Números complejos

1º Calcula el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

a) +3 b) –7 c) +4i d) – 5i

e) 2 + i f) –1+i g) −3−2i h) 4−2i

2º Expresa en forma binómica los siguientes complejos

a) 3_{150° b) $2_{\frac{5\pi}{4}}$ c) 4_{7000°

3º Efectúa las operaciones expresando el resultado en forma polar y binómica

a) $(2+i)\cdot(1-3i)\cdot(3+2i)$ b) $\dfrac{2-i}{3-i}$ b) $\dfrac{\left(1+i^3\right)^5}{\left(1-i^7\right)^6}$

4º Calcula:

a) $\sqrt[4]{2i}$ b) $\sqrt[6]{-\sqrt{3}+i}$ c) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$

5º Resuelve:

a) $z^6+32z=0$ b) $\dfrac{z+i}{z-i}=\dfrac{3(z-i)}{z+i}$ c) $z^4-16=0$

6º Determina el número real a para que el módulo de $z=\dfrac{1-ai}{2+i}$ sea 1.

7º Calcula k para que el número complejo $z=\dfrac{2+i}{k+i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.

8º Halla el valor de k para que el número complejo $z=\dfrac{2-ki}{k-i}$ sea:

a) Un número imaginario puro.
b) Un número real puro.

9º Determina el valor de a y b para que el número complejo $z=\dfrac{a+2i}{3+bi}$ sea igual a $\left(\sqrt{2}\right)_{315^\circ}$.

10º Rellena la tabla siguiente:

Cartesiana	Binómica	Polar	Trigonométrica
(–2, 1)			
	3 – 2i		
		2_{60°	
			$3\cdot\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot 3\cdot\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$

11º Halla dos complejos sabiendo que su producto es 27i y que uno de ellos es el cuadrado del otro.

12º Si $z=r_\alpha$ es un número complejo cómo se expresaría:

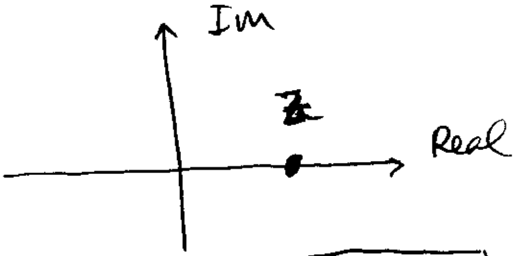
a) su conjugado,
b) su inverso,
c) su opuesto,
d) su cuadrado.

www.yoquieroaprobar.es

1º Forma binómica a forma polar.

CASOS.

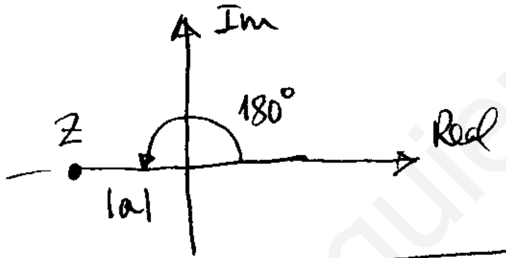
a) Real puro y positivo: $\boxed{z = a = (a,0)}$, $a > 0$.



$\left.\begin{array}{l} r = a \\ \alpha = 0^\circ = 0 \text{ rad} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z = a = a_{0^\circ}}$

$\boxed{z = 3 = (3,0) = 3_{0^\circ}}$.

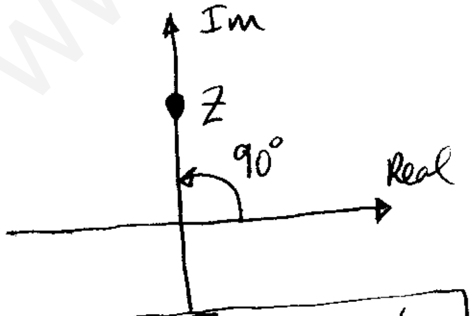
b) Real puro y negativo: $\boxed{z = a = (a,0)}$, $a < 0$.



