Representación de curvas

Dominio Puntos de corte con los ejes Regiones Simetrías	Puntos notables: extremos y puntos de inflexión Monotonía Curvatura	Ramas Asíntotas verticales Asíntotas horizontales Asíntotas oblicuas

1º Funciones polinómicas.

a) $f(x)=x^2-4x-2$ b) $f(x)=-x^2+4x-4$

c) $f(x)=-2x^4+4x^2$ d) $f(x)=2x^3+6x^2-18x+1$

e) $f(x)=x^4-2x^2$ f) $f(x)=-2x^3-3x^2-18x+9$

2º Funciones racionales.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{8x^2-3x}{x-2}$ c) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x-1}$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ e) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ f) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-4}$

g) $f(x)=\dfrac{4-x^2}{1+x}$ h) $f(x)=\dfrac{4x^2}{1+x^4}$ i) $f(x)=\dfrac{3x-2}{5-7x}$

3º Funciones irracionales.

a) $f(x)=x\sqrt{5-x^2}$ b) $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ c) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

d) $f(x)=\sqrt{9-4x^2}$ e) $f(x)=\sqrt{9+4x^2}$ f) $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

4º Funciones exponenciales y logarítmicas.

a) $f(x)=x\cdot e^{2x}$ b) $f(x)=(x-1)e^x$ c) $h(x)=\ln\left(x^2-1\right)$

d) $f(x)=e^{-x^2}$ e) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ f) $f(x)=\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2},\quad a>0$

g) $f(x)=x\cdot e^{-2x}$ h) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ i) $f(x)=\sqrt[3]{x}\cdot e^x$

j) $f(x)=x^2\ln x$ k) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ l) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}+1$

5º Funciones trigonométricas.

a) $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$ b) $f(x)=\operatorname{sen}x-\cos x$ c) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$

d) $f(x)=\cos^2 x$ e) $f(x)=\operatorname{sen}x-x$ f) $f(x)=\operatorname{sen}x^2$

g) $f(x)=\operatorname{tg}x-x$ h) $f(x)=2\operatorname{sen}x+\cos 2x$ i) $f(x)=\ln(\operatorname{sen}x)$

6º Funciones con valor absoluto.

a) $f(x)=\left|x^2+4x\right|$ b) $f(x)=(x-2)\left|x^2-2x\right|$ c) $f(x)=\left|x^4-4x^3\right|$

d) $f(x)=\dfrac{|x+3|}{1+|x|}$ e) $f(x)=|x+2|+|x-3|$

$\boxed{1a}$ $\boxed{f(x) = x^2 - 4x - 2}$

Se trata de una parábola. Uno de los procedimientos para representarla es el siguiente.

- Ramas: $a = 1 > 0$ positivas $\boxed{\cup}$
- Punto de corte con el eje vertical (OY) y su simétrico

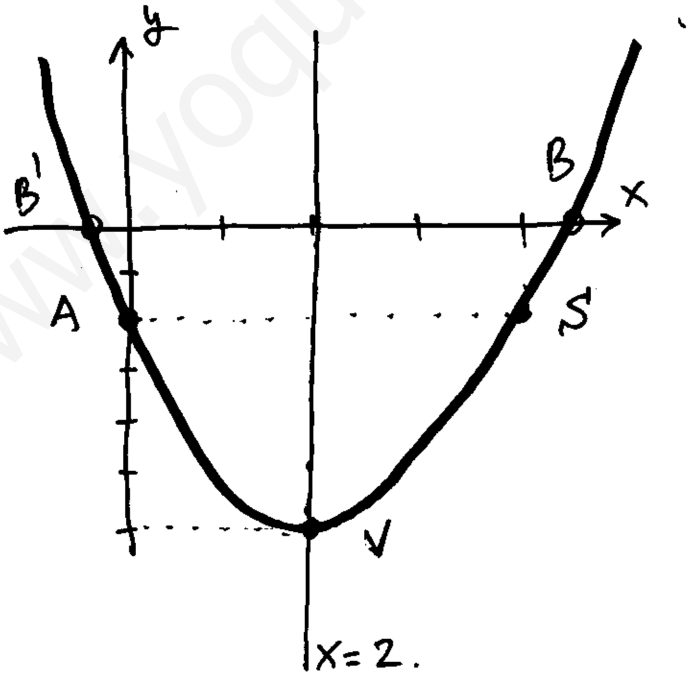
	x	y
A	0	-2
S	4	-2

$$\to x^2 - 4x - 2 = -2 \to x^2 - 4x = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

- Vértice y eje de simetría.

	x	y
V	2	$f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 - 2 = -6$

eje $x = 2$.



$B = (2+\sqrt{6}, 0) \approx (4{,}4, 0)$

$B' = (2-\sqrt{6}, 0) \approx (-0{,}4, 0)$

<u>Observación</u>: otros puntos "sencillos" son los de corte con el eje OX:

$$y = 0 \to x^2 - 4x - 2 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

1b

$$\boxed{f(x) = -x^2 + 4x - 4}$$

Se trata de una parábola.

- Ramas $a = -1 < 0$ $\boxed{\cap}$ negativas.
- Punto de corte con el eje vertical (A) y su simétrico (S).

	x	y
A	0	-4
S	4	-4

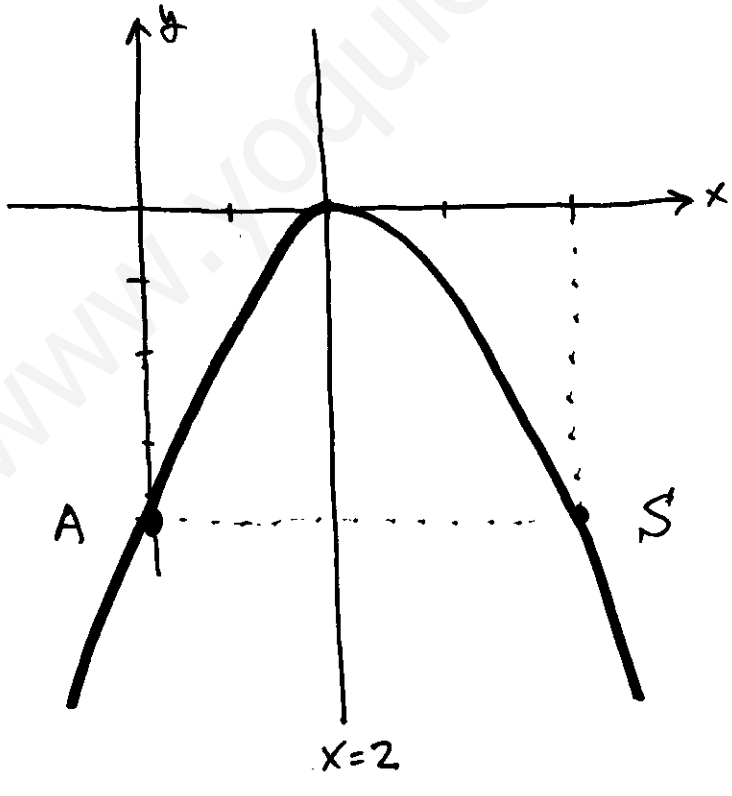
$\rightarrow -x^2 + 4x - 4 = -4 \Rightarrow -x^2 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$

- Eje de simetría y vértice (V)

El eje de simetría pasa por el punto medio de A y S $\Rightarrow x = \frac{0+4}{2} = 2$.

	x	y
V	2	f(2)

$f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 4 = 0. \Rightarrow V = (2,0)$



1c $\boxed{f(x) = -2x^4 + 4x^2}$

- Dominio de $f(x)$

  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

pues es una función polinómica

- Puntos de corte con los ejes.

  Eje X: $y = 0 \rightarrow -2x^4 + 4x^2 = 0 \iff -2x^2 \cdot (x^2 - 2) = 0$

  $\rightarrow x = 0$ y $x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

  $\Rightarrow A = (\sqrt{2}, 0) \quad B = (0,0) \quad C = (-\sqrt{2}, 0)$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow B.$

- Regiones.

