x = 2$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - b = 6-b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 \cdot 2 + 9 = 5 \end{array}\right\} \to 6-b=5 \to b=1$$

b) Para que sea continua en $x = 2$, debe ser $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

$f(2) = 3$

Como $f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x)$, f no es continua en $x = 2$.

9 **Prueba, utilizando la definición, que la función derivada de $f(x) = \dfrac{3x-5}{2}$ es $f'(x) = \dfrac{3}{2}$.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x) = \frac{3x-5}{2}$$

$$f(x+h) = \frac{3(x+h)-5}{2}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{3x+3h-5-3x+5}{2} = \frac{3h}{2}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3h}{2} : h = \frac{3}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

10 Halla la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$ que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

Pendiente de $x + y + 3 = 0$: $m = -1$

El valor de la derivada en el punto de tangencia debe ser igual a –1.

$f(x) = -x^2 + 5x$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2x + 5 \to -2x + 5 = -1 \to x = 3 \\ f(3) = -3^2 + 5 \cdot 3 = 6 \end{array}\right\} \to \text{Punto de tangencia: } P(3, 6)$$

Ecuación de la recta tangente buscada: $y = 6 - 1(x - 3) \to y = 9 - x$

11 Halla los puntos singulares de $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.

$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5 \to f'(x) = -4x^3 + 16x \to f'(x) = 0 \to -4x^3 + 16x = 0 \to$

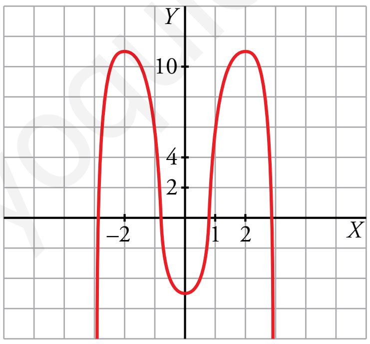
$$\to 4x(-x^2 + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \to f(0) = -5 \\ x = 2 \to f(2) = -16 + 32 - 5 = 11 \\ x = -2 \to f(-2) = -16 + 32 - 5 = 11 \end{cases}$$

Los puntos singulares son (0, –5), (2, 11) y (–2, 11).

Ramas infinitas: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \end{cases}$

Máximos: (2, 11) y (–2, 11)

Mínimo: (0, –5)



12 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{tg\, x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{ln\, x}{x}$ **c)** $f(x) = arc\ tg\, x^2$ **d)** $f(x) = e^{\pi}$

e) $f(x) = \dfrac{arc\ sen\, x}{2}$ **f)** $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ **g)** $f(x) = ln\, \sqrt[3]{(x \cdot e)^2}$ **h)** $f(x) = ln\, \dfrac{2x + 3}{x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2\sqrt{tg\, x}}$

b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - ln\, x}{x^2} = \dfrac{1 - ln\, x}{x^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

d) $f'(x) = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$

f) $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} = \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}$

g) $f'(x) = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{x} \cdot e\right) = \dfrac{2e}{3x}$

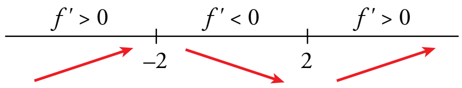
h) $f'(x) = \dfrac{2}{2x + 3} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{-2x - 6}{x(2x + 3)}$

13 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:**

a) $y = x^3 - 12x$ **b)** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

a) $f(x) = x^3 - 12x \to f'(x) = 3x^2 - 12;\ \ 3x^2 - 12 = 0 \ \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de f' para saber dónde crece y dónde decrece la función:



f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. f decrece en $(-2, 2)$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x} \to f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - x^2 + 4}{x^2} = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{x^2 + 4}{x^2} = 0$ No tiene solución.

f' es positiva para cualquier valor de x. f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$.

14 **En la función** $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ **estudia:**

a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

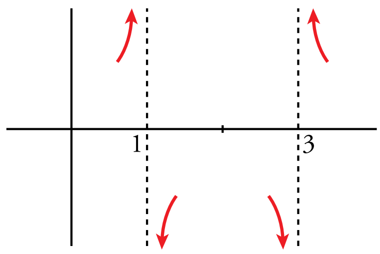
b) Los máximos y los mínimos relativos.

c) Representa su gráfica.

a) • Asíntotas verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \to x = 1,\ x = 3$

Posición de $x = 1$ $\begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \end{cases}$

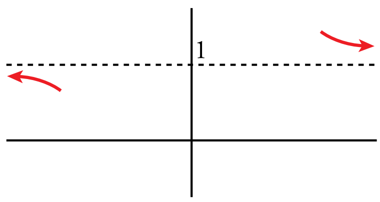
Posición de $x = 3$ $\begin{cases} x \to 3^- \ \ f(x) \to -\infty \\ x \to 3^+ \ \ f(x) \to +\infty \end{cases}$