$\left.\begin{array}{l} r = |a| \\ \alpha = 180^\circ = \pi \text{ rad} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z = a = |a|_{180^\circ}}$

$\boxed{z = -7 = (-7,0) = 7_{180^\circ}}$

c) Imaginario puro y positivo $\boxed{z = bi = (0,b)}$, $b > 0$

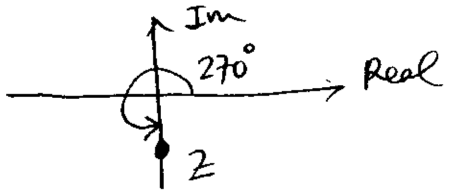


$\left.\begin{array}{l} r = b \\ \alpha = 90^\circ = \pi/2 \text{ rad} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z = bi = b_{90^\circ}}$

$\boxed{z = 4i = (0,4) = 4_{90^\circ}}$

www.yoquieroaprobar.es

d) Imaginario puro y negativo: $z = bi = (0, b)$, $b < 0$



$$\left.\begin{array}{l} r = |b| \\ \alpha = 270° = \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \end{array}\right\} \boxed{z = bi = |b|_{270°}}$$

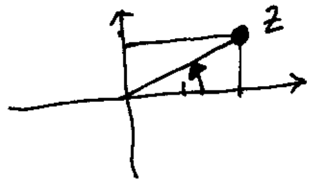
$$\boxed{z = -5i = (0, -5) = 5_{270°}}$$

e) $z = 2 + i = (2, 1) \in 1^{er}$ cuadrante.

$r^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \rightarrow r = \sqrt{5}$

$tg\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha_1 = 26{,}6° \in 1^{er}$ cuadr. $\rightarrow$ válido

$\alpha_2 = 26{,}6° + 180° \in 3^{er}$ cuadrante. $\rightarrow$ no válido



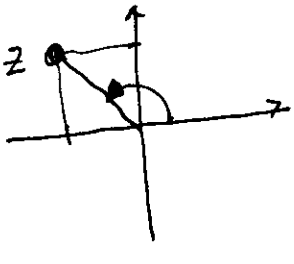
$\Rightarrow \boxed{z = \sqrt{5}_{26{,}6°}}$

f) $z = -1 + i = (-1, 1) \in 2^{o}$ cuadrante.

$r^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$

$tg\alpha = \frac{1}{-1} \rightarrow \alpha_1 = -45° \in 4^{o}$ cuadrante $\rightarrow$ no válida

$\alpha_2 = -45° + 180° \in 2^{o}$ cuadrante $\rightarrow$ válida. $(135°)$



$\Rightarrow \boxed{z = \sqrt{2}_{135°}}$

www.yoquieroaprobar.es

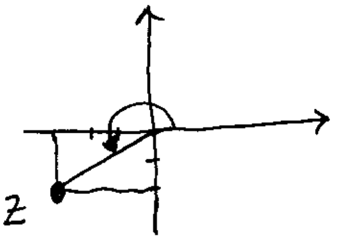
g) $z = -3-2i = (-3,-2) \in 3^{er}$ cuadrante.

$r^2 = (-3)^2 + (-2)^2 = 13 \longrightarrow r = \sqrt{13}$

$tg\alpha = \dfrac{-2}{-3} \longrightarrow \alpha_1 \simeq 33{,}7^\circ \in 1^{er}$ cuadrante $\longrightarrow$ no válida

$\alpha_2 \simeq 33{,}7^\circ + 180^\circ \in 3^{er}$ cuadrante $\rightarrow$ válida. $(213{,}7^\circ)$

$\Rrightarrow \boxed{z = \sqrt{13}_{\,213{,}7^\circ}}$



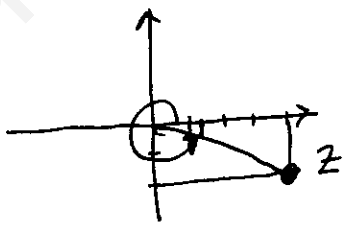
h) $z = 4-2i = (4,-2) \in 4^{\circ}$ cuadrante.

$r^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20 \longrightarrow r = \sqrt{20}$.

$tg\alpha = \dfrac{-2}{4} \rightarrow \alpha_1 = -26{,}6^\circ \in 4^{\circ}$ cuadrante $(-26{,}6 + 360 = 333{,}4^\circ)$ válida

$\alpha_2 = -26{,}6^\circ + 180^\circ \in 2^{\circ}$ cuadrante $\rightarrow$ no válida.