  Trata de estudiar el signo de $f(x)$. Se obtienen mediante una tabla que divida al eje real según los valores que anulan a $f(x)$

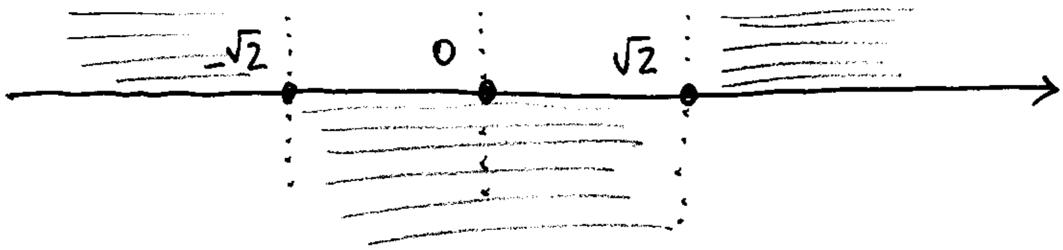
	$(-\infty, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}, 0)$	0	$(0, \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$-3 \in (-\infty, -\sqrt{2}) : f(-3) = -2\cdot(-3)^4 + 4\cdot(-3)^2 = -162 + 36 < 0$

$-1 \in (-\sqrt{2}, 0) : f(-1) > 0$

$1 \in (0, \sqrt{2}) : f(1) > 0$

$3 \in (\sqrt{2}, \infty) : f(3) = -2\cdot 3^4 + 4\cdot 3^2 = -162 + 36 < 0$



- Simetrías

$f(-x) = -2\cdot(-x)^4 + 4\cdot(-x)^2 = -2\cdot x^4 + 4x^2 = f(x) \Rightarrow$ PAR.

Es simétrica respecto del eje OY.

- Puntos notables.

1ª y 2ª derivada

$f'(x) = -8x^3 + 8x \qquad f''(x) = -24x^2 + 8.$

Condición de extremo $f' = 0 \rightarrow$

$-8x^3 + 8x = 0 \rightarrow -8x\cdot(x^2-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} -8x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$x = 0, \quad x = +1, \quad x = -1.$

$f''(0) = 8 > 0 \rightarrow$ mínimo $\quad m = (0, f(0)) = (0,0)$

$f''(1) = -24 + 8 < 0 \rightarrow$ máximo $\quad M = (1, f(1)) = (1,2)$

$f(1) = -2\cdot 1^4 + 4\cdot 1^2 = 2.$

$f''(-1) = -24 + 8 < 0 \rightarrow$ máximo $\quad M' = (-1, f(-1)) = (-1, 2)$

$f(-1) = f(1)$ por paridad.

Condición de punto de inflexión: $f'' = 0 \rightarrow$

$-24x^2 + 8 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$I = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \quad I' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 + 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = -2\cdot\frac{9}{81} + 4\cdot\frac{3}{9} = \frac{10}{9} \simeq 1{,}1$

$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ por paridad.

$I = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{10}{9}\right) \simeq (0.6, 1.1) \qquad I' = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{10}{9}\right) \simeq (-0.6, 1.1)$

• Monotonía.

Tabla con los valores que anulan a f' y los puntos de discontinuidad de f y f' (si los hubiera).

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	mín	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

$-2 \in (-\infty,-1)$: $f'(-2) = -8\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2) > 0$

$-0.5 \in (-1,0)$: $f'(-0.5) = -8\cdot(-0.5)^3 + 8\cdot(-0.5) < 0$

$+0.5 \in (0,1)$: $f'(0.5) = -8(0.5)^3 + 8\cdot 0.5 > 0$

$2 \in (1,\infty)$: $f'(2) = -8\cdot 2^3 + 8\cdot 2 < 0$

• Curvatura.

Tabla con los valores que anulan a f'' y los puntos de discontinuidad de f y f'' (si los hubiera).

	$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	cóncava $\cap$	I	convexa $\cup$	I	cóncava $\cap$

$-10 \in \left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$: $f''(-10) = -24\cdot(-10)^2 + 8 < 0$

$0 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$: $f''(0) = 8 > 0$

$10 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right)$: $f''(10) = -24\cdot 10^2 + 8 < 0$

- Asíntotas.

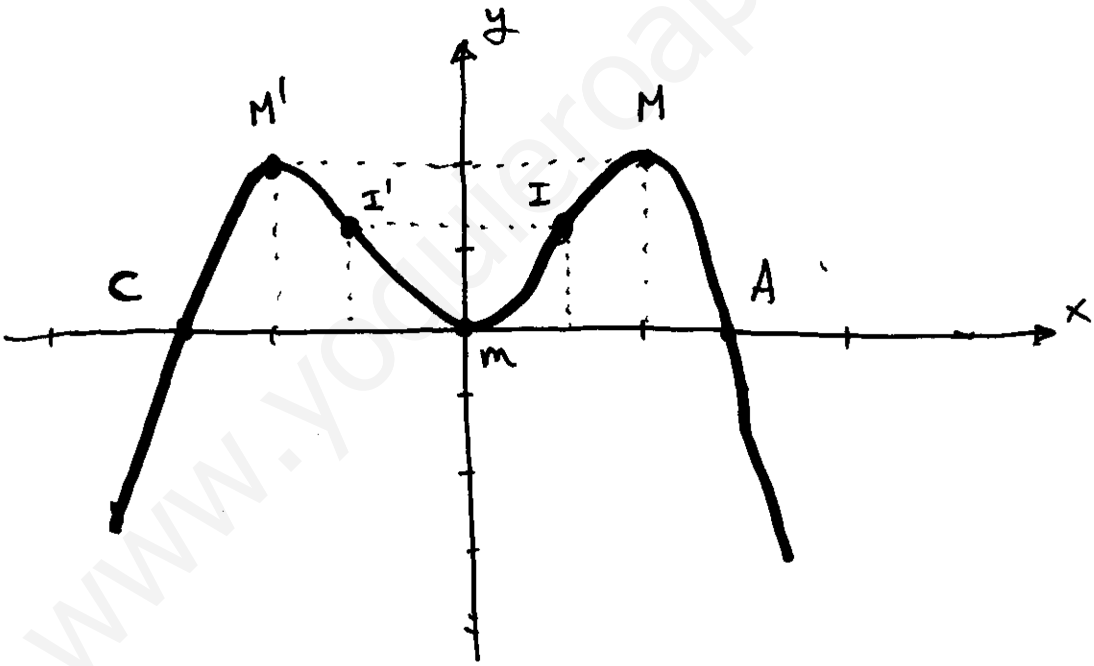
  No tiene por ser una función polinómica.

- Ramas.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(-2x^4 + 4x^2\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-2x^4 + 4x^2\right) = -\infty$$

GRÁFICA.



M

Departamento de Matemáticas

1d

$$\boxed{f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 1}$$

- Dominio.

  Como es una función polinómica $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$.

- Simetrías.

  $f(-x) = 2\cdot(-x)^3 + 6\cdot(-x)^2 - 18\cdot(-x) + 1 \longrightarrow$

  $f(-x) = -2x^3 + 6x^2 + 18x + 1$

  $\neq f(x)$ y $\neq -f(x) \Rightarrow$ no es par ni impar.

- Puntos notables

  $f'(x) = 6x^2 + 12x - 18$

  $f''(x) = 12x + 12$

  Condición de extremo: $f' = 0 \rightarrow$

  $6x^2 + 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow (:6)\ \boxed{x^2 + 2x - 3 = 0} \rightarrow$

  $$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

  2^{a} derivada:

  $f''(1) = 12\cdot 1 + 12 > 0 \rightarrow$ mínimo $m = (1, f(1))$

  $f(1) = 2\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 - 18\cdot 1 + 1 = -9 \rightarrow \boxed{m = (1, -9)}$

  $f''(-3) = 12\cdot(-3) + 12 < 0 \rightarrow$ máximo $M = (-3, f(-3))$

  $f(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)^2 - 18\cdot(-3) + 1 = 55 \rightarrow \boxed{M = (-3, 55)}$

  Condición de punto de inflexión: $f'' = 0 \rightarrow$

  $12x + 12 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow I = (-1, f(-1))$

  $f(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 - 18\cdot(-1) + 1 = 23 \rightarrow \boxed{I = (-1, 23)}$

- Monotonía.

Tabla indicando los extremos y puntos de discontinuidad (que en este caso no tenemos)

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	creciente	Máximo	decreciente	Mínimo	creciente

para averiguar el signo de f' en cada intervalo basta calcularlo para un valor de dicho intervalo. Esta operación se hace mejor expresando f' en factores.

$$f'(x) = 6x^2 + 12x - 18 = 6\cdot(x+3)\cdot(x-1)$$

$-4 \in (-\infty,-3)$ $\quad f'(-4) = 6\cdot(-4+3)\cdot(-4-1) = + \cdot - \cdot - = +$

$0 \in (-3,1)$ $\quad f'(0) = -18$ $-$

$2 \in (1,\infty)$ $\quad f'(2) = 6\cdot(2+3)\cdot(2-1) = + \cdot + \cdot + = +$

Observaciones:

① Podríamos haber realizado el estudio de la monotonía con una inecuación:

f es creciente $\rightarrow f' > 0 \Rightarrow 6x^2 + 12x - 8 > 0.$ (...)

② Otro modo habría sido teniendo en cuenta que en $x=-3$ hay un máximo $\rightarrow$ antes es creciente y después decreciente; y en $x=1$ hay un mínimo $\rightarrow$ antes es decreciente y luego creciente.

