

COCIENTE DE POLINOMIOS

Sean $a_n = a_0n^p + a_1n^{p-1} + \dots + a_p$ y $b_n = b_0n^q + b_1n^{q-1} + \dots + b_q$, con $p, q \in \mathbb{N}$.

Estudiamos el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\infty}{\infty}$$

Método: se divide el numerador y el denominador por la mayor potencia de la n del denominador.

Casos:

Caso I: grado Numerador = grado Denominador

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n - 7}{-2n^2 + n - 3} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n^2 + 5n - 7}{n^2}}{\frac{-2n^2 + n - 3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}}{-2 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{3 + 0 - 0}{-2 + 0 - 0} = \boxed{\frac{3}{-2}}$$

Caso II: grado Numerador < grado Denominador

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 - 3n + 4}{n^4 + n^3 + 2n^2 + 1} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-n^2 - 3n + 4}{n^4}}{\frac{n^4 + n^3 + 2n^2 + 1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^4}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{-0 - 0 + 4}{1 + 0 + 0 + 0} = \boxed{0}$$

Caso III: grado Numerador > grado Denominador

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 4n^2 + 5n - 1}{-3n^2 + 8n - 1} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^3 - 4n^2 + 5n - 1}{n^2}}{\frac{-3n^2 + 8n - 1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 4 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{-3 + \frac{8}{n} - \frac{1}{n^2}} = \frac{\infty - 4 + 0 - 0}{-3 + 0 - 0} = \boxed{-\infty}$$

Resumen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0n^p + a_1n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0n^q + b_1n^{q-1} + \dots + b_q} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0} & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p < q \\ \pm\infty & \text{si } p > q \quad (*) \end{cases}$$

(*) El signo depende de los signos de a_0 y b_0 .

Observación:

Algunos límites se reducen a este tipo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{n - 4} - \frac{n^2 + 2}{3n - 1} \right) = (\infty - \infty)$$

Realizando la diferencia:

$$\frac{3n^2 + 1}{n - 4} - \frac{n^2 + 2}{3n - 1} = \frac{(3n^2 + 1) \cdot (3n - 1) - (n^2 + 2) \cdot (n - 4)}{(n - 4) \cdot (3n - 1)} =$$

$$\frac{9n^3 - 3n^2 + 3n - 1 - (n + 2n - 4n^2 - 8)}{3n^2 - n - 12n + 1} = \frac{9n^3 + n^2 + 7}{3n^2 - 13n + 1} \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 1}{n - 4} - \frac{n^2 + 2}{3n - 1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^3 + n^2 + 7}{3n^2 - 13n + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \boxed{+\infty}$$

www.yoquieroaprobar.es