$\Rrightarrow \boxed{z = \sqrt{20}_{\,333{,}4^\circ}}$



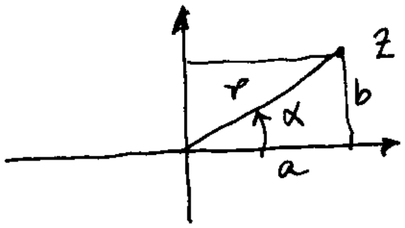
OBSERVACIÓN.

La ecuación $\boxed{tg\alpha = \dfrac{b}{a}}$ (b y a son los "datos" y "α" la incógnita) tiene 2 soluciones PERO la calculadora SÓLO nos da 1.

$\alpha_1 = arc\,tg\left(\frac{b}{a}\right)$ $\qquad \alpha_2 = arc\,tg\left(\frac{b}{a}\right) + 180^\circ$.

www.yoquieroaprobar.es

② Las fórmulas son:



$z = r_\alpha = a + bi$

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = a^2 + b^2 \\ tg\,\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = r \cdot \cos\alpha \\ b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array}$$

a) $z = 3_{150} = 3 \cdot \cos 150^\circ + i \cdot 3 \cdot \operatorname{sen} 150^\circ = 3 \cdot (-\cos 30^\circ) + i\, 3 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ$

$= 3 \cdot \dfrac{-\sqrt{3}}{2} + i \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{z = \dfrac{-3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2} i}$

b) $z = 2_{\frac{5\pi}{4}} = 2 \cdot \cos \dfrac{5\pi}{4} + i \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{4} = 2 \cdot \left(-\cos \dfrac{\pi}{4}\right) + i \cdot 2 \cdot \left(-\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)$

$= 2 \cdot \dfrac{-\sqrt{2}}{2} + i \cdot 2 \cdot \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$

c) $z = 4_{7000^\circ} = 4_{160^\circ} = 4 \cdot \cos 160^\circ + i\, 4 \cdot \operatorname{sen} 160^\circ \simeq -3{,}8 + i \cdot 1{,}4.$

$$\begin{array}{r|l} 7000 & 360 \\ \cline{2-2} 3400 & 19 \\ 160 & \end{array} \Rightarrow 7000^\circ = 19 \cdot 360^\circ + 160^\circ$$

www.yoquieroaprobar.es

3º a) $Z = (2+i)\cdot(1-3i)\cdot(3+2i)$

Paso a paso:

$(2+i)\cdot(1-3i) = 2-6i+i-3\underbrace{i^2}_{-1} = 2-5i+3 = 5-5i$

$(5-5i)\cdot(3+2i) = 15+10i-15i-10i^2 = \underline{\underline{25-5i}}$

b) $Z = \dfrac{2-i}{3-i}$

Se multiplica y divide por el conjugado del denominador.

$\dfrac{2-i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i} = \dfrac{6+2i-3i-i^2}{3^2-i^2} = \dfrac{7-i}{10} = \dfrac{7}{10}+i\dfrac{-1}{10} = \left(\dfrac{7}{10}, \dfrac{-1}{10}\right).$

c) $Z = \dfrac{(1+i^3)^5}{(1-i^7)^6}.$

Numerador: $1+i^3 = 1-i = \sqrt{2}_{315^\circ}.$

$m = 1-i \begin{cases} r^2 = 1^2+(-1)^2 = 2 \\ tg\,\alpha = \dfrac{-1}{1} \rightarrow \alpha = -45^\circ = 315^\circ \in 4^\circ \text{ cuadrante.} \end{cases}$

$\Rightarrow (1+i^3)^5 = \left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^5 = \sqrt{2^5}_{5\cdot 315} = \sqrt{2^5}_{1575^\circ} = \sqrt{2^5}_{135^\circ}.$

$1575 \,|\underline{360}$
$\underline{135} \quad 4$

Denominador: $1-i^7 = 1-i^3 = 1+i = \sqrt{2}_{45^\circ}.$

$m = 1+i \begin{cases} r^2 = 1^2+1^2 = 2 \\ tg\,\alpha = \dfrac{1}{1} \rightarrow \alpha = 45^\circ \in 1^\circ \text{ cuadrante.} \end{cases}$

$\Rightarrow (1-i^7)^6 = \left(\sqrt{2}_{45}\right)^6 = \sqrt{2^6}_{6\cdot 45} = \sqrt{2^6}_{270^\circ}.$

$\Rightarrow Z = \dfrac{\sqrt{2^5}_{135^\circ}}{\sqrt{2^6}_{270^\circ}} = \left(\dfrac{\sqrt{2^5}}{\sqrt{2^6}}\right)_{135-270} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)_{-135^\circ} = \boxed{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)_{225^\circ}}$

www.yoquieroaprobar.es

4º a) $\sqrt[4]{2i}$, Raíces cuartas de $2i \Leftrightarrow$ ¿qué números complejos elevados a la 4ª son $2i$?