- Curvatura

Tabla indicando los puntos de inflexión y puntos de discontinuidad (que en este caso no tenemos).

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	cóncava	Punto de inflexión	convexa

$$f''(x) = 12x + 12 = 12\cdot(x+1)$$

$$-3 \in (-\infty,-1) : \quad f''(-3) = 12\cdot(-3+1) = -$$

$$0 \in (-1,\infty) : \quad f''(0) = 12\cdot(0+1) = +$$

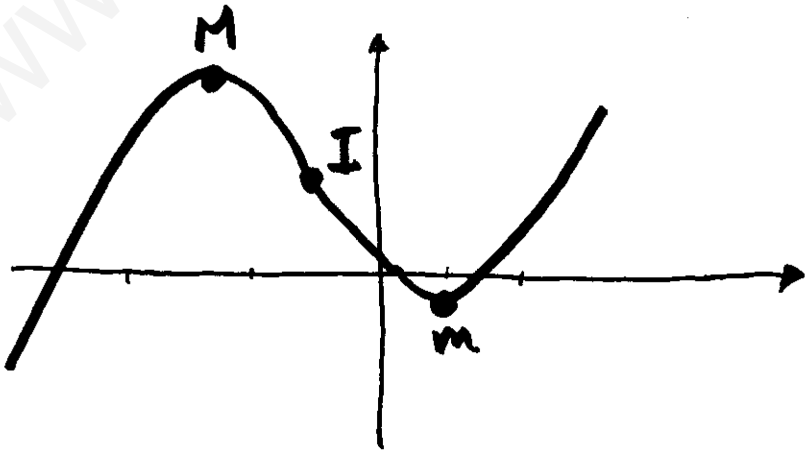
Observación.

Se podría haber estudiado la curvatura mediante una inecuación:

f es convexa $\longrightarrow f''>0 \quad \Rightarrow \quad 12x+12>0 \quad (\ldots)$

- Asíntotas: NO TIENE. Es un polinomio.

GRÁFICA.



Departamento de Matemáticas

1e $\boxed{f(x) = x^4 - 2x^2}$

- Dominio.

  Es una función polinómica : Dom $f(x) = \mathbb{R}$.

- Simetrías

  $f(-x) = (-x)^4 - 2\cdot(-x)^2 = x^4 - 2x^2 \Rightarrow f(-x) = f(x) \rightarrow$ PAR.

- Puntos notables.

  $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f''(x) = 12x^2 - 4$.

  Condición de extremo: $f' = 0 \rightarrow$

  $4x^3 - 4x = 0 \leftrightarrow x^3 - x = 0 \leftrightarrow x\cdot(x^2-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

  $f''(0) = 12\cdot 0^2 - 4 < 0 \rightarrow$ Máximo $\left.\begin{array}{l} M = (0, f(0)) \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \boxed{M = (0,0)}$

  $f''(1) = 12\cdot 1^2 - 4 > 0 \rightarrow$ mínimo $\left.\begin{array}{l} m = (1, f(1)) \\ f(1) = 1 - 2 = -1 \end{array}\right\} \boxed{m = (1,-1)}$

  $f''(-1) = 12\cdot(-1)^2 - 4 > 0 \rightarrow$ mínimo $m' = (-1, f(-1))$

  por simetría $\boxed{m' = (-1,-1)}$

  Puntos de inflexión: $f'' = 0 \rightarrow$

  $12x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

  $\left.\begin{array}{l} I_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = -\frac{5}{9} \end{array}\right\} I_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right) \approx (0{,}6, 0{,}5)$

  $I_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ por simetría (PAR)

  $I_2 \approx (-0{,}6, 0{,}5)$

• Monotonía.

Tabla de valores

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	decreciente	mín.	creciente	máx	decrec.	mín	crec.

- $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x^2 \cdot (x-1)$.

El signo de la 1ª derivada lo da el factor $(x-1)$

• Curvatura.

Tabla de valores

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	convexa	P.I.	cóncava	P.I.	convexa

$f''(x) = 12x^2 - 4$

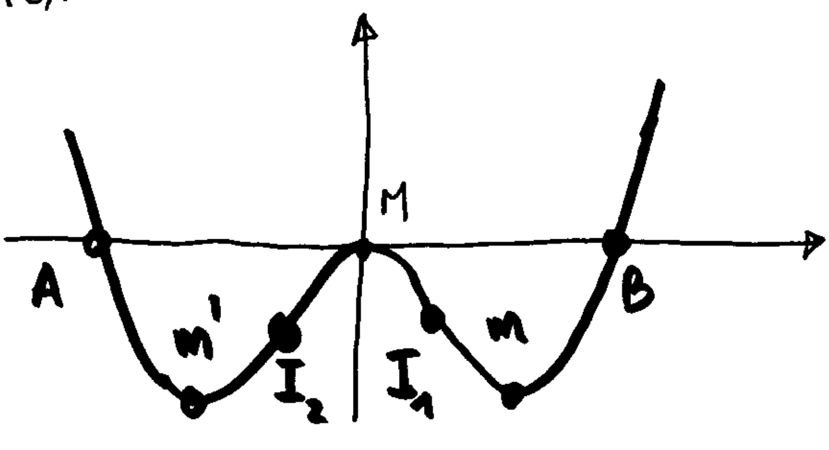
$-5 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) : f''(-5) = 12 \cdot (-5)^2 - 4 > 0$

$0 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) : f''(0) = -4 < 0$

$5 \in \left(+\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right) : f''(5) = 12 \cdot 5^2 - 4 > 0$

• Asíntotas. No tiene por ser una función polinómica.

• GRÁFICA



Los puntos de corte con el eje de abscisas ayudan a centrar la gráfica:

$y = 0 \rightarrow x^4 - 2x^2 = 0$

$x = \pm\sqrt{2}, 0$

$A = (-\sqrt{2}, 0)$ $B = (\sqrt{2}, 0)$

$C = (0, 0) = M$.

1f $\boxed{f(x) = -2x^3 - 3x^2 - 18x + 9}$

- Dominio.
  Es una función polinómica. $\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$.

- Puntos de corte.
  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 9 \implies P = (0, 9)$
  Eje X: $y = 0 \rightarrow -2x^3 - 3x^2 - 18x + 9 = 0 \iff$
  $\boxed{2x^3 + 3x^2 + 18x - 9 = 0}$

Buscaremos las raíces enteras (pues son las más sencillas) y en en este apartado se pretende encontrar información sin demasiado esfuerzo.

$-9: \pm 1, \pm 3, \pm 9$

¿1? $2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 - 9 \neq 0$

¿-1? $-2 + 3 - 18 - 9 \neq 0$

¿3? $54 + 27 + 54 - 9 \neq 0$

¿-3? $-54 + 27 - 54 - 9 \neq 0$

¿9? $2 \cdot 9^3 + 3 \cdot 9^2 + 18 \cdot 9 - 9 \neq 0$

¿-9? $2 \cdot (-9)^3 + 3 \cdot (-9)^2 + 18 \cdot (-9) - 9 \neq 0$ → no tiene raíces enteras

En este apartado si no te sale una solución rápidamente es mejor que lo dejes: no compensa el esfuerzo con la información.

- Regiones.
  No podemos calcularlas porque no tenemos las raíces (corte con el eje de abscisas).

- Simetrías
  $f(-x) = -2(-x)^3 - 3(-x)^2 - 18 \cdot (-x) + 9 =$
  $= 2x^3 - 3x^2 + 18x - 9 \neq f(x)$ y $-f(x)$ → NO TIENE

Observación:

Una función polinómica es simétrica si todos sus términos tienen la misma PARIDAD: o son todos PARES o todos IMPARES.

PAR
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^4 + bx^2 + c \\ f(-x) = a(-x)^4 + b\cdot(-x)^2 + c = ax^4 + bx^2 + c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(x) = f(-x)}$$

IMPAR
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^5 + bx^3 + cx \\ f(-x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + c(-x) = -ax^5 - bx^3 - c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{f(x) = -f(-x)}$$

- Puntos notables.

$f'(x) = -6x^2 - 6x - 18.$

$f''(x) = -12x - 6$

Condición de extremo $f' = 0 \rightarrow$

$-6x^2 - 6x - 18 = 0 \iff x^2 + x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-12}}{2}$ NO TIENE

Condición de punto de inflexión $f'' = 0 \rightarrow$

$-12x - 6 = 0 \iff 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}.$

$f(-1/2) = \frac{35}{2} = 17{,}5 \Longrightarrow I = (-1/2, 35/2) = (-0{,}5, 17{,}5)$

- Monotonía

Como la función no tiene extremos y es continua es siempre igual (o creciente o decreciente). Buscamos el signo en un valor sencillo

$x = 0 \rightarrow f'(0) = -18 < 0 \rightarrow f$ es decreciente para todo $x \in \mathbb{R}$.