• Asíntota horizontal:

$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \to y = 1$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty \ \ f(x) > 1 \\ x \to -\infty \ \ f(x) < 1 \end{cases}$



b) Máximos y mínimos:

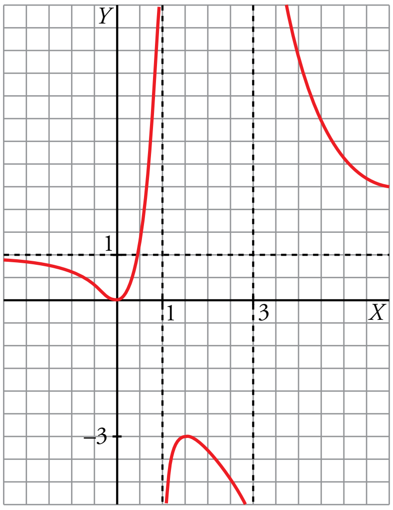
$f'(x) = \dfrac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

$f'(x) = 0 \to -4x^2 + 6x = 0 \ \begin{cases} x = 0 \\ x = 3/2 \end{cases}$

$f(0) = 0 \to P(0, 0)$ es un mínimo relativo.

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -3 \to Q\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$ es un máximo relativo.

c)



15 **¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?**

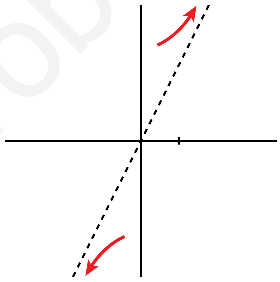
a) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x - 1}$ **b)** $y = 1 + \dfrac{3}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x}$

Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

Tiene asíntota oblicua $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x} = \dfrac{4}{x} + 2x$

La asíntota es $y = 2x$.

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty \ \text{curva} > \text{asíntota} \\ x \to -\infty \ \text{curva} < \text{asíntota} \end{cases}$



16 **Calcula a y b de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en (2, 1).**

Si $y = x^3 + ax + b$ tiene un punto singular en (2, 1), la curva pasa por ese punto y su derivada es igual a 0 en él.

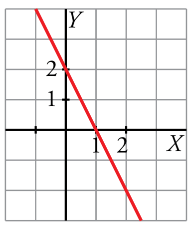
$(2, 1) \in (x, f(x)) \to 1 = 2^3 + a \cdot 2 + b \to 2a + b = -7$

$f'(x) = 0$ en $x = 2 \to f'(x) = 3x^2 + a \to 0 = 3 \cdot 2^2 + a \to 12 + a = 0$

$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ 12 + a = 0 \end{cases} \to a = -12,\ b = 17$

La función es $y = x^3 - 12x + 17$.

17 **Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.**



a) Di para qué valores de x es f creciente y para cuáles f es decreciente.

b) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal? Justifícalo.

a) f es creciente cuando $f' > 0 \to f$ crece si $x < 1$ y decrece si $x > 1$.

b) Tiene un punto de tangente horizontal en $x = 1$, porque en ese punto $f' = 0$.

18 Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Llamamos $f_1(x) = x^2 + 2x - 1$ y $f_2(x) = x + 1$

Ambas funciones son continuas.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 \\ f_2(1) = 1 + 1 = 2 \end{array}\right\} \text{Como coinciden, la función es continua en } x = 1.$$

Por tanto, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = 2x + 2 \;\rightarrow\; f'_1(1) = 4 \\ f'_2(x) = 1 \;\rightarrow\; f'_2(1) = 1 \end{array}\right\} \text{Como son distintos, la función no es derivable en } x = 1.$$

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

19 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + e) - e^x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + e) - e^x}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x + e} - e^x}{\cos x} = \frac{1}{e} - 1$$

20 De todos los rectángulos de 60 m² de área, ¿cuáles son las dimensiones del que tiene el menor perímetro?

Supongamos que x e y son la base y la altura del rectángulo, respectivamente.

Como el área es igual a 60 m², se tiene que $xy = 60 \;\rightarrow\; y = \dfrac{60}{x}$

El perímetro del rectángulo es $P = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \dfrac{60}{x} = 2x + \dfrac{120}{x}$

Buscamos el rectángulo de perímetro mínimo:

$P' = 2 - \dfrac{120}{x^2} \;\rightarrow\; 2 - \dfrac{120}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 60 \;\rightarrow$ La única solución válida es $x = 2\sqrt{15}$.

Comprobamos que el valor obtenido es un mínimo de la función P:

$P' < 0$ | $P' > 0$

$2\sqrt{15}$

Por tanto, las medidas son $x = 2\sqrt{15}$ m, $y = \dfrac{60}{2\sqrt{15}} = 2\sqrt{15}$ m y el perímetro mínimo es $8\sqrt{15}$ m.