¿z? $\quad z = \sqrt[4]{2i} \Leftrightarrow \boxed{z^4 = 2i}$

Paso 1: expresión de ambos miembros en forma polar.

$z = r_\alpha \rightarrow z^4 = r^4_{4\alpha}$

$z = 2i = 2_{90°}$ (es un número imaginario puro).

$$\boxed{r^4_{4\alpha} = 2_{90°}}$$

Paso 2: igualdad de complejos en forma polar.

- módulos: $r^4 = 2 \longrightarrow r = \sqrt[4]{2}$.
- argumentos: $4\alpha = 90° + 360k,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{90}{4} + 90k,\ k \in \mathbb{Z}}$

Paso 3: solución.

$k = 0 \longrightarrow \alpha_0 = 22{,}5° \Rightarrow z_0 = \sqrt{2}_{22{,}5°}$.

$k = 1 \longrightarrow \alpha_1 = 112{,}5° \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}_{112{,}5°}$

$k = 2 \longrightarrow \alpha_2 = 202{,}5° \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}_{202{,}5°}$

$k = 3 \longrightarrow \alpha_3 = 292{,}5° \Rightarrow z_3 = \sqrt{2}_{292{,}5°}$.

No hay más valores diferentes, TODOS los demás se repiten cíclicamente.

$k = 4 \longrightarrow \alpha_4 = 22{,}5 + 360° = 22{,}5° = \alpha_1 \quad \ldots$

www.yoquieroaprobar.es

b) $\sqrt[6]{-\sqrt{3}+i} = z \iff \boxed{z^6 = -\sqrt{3}+i}$

Paso 1.

$z = r_\alpha \rightarrow z^6 = (r_\alpha)^6 = r^6_{6\alpha}$

$\overset{*}{z} = -\sqrt{3}+i \begin{cases} r^2 = (-\sqrt{3})^2+1^2 = 4 \rightarrow r = \sqrt{4} = 2. \\ tg\alpha = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = -30^\circ \text{ ó } \alpha = -30^\circ + 180^\circ \end{cases}$

$z = (-\sqrt{3}, 1) \in 2^{\circ}$ cuadrante $\rightarrow \alpha = -30+180 = \underline{150^\circ}$.

$$\boxed{r^6_{6\alpha} = 2_{150^\circ}}$$

Paso 2.

Módulos: $r^6 = 2 \rightarrow \boxed{r = \sqrt[6]{2}.}$

Argumentos: $6\alpha = 150 + 360k.\ , k \in \mathbb{Z}, \iff$

$\alpha = \dfrac{150}{6} + \dfrac{360}{6}k \iff \boxed{\alpha = 25^\circ + 60k\ ,\ k \in \mathbb{Z}}$

Paso 3.

$k=0 \rightarrow \alpha_0 = 25^\circ \longrightarrow z_0 = \sqrt[6]{2}_{25^\circ}$

$k=1 \longrightarrow \alpha_1 = 85^\circ \longrightarrow z_1 = \sqrt[6]{2}_{85^\circ}$

$k=2 \longrightarrow \alpha_2 = 145^\circ \longrightarrow z_2 = \sqrt[6]{2}_{145^\circ}$

$k=3 \longrightarrow \alpha_3 = 205^\circ \longrightarrow z_3 = \sqrt[6]{2}_{205^\circ}$

$k=4 \longrightarrow \alpha_4 = 265^\circ \longrightarrow z_4 = \sqrt[6]{2}_{265^\circ}$

$k=5 \longrightarrow \alpha_5 = 325^\circ \longrightarrow z_5 = \sqrt[6]{2}_{325^\circ}$.

www.yoquieroaprobar.es

c) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3i}} = z \iff \boxed{z^3 = 1-\sqrt{3i}}$

Problema ¿$\sqrt{3i}$? En forma polar es sencillo: $3i = 3_{90°} \to \sqrt{3i} = \sqrt{3_{90°}} = \left(3_{90°}\right)^{1/2}$

$\Rightarrow \sqrt{3i} = \sqrt{3}_{45°}$ //

Paso 1.