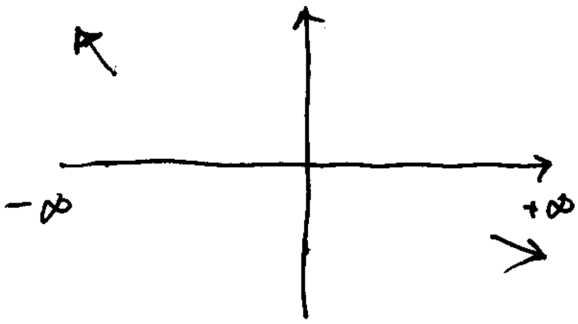
- Curvatura

		$-1/2$ $\rightarrow x$	
f''	$+$	0	$-$
f	convexa $\cup$		cóncava $\cap$

- Ramas

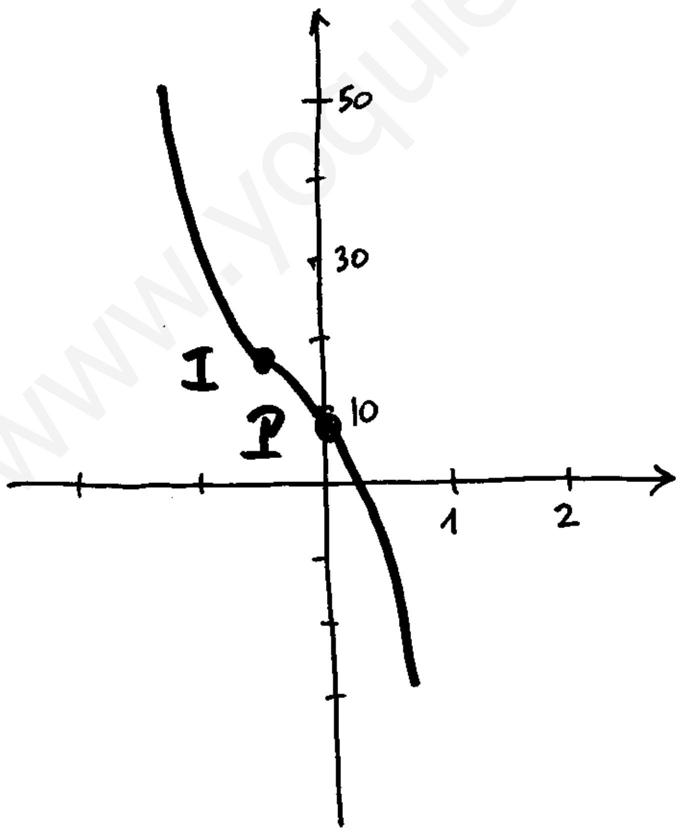
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-2x^3-3x^2-18x+9) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^3-3x^2-18x+9) = +\infty$$



- Asíntotas.
  No tiene por ser una función polinómica.

- GRÁFICA.



$I = \left(-\frac{1}{2}, \frac{35}{2}\right)$

$P = (0,9)$

2a

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^2-4}}$$

• Dominio.

Es una función racional, buscaremos los valores que anulan al denominador.

$x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

• Puntos de corte

Eje X : $y = 0 \rightarrow \frac{1}{x^2-4} = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ no tiene solución.

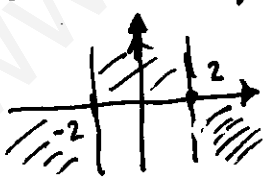
Eje Y : $x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{-4} \rightarrow \boxed{P = (0, -1/4)}$

• Regiones.

Se trata de estudiar el signo de f(x) para los diferentes valores del dominio. Tabla con los puntos de corte con el eje X y los puntos que no son del dominio.

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
signo de f(x)	+	$\nexists$	−	$\nexists^{(*)}$	+

Ya sé dónde está la gráfica de f(x).



En la parte sombreada NO HAY gráfica de f(x)

• Simetrías

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2-4} = \frac{1}{x^2-4} = f(x)$ PAR, simétrica respecto del eje de ordenadas.

(*) $\nexists$: no existe.

• Puntos notables

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cdot(x^2-4)^{\cancel{2}}-(-2x)\cdot 2\cdot \cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-2x^2+8+8x^2}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(x)=\frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3}.$$

Condición de extremo $f'=0 \rightarrow$

$$\frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0 \iff -2x=0 \rightarrow x=0$$

$$f''(0)=\frac{8}{(-4)^3}<0 \rightarrow \text{máximo} \quad \boxed{M=(0,f(0))=(0,-1/4)}$$

Condición de punto de inflexión $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3}=0 \iff 6x^2+8=0$$ → no tiene soluciones reales, es decir, no tiene puntos de inflexión.

• Monotonía

Tabla: extremos y valores que no son del dominio.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	+	∄	+	0	−	∄	−
f	↗		↗	Máx.	↘		↘

El signo de $f'(x)$ lo proporciona $-2x$ pues el denominador: $(x^2-4)^2$ es siempre positivo.

• Curvatura

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
f''	+	$\nexists$	−	$\nexists$	+
f	convexa ∪		cóncava ∩		convexa ∪

El signo de $f''(x)$ lo proporciona el denominador pues el numerador $(6x^2+8)$ es SIEMPRE POSITIVO.

Signo de $(x^2-4)^3$ es el signo de (x^2-4) (el exponente es IMPAR)

Otro modo de hacerlo es obtener el signo de un valor sencillo de cada intervalo.

$-4 \in (-\infty,-2) \qquad f''(-4) = \frac{+}{+} = +$

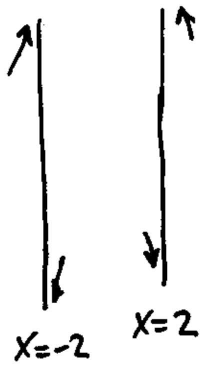
$0 \in (-2,2) \qquad f''(0) = \frac{+}{-} = -$

$4 \in (2,\infty) \qquad f''(4) = \frac{+}{+} = +$.

• Asíntotas

Verticales. Tiene 2. $\boxed{x=2}$ y $\boxed{x=-2}$.

Posición de la curva respecto de las asíntotas



$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty$

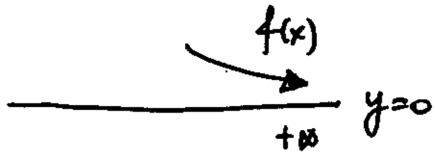
$\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{1}{x^2-4} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to -2^-} \frac{1}{x^2-4} = +\infty$

Horizontales

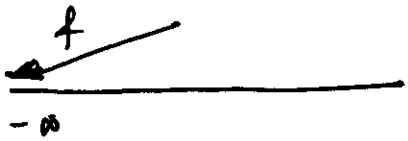
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-4} = 0 \longrightarrow \boxed{y=0}$

Posición de la curva respecto de la asíntota.

$$\lim_{x\to \infty}\left(f(x)-0\right)=\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^2-4}=0^+$$

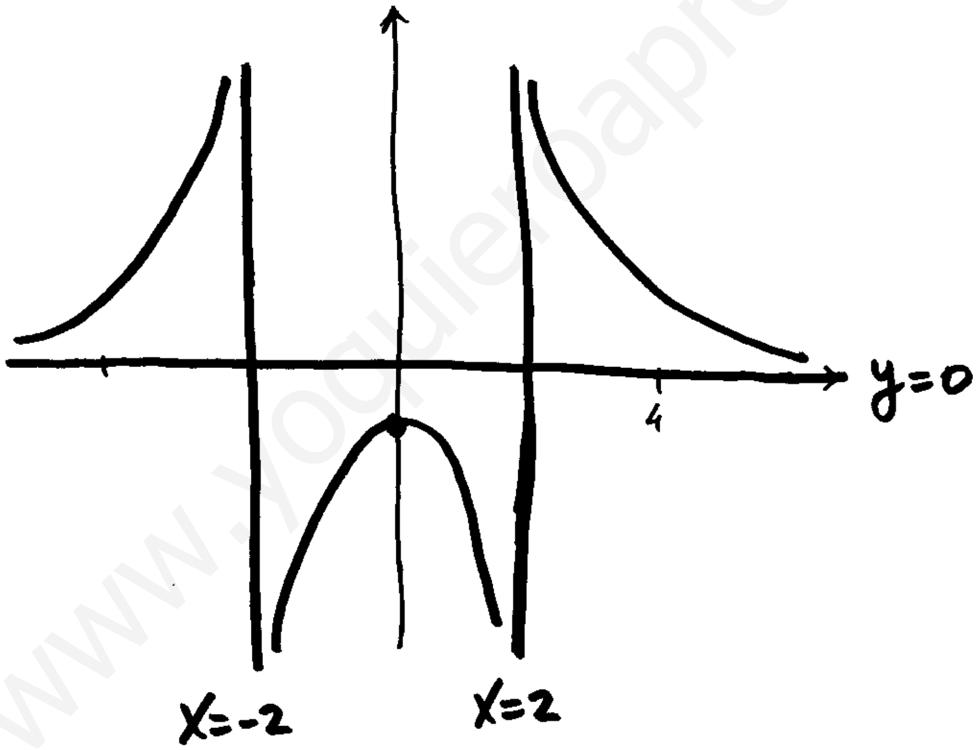


$$\lim_{x\to -\infty}\left(f(x)-0\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^2-4}=0^+$$



Oblicuas: No tiene pues tiene horizontales.

• GRÁFICA DE LA FUNCIÓN.



2b

$$f(x)=\frac{8x^2-3x}{x-2}$$

- Dominio.

Es una función racional: $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{2\}$

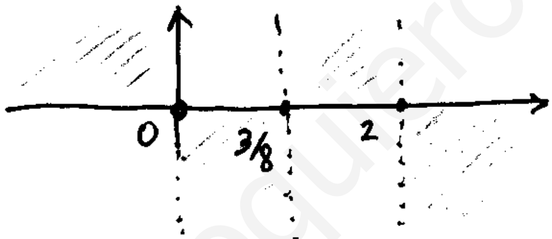
- Puntos de corte:

Eje X: $y=0 \rightarrow \dfrac{8x^2-3x}{x-2}=0 \Leftrightarrow 8x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3/8 \end{cases}$.

$A=(0,0) \quad B=(3/8,0)$

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=0 \quad A=(0,0)$.

- Regiones. Se descomponen los valores de x según el dominio y los puntos de corte con el eje X.



	$(-\infty,0)$	$(0,3/8)$	$(3/8,2)$	$(2,\infty)$
f	$-$	$+$	$-$	$+$

$-3\in(-\infty,0)$: $f(-3)=\dfrac{+}{-}=-$

$1/8\in(0,3/8)$: $f(1/8)=\dfrac{-}{-}=+$

$1\in(3/8,2)$: $f(1)=\dfrac{+}{-}=-$

$3\in(2,\infty)$: $f(3)=\dfrac{+}{+}=+$

- Simetrías

$$f(-x)=\frac{8(-x)^2-3(-x)}{-x-2}=\frac{8x^2+3x}{-x-2}\neq f(x) \text{ y } -f(x)$$

NO TIENE.

- Puntos notables

$$f'(x) = \frac{(16x-3)\cdot(x-2)-(8x^2-3x)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{16x^2-32x-3x+6-8x^2+3x}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2-32x+6}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(16x-32)\cdot(x-2)^{\cancel{2}}-(8x^2-32x+6)\cdot 2\cdot\cancel{(x-2)}}{(x-2)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{16x^2-32x-32x+64-16x^2+64x-12}{(x-2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{52}{(x-2)^3}.$$

Condición de extremo. $f'=0 \rightarrow$

$$\frac{8x^2-32x+6}{(x-2)^2}=0 \Rightarrow 8x^2-32x+6=0 \Leftrightarrow 4x^2-16x+3=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2-4\cdot4\cdot3}}{2\cdot 4} = \frac{16\pm\sqrt{208}}{8} = 2\pm\sqrt{\frac{208}{64}} = 2\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$f''\left(2+\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{+}{+} > 0 \rightarrow \text{mínimo.}$$

$$m = \left(2+\frac{\sqrt{13}}{2}, f\left(2+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right) \approx (3{,}8\ ,\ 57{,}8)$$

$$f''\left(2-\frac{\sqrt{13}}{2}\right) = \frac{+}{-} < 0 \rightarrow \text{máximo}$$

$$M = \left(2-\frac{\sqrt{13}}{2}, f\left(2-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\right) \approx (0{,}2\ ,\ 0{,}16)$$

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{52}{(x-2)^3}=0 \rightarrow 52\neq 0 \Rightarrow \text{no tiene.}$$

• Monotonía.

Tabla con los valores donde haya extremos $\left(2\pm\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ y valores que no son del dominio. (2)

	$\left(-\infty,2-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$	$2-\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\left(2-\frac{\sqrt{13}}{2},2\right)$	2	$\left(2,2+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$	$2+\frac{\sqrt{13}}{2}$	$\left(2+\frac{\sqrt{13}}{2},\infty\right)$
f'	+	0	−	$\nexists$	−	0	+
f	↗	Máximo	↘		↘	Mínimo.	↗

$0\in\left(-\infty,2-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ $f'(0)=\frac{6}{+}=+$

$0{,}198\in\left(2-\frac{\sqrt{13}}{2},2\right)$ $f'(0.198)=\frac{-}{+}=-$

$3\in\left(2,2+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ $f'(3)=\frac{-}{+}=-$

$10\in\left(2+\frac{\sqrt{13}}{2},\infty\right)$ $f'(10)=\frac{+}{+}=+$

• Curvatura

Tabla de valores con 2

	$(-\infty,2)$	2	$(2,\infty)$
f''	−	$\nexists$	+
f	cóncava $\cap$		convexa $\cup$

$0\in(-\infty,2)$ $f''(0)=\frac{52}{-}<0$

$3\in(2,\infty)$ $f''(3)=\frac{52}{+}>0$

• Asíntotas

VERTICALES $x=2$

Posición de la curva respecto de la asíntota: límites laterales.

Por la derecha

$$\lim_{\substack{x\to 2^+\\ x>2}} \frac{8x^2-3x}{x-2} = \frac{26}{0^+} = +\infty$$

Por la izquierda

$$\lim_{\substack{x\to \infty\\ x<2}} \frac{8x^2-3x}{x-2} = \frac{26}{0^-} = -\infty$$

$x=2$

HORIZONTALES $(y=b)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x}{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8x^2}{x}-\frac{3x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x-3}{1-\frac{2}{x}} = \infty \Rightarrow$$

No tiene.

OBLICUAS $(y=mx+n)$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x}{x\cdot(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{8x-3}{x-2} = \boxed{8}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{8x^2-3x}{x-2} - 8x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x-8x(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-3x-8x^2+16x}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{13x}{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \boxed{13}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=8x+13}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota: signo de

$$\lim_{x\to\infty} f(x)-(mx+n)$$

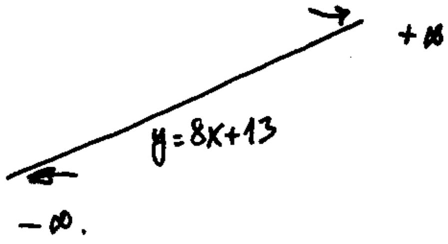
$$f(x)-(mx+n) = \frac{8x^2-3x}{x-2} - (8x+13) = \frac{8x^2-3x-(8x+13)\cdot(x-2)}{x-2} =$$

$$= \frac{8x^2-3x-8x^2+16x-13x+26}{x-2} = \frac{26}{x-2}$$

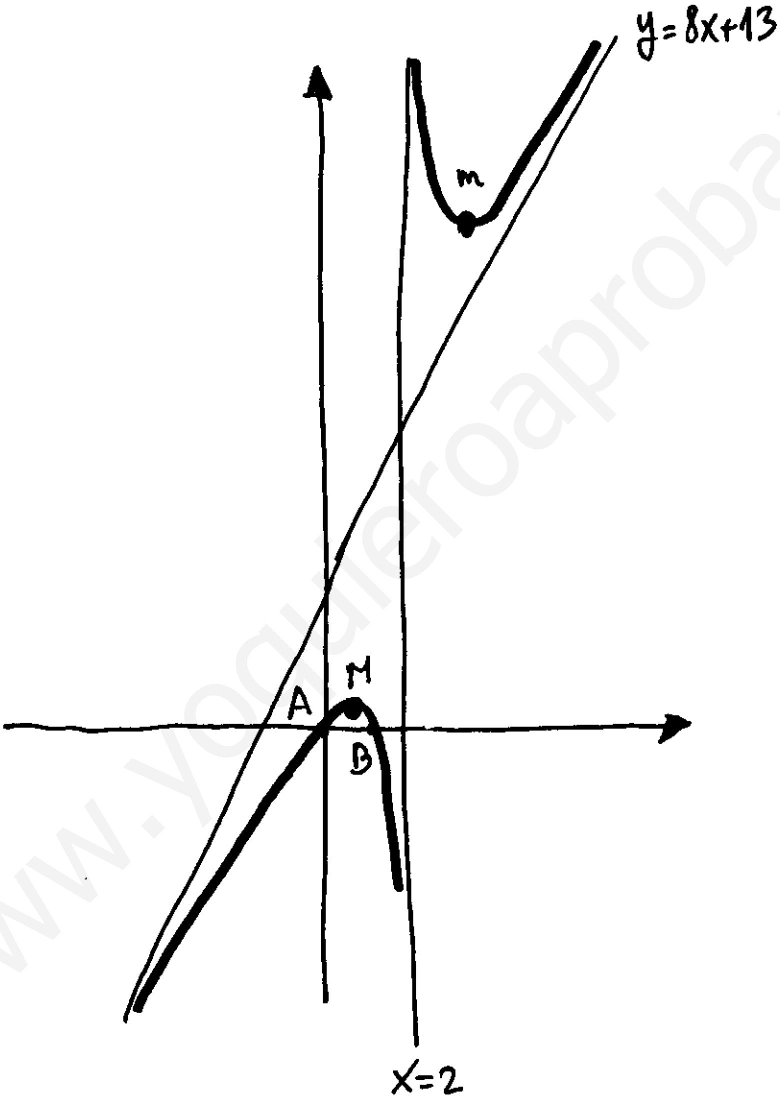
Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{26}{x-2} = \left(\frac{26}{+\infty}\right) = +0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{26}{x-2} = \left(\frac{26}{-\infty}\right) = -0.$$