$z = r_\alpha \longrightarrow z^3 = (r_\alpha)^3 = r^3_{3\alpha}$.

$z = 1-\sqrt{3i} = 1-\sqrt{3}_{45°} = 1-\left(\sqrt{3}\cdot\cos 45° + i\sqrt{3}\cdot \text{sen}\, 45°\right) =$

$= 1-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{2} = \left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

$r^2 = \left(1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 1-\sqrt{6}+\frac{6}{4}+\frac{6}{4} = 4-\sqrt{6} \to \boxed{r=\sqrt{4-\sqrt{6}}} \simeq 1,25$

$tg\,\alpha = \frac{-\sqrt{6}/2}{1-\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} \to \cancel{\alpha \simeq 80°}$ ó $\alpha = 80°+180°$

como $1-\sqrt{3i}$ está en el 3º cuadrante (mira su forma cartesiana) $\boxed{\alpha = 260°}$

$\Rightarrow \boxed{r^3_{3\alpha} = 1,25_{260°}}$

Paso 2.

Módulos: $r^3 = 1,25 \longrightarrow r = \sqrt[3]{1,25}$

Argumentos: $3\alpha = 260 + 360k \Rightarrow \alpha = \frac{260}{3} + 120k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Paso 3.

$\alpha = 0 \to \alpha_0 = \frac{260}{3} \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{1,25}_{\frac{260}{3}}$

$\alpha = 1 \to \alpha_0 = 260/3 + 120 = \frac{620}{3} \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{1,25}_{\frac{620}{3}}$.

$\alpha = 2 \to \alpha_2 = \frac{260}{3}+240 = \frac{980}{3} \Rightarrow z_3 = \sqrt[3]{1,25}_{\frac{980}{3}}$.

www.yoquieroaprobar.es

5º. a) $\boxed{z^6 + 32z = 0}$

$\Leftrightarrow z\cdot(z^5+32)=0$

·) una solución es $z=0$.

·) $z^5+32=0 \Leftrightarrow z^5=-32$. (Raíces QUINTAS de -32).

Paso 1.

$z = r_\alpha \to z^5 = (r_\alpha)^5 = r^5_{5\alpha}$

$-32 = (-32,0) = 32_{180°}$

$\boxed{r^5_{5\alpha} = 32_{180°}}$

Paso 2.

Módulos: $r^5 = 32 \longrightarrow r = \sqrt[5]{32} = 2$.

Argumentos: $5\alpha = 180 + 360k \Leftrightarrow \alpha = \frac{180}{5} + \frac{360}{5}k = 36 + 72k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Paso 3.

las soluciones diferentes son aquéllas para $k=0,1,2,3,4$.

$z_0 = 2_{36}$; $z_1 = 2_{108}$; $z_2 = 2_{180}$; $z_3 = 2_{252}$; $z_4 = 2_{324}$

Solución de la ecuación:

$(z=0,\ z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4)$ $\underline{\underline{6}}$ soluciones = grado de la ecuación

b) $\boxed{\dfrac{z+i}{z-i} = \dfrac{3(z-i)}{z+i}}$

Operando:

$(z+i)^2 = 3\cdot(z-i)^2 \Leftrightarrow z^2+2zi+i^2 = 3\cdot(z^2-2zi+i^2)$

$\Leftrightarrow 3z^2-6zi-3-z^2-2zi+1=0 \Leftrightarrow$

$2z^2-8zi-2=0 \Leftrightarrow \boxed{z^2-4zi-1=0}$

www.yoquieroaprobar.es

Es una ec. de 2º grado:

$$z = \frac{-(-4i) \pm \sqrt{(-4i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{4i \pm \sqrt{16i^2+4}}{2} = \frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} \quad (*)$$

$$z = 2i \pm \sqrt{-3} = 2i \pm \sqrt{3}\cdot i = (2 \pm \sqrt{3})i.$$

Soluciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = (2+\sqrt{3})i \\ z_2 = (2-\sqrt{3})i \end{array}}$$

(*) Observación:

$$\frac{4i \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4i}{2} \pm \frac{\sqrt{-12}}{2} = 2i \pm \frac{\sqrt{-12}}{\sqrt{4}} = 2i \pm \sqrt{-3}.$$

$$\sqrt{-3} = \sqrt{-1\cdot 3} = \underbrace{\sqrt{-1}}_{i}\cdot\sqrt{3} = i\cdot\sqrt{3}.$$

c) $z^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 16$ Raíces 4ª de 16.