GRÁFICA



$\boxed{2c}$

$$\boxed{f(x) = \frac{2x^2}{x-1}}$$

- Dominio

$x-1=0 \rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$.

- Puntos de corte.

Eje X: $y=0 \rightarrow \frac{2x^2}{x-1} = 0 \rightarrow 2x^2 = 0 \rightarrow x=0 \Rightarrow A=(0,0)$

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=0$. A.

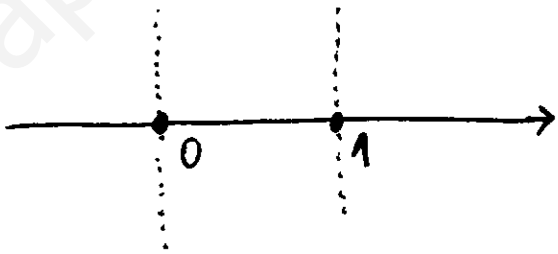
- Regiones

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f	$-$	0	$-$	$\nexists$	$+$

$-1 \in (-\infty,0)$: $f(-1) = \frac{+}{-2} < 0$

$1/2 \in (0,1)$: $f(1/2) = \frac{+}{-} < 0$

$2 \in (1,\infty)$: $f(2) = \frac{+}{1} > 0$



- Simetrías

$f(-x) = \frac{2(-x)^2}{-x-1} = \frac{2x^2}{-x-1} \neq f(x)$ y $-f(x) \Rightarrow$ no tiene.

- Puntos notables.

$f'(x) = \frac{4x\cdot(x-1) - 2x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{4x^2-4x-2x^2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}$

$f''(x) = \frac{(4x-4)\cdot(x-1)^{\cancel{2}} - (2x^2-4x)\cdot 2\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{4x^2-4x-4x+4-4x^2+8x}{(x-1)^3}$

$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$.

Condición de extremo $f'=0$

$$\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}=0 \longrightarrow 2x^2-4x=0 \rightarrow 2x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=2 \end{cases}$$

$$f''(0)=\frac{4}{-1}<0 \rightarrow \text{máximo.} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M=(0,f(0)) \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \boxed{M=(0,0)}$$

$$f''(2)=\frac{4}{1}>0 \rightarrow \text{mínimo} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=(2,f(2)) \\ f(2)=8 \end{array}\right\} \boxed{m=(2,8)}$$

• Monotonía

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	Max.	$\searrow$		$\searrow$	mín.	$\nearrow$

$-2\in(-\infty,0)$ $\quad f'(-2)=\frac{16}{+}>0$

$0{,}5\in(0,1)$ $\quad f'(0.5)=\frac{-}{+}<0$

$1{,}5\in(1,2)$ $\quad f'(1.5)=\frac{-}{+}<0$

$3\in(2,\infty)$ $\quad f(3)=\frac{+}{+}>0$

Condición de punto de inflexión $f''=0 \rightarrow \frac{4}{(x-1)^3}=0 \rightarrow$ no tiene.

• Curvatura

	$(-\infty,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$
f	cóncava $\cap$		convexa $\cup$

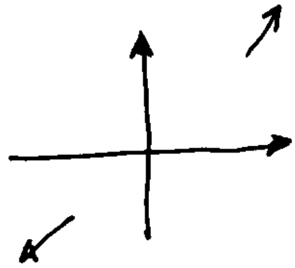
$0\in(-\infty,1)$: $f''(0)=\frac{4}{-1}<0$

$2\in(1,\infty)$: $f''(2)=\frac{4}{1}>0$

• Ramas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1-\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1-\frac{1}{x}} = -\infty$$



• Asíntotas

VERTICALES $\boxed{x=1}$

Posiciones relativas de la curva y recta.

$$\lim_{\substack{x\to 1^+\\ x>1}} \frac{2x^2}{x-1} = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1^-\\ x<1}} \frac{2x^2}{x-1} = \left(\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$$

HORIZONTALES

No tiene. (Observa las ramas)

OBLÍCUAS $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x-1} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-2x^2+2x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

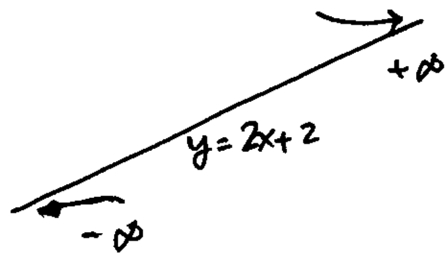
$$\Rightarrow \boxed{y = 2x+2}$$

Posiciones relativas de la curva y asíntota. Hay que estudiar el signo de $f(x) - (mx+n)$

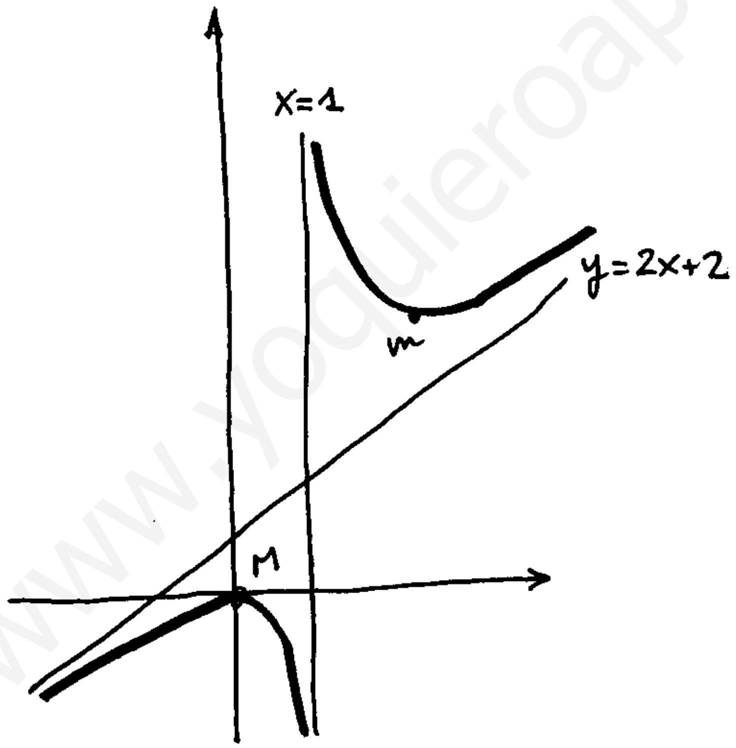
$$\frac{2x^2}{x-1} - (2x+2) = \frac{2x^2-(2x+2)\cdot(x-1)}{x-1} = \frac{2x^2-2x^2+2x-2x+2}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - (mx+n) = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x-1} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = +0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (mx+n) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x-1} = \left(\frac{2}{-\infty}\right) = -0.$$



GRÁFICA



2d

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

• Dominio.

$\text{Dom } f(x)=\{x\in\mathbb{R} : x^2-1\neq 0\}$

Resolviendo la ecuación: $x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow$

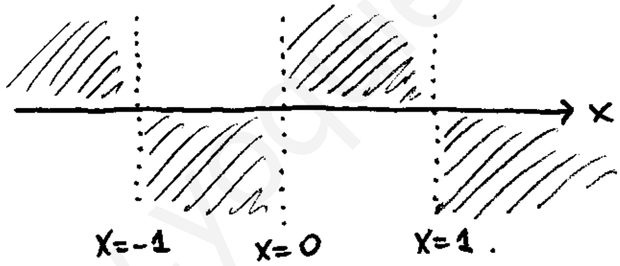
$\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{1,-1\}$

• Puntos de corte con los ejes.

Eje X: $y=0 \rightarrow \dfrac{x^3}{x^2-1}=0 \rightarrow x^3=0 \rightarrow x=0 \Rightarrow A=(0,0)$

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=0$: A.

• Regiones.



$-3\in(-\infty,-1)$: $f(-3)=\dfrac{-}{+}<0$

$-0{,}5\in(-1,0)$: $f(-0{,}5)=\dfrac{-}{-}>0.$

$0{,}5\in(0,1)$: $f(0{,}5)=\dfrac{+}{-}<0$

$3\in(1,\infty)$: $f(3)=\dfrac{+}{+}>0.$

• Simetrías.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x) \Rightarrow$ IMPAR

f(x) es simétrica respecto del origen.

- Puntos notables.

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x^2-1)-x^3\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}.$$

$$f''(x)=\frac{(4x^3-6x)\cdot(x^2-1)^{\cancel{2}}-(x^4-3x^2)\cdot 2\cdot\cancel{(x^2-1)}\cdot 2x}{(x^2-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{4x^5-4x^3-6x^3+6x-4x^5+12x^3}{(x^2-1)^3}=\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}.$$

Condición de extremo: $f'=0\rightarrow$

$$\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=0\rightarrow x^4-3x^2=0\rightarrow x^2\cdot(x^2-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\sqrt{3}\\ x=-\sqrt{3}.\end{cases}$$

$f''(0)=0\rightarrow$ Punto de inflexión.

$I=(0,f(0))=(0,0).$

$f''(\sqrt{3})=\frac{+}{2^3}>0.\rightarrow$ mínimo. (*)

$$\left.\begin{array}{l} m=(\sqrt{3},f(\sqrt{3}))\\ f(\sqrt{3})=\dfrac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2-1}=\dfrac{\sqrt{27}}{2}.\end{array}\right\} m=\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{27}}{2}\right)$$

$f''(-\sqrt{3})=\frac{-}{2^3}<0\rightarrow$ máximo. (*)

$$M=(-\sqrt{3},f(-\sqrt{3}))=\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{27}}{2}\right)$$

↑ por simetría impar.

(*) Numerador: $2x^3+6x$. $\left.\begin{array}{l}\text{si } x>0\rightarrow 2x^3+6x>0\\ \text{si } x<0\rightarrow 2x^3+6x<0\end{array}\right\}$ suma de potencias impares

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3}=0 \rightarrow 2x^3+6x=0 \Leftrightarrow 2x(x^2+3)=0 \Rightarrow x=0$$

corresponde al punto de inflexión $I=(0,0)$.

• Monotonía.

Tabla con los valores que anulan a la 1ª derivada y los puntos que no son del dominio

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	↗	Máx	↘		↘	I	↘		↘	Mín	↗

observa que $f'(x)$ es: $\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}=\dfrac{x^2\cdot(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$. Está formada por 3 expresiones:

x^2: siempre POSITIVO • (x^2-3) • $(x^2-1)^2$: siempre POSITIVO.

El signo de f' es el signo de $(x^2-3)=g(x)$

$-4 \in (-\infty,-\sqrt{3})$ $\quad g(-4)=16-3>0$

$-1{,}5 \in (-\sqrt{3},-1)$ $\quad g(-1{,}5)=2{,}25-3<0$

$-0{,}5 \in (-1,0)$ $\quad g(-0{,}5)=0{,}25-3<0$

$0{,}5 \in (0,1)$ $\quad g(0{,}5)=0{,}25-3<0$

$1{,}5 \in (1,\sqrt{3})$ $\quad g(1{,}5)=2{,}25-3<0$

$4 \in (\sqrt{3},\infty)$ $\quad g(4)=16-3>0$

- Curvatura

Tabla con los valores ± 1 y 0 (punto de inflexión)

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	cóncavo $\cap$		convexo $\cup$		cóncavo $\cap$		convexo $\cup$

$$f''(x) = \frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Tres expresiones: $2x$ mismo signo que (x)

(x^2+3) siempre POSITIVO.

$(x^2-1)^3$ mismo signo que (x^2-1).

$\Rightarrow$ signo de $f''(x)$ = signo de $\frac{x}{x^2-1} = g(x)$

$-3 \in (-\infty,-1)$: $g(-3) = \frac{-3}{9-1} < 0$

$-0{,}5 \in (-1,0)$ $g(-0{,}5) = \frac{-0{,}5}{0{,}25-1} = \frac{-}{-} = > 0$

$0{,}5 \in (0,1)$ $g(0{,}5) = \frac{0{,}5}{0{,}25-1} = \frac{+}{-} < 0$

$3 \in (1,\infty)$ $g(3) = \frac{3}{9-1} = \frac{+}{+} > 0.$

- Asíntotas

VERTICALES. Hay 2: $x=1$ y $x=-1$.

Posición de la curva respecto de la asíntota.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty$$

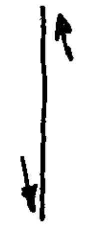
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$

$x=1$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{-0}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-1}{+0}\right) = -\infty$$



$x=-1$

HORIZONTALES $(y=b)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = +\infty$$ no tiene.

Aprovechemos para estudiar las ramas en el $-\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = -\infty$$

(El grado del numerador es mayor que el del denominador).

OBLÍCUAS $(y=mx+n)$

¿m? $$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

¿n? $$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \boxed{0}$$

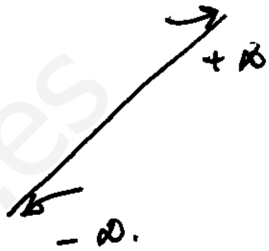
$$\Rightarrow \boxed{y = x}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota: estudio del signo de $f(x) - (mx+n)$

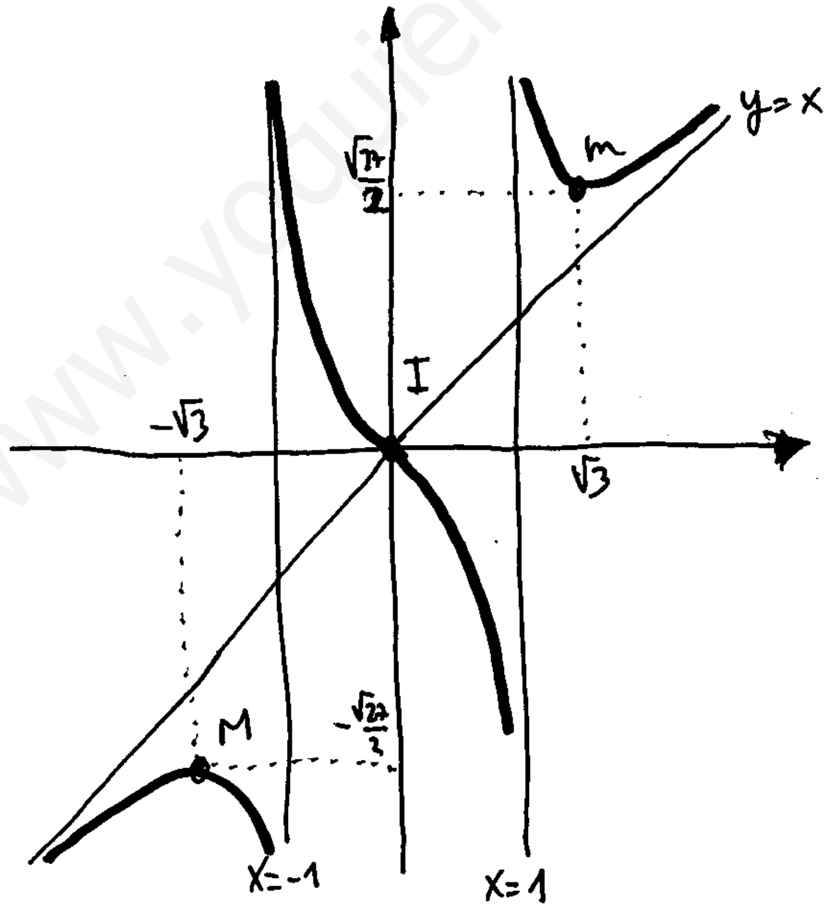
En nuestro caso

$$\frac{x^3}{x^2-1} - x = \frac{x}{x^2-1} = \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x^2}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{1}{x - 1/x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x-\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{+\infty}\right) = +0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{-\infty}\right) = -0. \end{array}\right\}$$



GRAFICA



2e

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

- Dominio.

$$\text{Dom} f(x) = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \neq 0\} \Rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$$

- Puntos de corte con los ejes.

Eje X: $y = 0 \rightarrow \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \Rightarrow A = (0,0)$

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0$: A.