Puedes obtenerlas sin aplicar el procedimiento general.

$$z^4 - 16 = (z^2-4)\cdot(z^2+4)$$

$$z^2 - 4 = (z+2)\cdot(z-2)$$

$$z^2 + 4 = z^2 - 4i^2 = (z+2i)\cdot(z-2i)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} z_0 = 2 = 2_{0^\circ} \\ z_1 = -2 = 2_{180^\circ} \\ z_2 = -2i = 2_{90} \\ z_3 = +2i = 2_{90^\circ} \end{array}$$

www.yoquieroaprobar.es

⑥ Expresemos z en forma binómica:

$$z = \frac{1-ai}{2+i} = \frac{1-ai}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i-2ai+ai^2}{2^2-i^2} \qquad (i^2=-1)$$

$$= \frac{2-i-2ai-a}{5} = \frac{2-a}{5} + i\,\frac{-1-2a}{5}$$

Recuerda que $z = a+bi = r_\alpha \qquad r^2 = a^2+b^2$

$$r^2 = \boxed{\left(\frac{2-a}{5}\right)^2 + \left(\frac{-1-2a}{5}\right)^2 = 1^2}$$

Ecuación a que se reduce el problema.

Efectuando los cuadrados y agrupando:

$$\frac{4-4a+a^2}{25} + \frac{1+4a+4a^2}{25} = 1 \iff$$

$$4-4a+a^2+1+4a+4a^2 = 25 \iff$$

$$5a^2 = 20 \iff a^2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = \pm 2}$$ Solución.

www.yoquieroaprobar.es

⑦ Un número complejo está sobre la bisectriz del 1^{er} cuadrante si

$a = b$ y $a, b > 0$.

parte real = parte imaginaria. y ambas son positivas.

$$z = \frac{2+i}{k+i} = a+bi$$

Condición: $a = b$.

$$z = \frac{2+i}{k+i} \cdot \frac{k-i}{k-i} = \frac{2k-2i+ik-i^2}{k^2-i^2} = \frac{2k+1+i(k-2)}{k^2+1}.$$

parte real: $\frac{2k+1}{k^2+1}$ parte imaginaria $\frac{k-2}{k^2+1}$.

$z \in$ bisectriz del 1^{er} cuadrante: $\boxed{\frac{2k+1}{k^2+1} = \frac{k-2}{k^2+1}} \iff 2k+1 = k-2$.

$\Rightarrow \boxed{k = -3.}$

Para este valor de k:

$$a = \frac{-5}{10} < 0, \qquad b = \frac{-5}{10}.$$

$z \in$ bisectriz del 3^{er} cuadrante. $\Rightarrow$ no hay solución.

www.yoquieroaprobar.es

8º. Se expresa z en forma binómica:

$$z = \frac{2-ki}{k-i} = \frac{2-ki}{k-i} \cdot \frac{k+i}{k+i} = \frac{2k+2i-k^2i-ki^2}{k^2-i^2} = \frac{3k}{k^2+1} + i\,\frac{2-k^2}{k^2+1}.$$

a) z será un número imaginario puro si su parte real es cero.

$$\frac{3k}{k^2+1} = 0 \longrightarrow 3k = 0 \Rightarrow \boxed{k=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 2i}$$

b) z será un número real puro si su parte imaginaria es cero.

$$\frac{2-k^2}{k^2+1} = 0 \rightarrow 2-k^2=0 \longrightarrow k^2=2 \Rightarrow \boxed{k=\pm\sqrt{2}}$$

$$k=2 \longmapsto \quad z_1 = \frac{6}{5}$$

$$k=-2 \longrightarrow \quad z_2 = \frac{-6}{5}$$

www.yoquieroaprobar.es

(9). Expresemos z y $\sqrt{2}_{315^\circ}$ en forma binómica, pues hemos de resolver la ecuación:

$$\boxed{\frac{a+2i}{3+bi}=\sqrt{2}_{315^\circ}} \quad (1)$$

$$z=\frac{a+2i}{3+bi}\cdot\frac{3-bi}{3-bi}=\frac{3a-abi+6i-2bi^2}{3^2-(bi)^2}=\frac{3a+2b}{9+b^2}+i\,\frac{6-ab}{9+b^2}.$$

$$\sqrt{2}_{315^\circ}=\sqrt{2}\cdot\cos 315^\circ+i\sqrt{2}\cdot\operatorname{sen} 315^\circ=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=1-i$$

$$(1)\iff \boxed{\frac{3a+2b}{9+b^2}+i\,\frac{6-ab}{9+b^2}=1-i} \quad (2).$$

Igualando partes reales e imaginarias:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{3a+2b}{9+b^2}=1\\[2ex] \dfrac{6-ab}{9+b^2}=-1\end{array}\right\}\iff \left.\begin{array}{l}3a+2b=9+b^2\\ 6-ab=-9-b^2\end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{b^2-2b+9}{3};$$

(*) La 2ª ecuación se puede "mejorar": $b^2-ab+15=0.\Rightarrow$

$$b^2-b\cdot\frac{b^2-2b+9}{3}+15=0\iff 3b^2-b^3+2b^2-9b+45=0\iff$$

$$\boxed{-b^3+5b^2-9b+45=0}\iff\boxed{b^3-5b^2+9b-45=0} \quad (3)$$

Aplicando el teorema del resto encontramos que una de las raíces es $b=5$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 9 & -45\\ 5 & & 5 & 0 & 45\\ \hline & 1 & 0 & 9 & \boxed{0}\end{array}\Rightarrow (3)\iff \boxed{(b-5)\cdot(b^2+9)=0} \quad (**)$$

Solución: $b=5\rightarrow a=\dfrac{5^2-2\cdot 5+9}{3}=8\Rightarrow \boxed{a=8 \text{ y } b=5}$

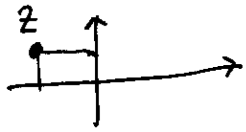
(**) $b^2+9=0$ no tiene soluciones reales.

www.yoquieroaprobar.es

10°.

	Cartesiana	Binómica	Polar	Trigonométrica.
a	$(-2,1)$	$-2+i$	$\sqrt{5}_{153}$	$\sqrt{5}\cdot\cos 153+i\cdot\sqrt{5}\cdot \text{sen}\,153°$.
b	$(3,-2)$	$3-2i$	$\sqrt{13}_{326}$	$\sqrt{13}\cdot\cos 326°+i\sqrt{13}\cdot\text{sen}\,326°$.
c	$(1,\sqrt{3})$	$1+\sqrt{3}i$	$2_{60°}$	$2\cdot\cos 60°+i\cdot 2\cdot\text{sen}\,60°$
d	$\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.	$-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$	$3_{2\pi/3}$.	$3\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot 3\cdot\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$

ⓐ $\left.\begin{array}{l} a=-2 \\ b=1 \end{array}\right\}$



$z\in 2°$ cuadrante.

$r^2=(-2)^2+1^2=5\rightarrow\boxed{r=\sqrt{5}}$

$\text{tg}\,\alpha=\frac{1}{-2}\rightarrow\alpha=\underset{\text{IV}}{-27°}$ ó $\alpha=\underset{\text{II}}{-27+180°}\Rightarrow\boxed{z=\sqrt{5}_{153°}}$

ⓑ $\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=-2 \end{array}\right\}$

$z\in 4°$ cuadrante.

$r^2=3^2+(-2)^2=13\rightarrow\boxed{r=\sqrt{13}}$

$\text{tg}\,\alpha=\frac{-2}{3}\rightarrow\alpha=\underset{\text{IV}}{-34°}$ ó $\underset{\text{II}}{-34+180°}\Rightarrow\boxed{z=\sqrt{13}_{-34°}=\sqrt{13}_{326°}}$

$-34°=-34+360=\underline{326°}$.

ⓒ $\left.\begin{array}{l} r=2 \\ \alpha=60° \end{array}\right\}\begin{array}{l} a=2\cdot\cos 60°=2\cdot\frac{1}{2}=1 \\ b=2\cdot\text{sen}\,60°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3} \end{array}\Rightarrow\boxed{z=1+\sqrt{3}i}$

ⓓ $\left.\begin{array}{l} r=3 \\ \alpha=\frac{2\pi}{3} \end{array}\right\}\begin{array}{l} a=3\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=3\cdot\frac{-1}{2}=\frac{-3}{2}. \\ b=3\cdot\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{array}\Rightarrow\boxed{z=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i}$

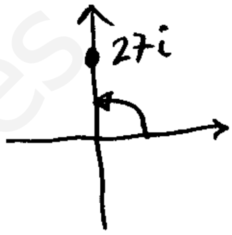
www.yoquieroaprobar.es

11º Pruebo en forma polar, porque uno de ellos es el cuadrado del otro y en esta forma es muy sencilla su expresión.

un complejo $\quad$ el otro

$r_\alpha \qquad (r_\alpha)^2 = r^2_{2\alpha}$

Condición: $\boxed{r_\alpha \cdot r^2_{2\alpha} = 27i}$



Operando:

$27i = 27_{90^\circ}$ (es un número imaginario puro)

$r^3_{3\alpha} = 27_{90^\circ}$

igualdad de módulos: $r^3 = 27 \longrightarrow r = \sqrt[3]{27} = 3$.

igualdad de argumentos: $3\alpha = 90^\circ + 360k,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow \alpha = 30^\circ + 120k$

Podemos encontrar $\underline{3}$ soluciones diferentes.

$$\left.\begin{array}{l} k=0 \longrightarrow \alpha_0 = 30^\circ \longrightarrow 3_{30^\circ} \\ k=1 \longrightarrow \alpha_1 = 150^\circ \longrightarrow 3_{150^\circ} \\ k=2 \longrightarrow \alpha_2 = 270^\circ \longrightarrow 3_{270^\circ} \end{array}\right\} \text{SOLUCIONES}$$

Observaciones:

(1) $k=3 \rightarrow \alpha_3 = 390^\circ = 30^\circ = \alpha_0$.

(2) comprobación.

$3_{30^\circ} \cdot (3_{30})^2 = 3_{30} \cdot 9_{60^\circ} = 27_{90^\circ} = 27i$

$3_{150^\circ} \cdot (3_{150^\circ})^2 = 3_{150} \cdot 9_{300^\circ} = 27_{450^\circ} = 27_{90^\circ} = 27i$

www.yoquieroaprobar.es

En forma binómica:

Un complejo: $a+bi$

Su cuadrado $(a+bi)^2$.

Condición: $\boxed{(a+bi)\cdot(a+bi)^2 = 27i}$

Desarrollando:

$(a+bi)^3 = 27i \iff$

$a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = 27i \iff$

$\boxed{a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = 27i}$

Igualdad de complejos:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Parte real}: & a^3 - 3ab^2 = 0 \\ \text{Parte imaginaria} & 3a^2b - b^3 = 27 \end{array}\right\}$$

Obtenemos un sistema no-lineal de grado 3. Observa la sencillez y elegancia de la resolución en forma polar, frente a la complejidad (al menos relativa) de la forma binómica.

www.yoquieroaprobar.es

(12) Si $z = r_\alpha$

CONJUGADO: $\bar{z} = r_{-\alpha}$

INVERSO $\frac{1}{z} = \frac{1_0}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{0-\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$

OPUESTO $-z = -r_\alpha = r_{\alpha+180^\circ}$

CUADRADO $z^2 = (r_\alpha)^2 = r^2_{2\alpha}$

	Módulo	Argumento
complejo	r	α
conjugado	r	$-\alpha$
Inverso	$\frac{1}{r}$	$-\alpha$
Opuesto	r	$\alpha+180^\circ$
Cuadrado	r^2	2α

Opuesto: $-z = -1 \cdot z$

-1 en forma polar es 1_{180°

$z = r_\alpha$

$\left.\right\}\ 1_{180} \cdot r_\alpha = (1 \cdot r)_{180+\alpha} = r_{\alpha+180}$

www.yoquieroaprobar.es