- Regiones

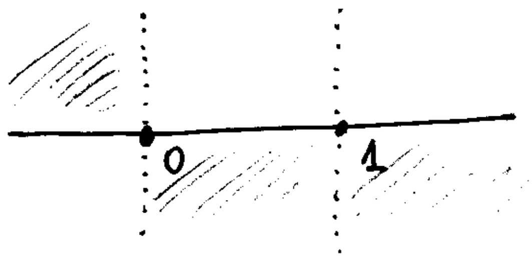
	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$

$\nexists$ = no existe.

$-1 \in (-\infty, 0)$: $f(-1) = \dfrac{-1}{+} < 0$

$0{,}5 \in (0,1)$: $f(0{,}5) = \dfrac{+}{+} > 0$

$2 \in (1,\infty)$: $f(2) = \dfrac{+}{+} > 0$



- Simetrías

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = -\frac{x^3}{(x+1)^2} \neq f(x) \text{ y } -f(x) \Rightarrow \text{NO TIENE}.$$

- Puntos notables.

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot (x-1)^{\cancel{2}} - x^3 \cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{3x^3 - 3x^2 - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3 \cdot (x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2 - 6x) \cdot (x-1) - (x^3 - 3x^2) \cdot 3}{(x-1)^4} =$$

$$f''(x) = \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

Condición de extremo : $f'=0 \rightarrow$

$$\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=0 \longrightarrow x^3-3x^2=0 \longrightarrow x^2\cdot(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3. \end{cases}$$

$f''(0)=0 \rightarrow$ Punto de inflexión. $\boxed{I=(0,f(0))=(0,0)}$

$f''(3) = \dfrac{6\cdot 3}{2^4} > 0 \rightarrow$ mínimo $\quad m=(3,f(3))$

$f(3) = \dfrac{3^3}{2^2} = \dfrac{27}{4}$ $\quad \boxed{m=\left(3,\dfrac{27}{4}\right)}$

Condición de puntos de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{6x}{(x-1)^4}=0 \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow I=(0,0)$$

- Monotonía.

Tabla con los puntos de discontinuidad y extremos.

	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Observa $f'(x) = \dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2\cdot(x-3)}{(x-1)^3}$

signo de x^2: POSITIVO para cualquier valor de x

signo de $(x-1)^3$ = signo de $(x-1)$.

$\Rightarrow$ signo de $f'(x)$ = signo de $g(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$.

$-3 \in (-\infty,1)$: $g(-3)=\dfrac{-6}{-4}>0$

$2 \in (1,3)$: $g(2) = \frac{-1}{1} < 0$

$4 \in (3,\infty)$: $g(4) = \frac{1}{3} > 0$

Si este estudio que simplifica el estudio del signo de $f'(x)$ podrías haber trabajado con la función completa $f'(x)$.

- Curvatura

Tabla con los puntos de discontinuidad y de inflexión.

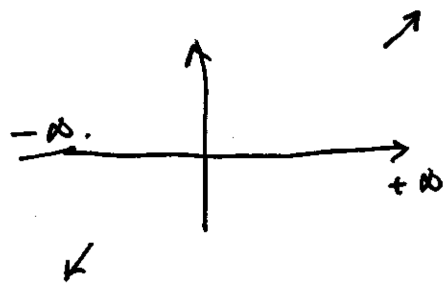
	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f	cóncava $\cap$		convexa $\cup$		convexa $\cup$

$$f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}.$$

Como $(x-1)^4$ es siempre positivo, el signo de f'' es el signo de $(6x)$

- Ramas

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} = -\infty \end{array}\right\}$$



Observa: no hay asíntotas horizontales.

ASÍNTOTAS

VERTICALES $\boxed{x=1}$

Posición relativa de la curva frente a la asíntota.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

OBLÍCUAS $(y = mx+n)$

¿m? $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$

¿n? $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2.$$

$$\Rrightarrow \boxed{y = x+2}$$

Posición de la curva respecto de la asíntota.

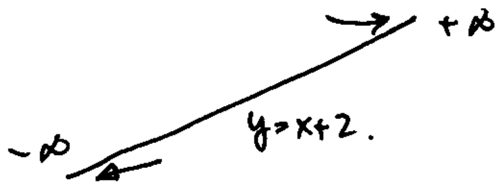
signo de: $\left(f(x) - (mx+n)\right)$

$$\frac{x^3}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3 - (x+2)\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

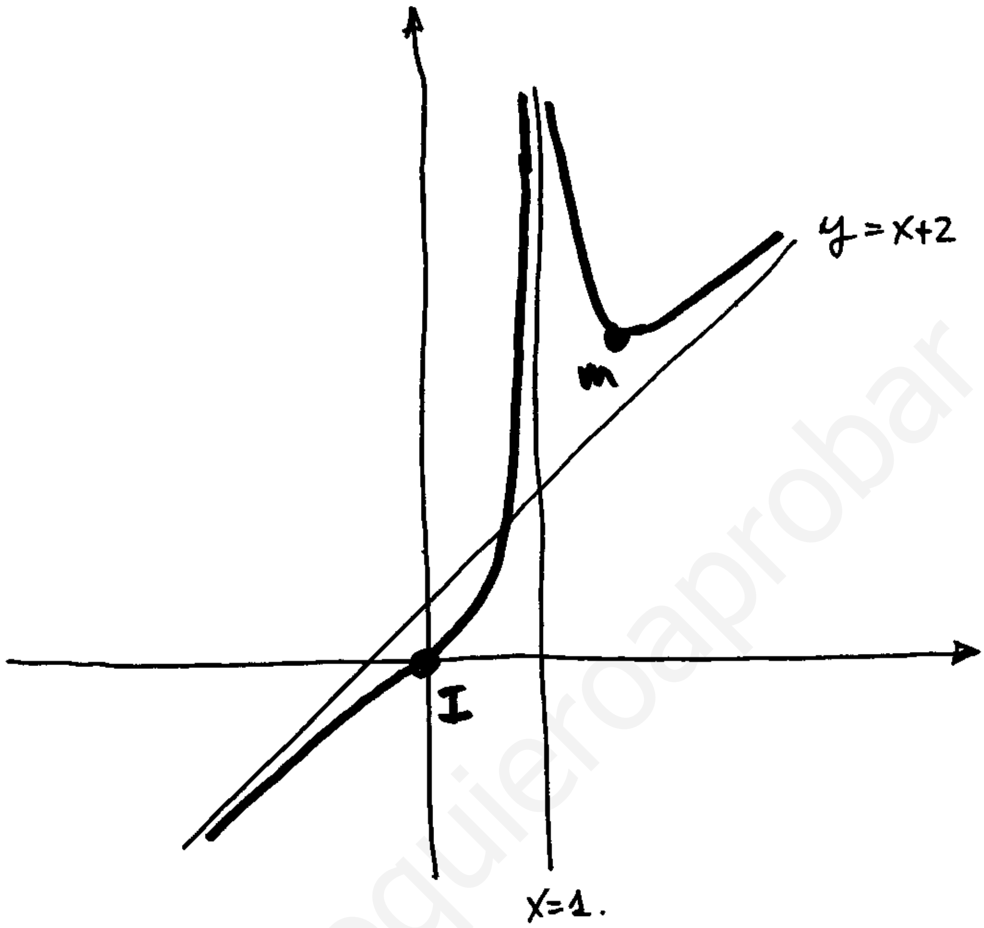
$$= \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x - 2x^2 + 4x - 2}{(x-1)^2} = \frac{3x-2}{(x-1)^2}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = +0$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x-2}{(x-1)^2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = -0$$



GRÁFICA . .



2f

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2+5}{x^2-4}}$$

- Dominio de $f(x)$.

$\mathrm{Dom}\, f(x)=\{x\in\mathbb{R}:\ x^2-4\neq 0\}$

Resolviendo la ecuación $x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow \mathrm{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$

- Puntos de corte con los ejes.

Eje X: $y=0 \rightarrow \dfrac{x^2+5}{x^2-4}=0 \longrightarrow x^2+5=0$: no tiene solución.

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=-\dfrac{5}{4} \Rightarrow \boxed{A=(0,-5/4)}$

- Regiones.

Se trata de estudiar el signo de $f(x)$: se toman los valores que anulan a $f(x)$ y los de discontinuidad.

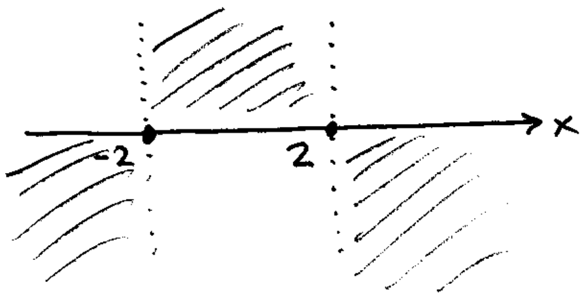
	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
f	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$

$\nexists$: no existe

$-3\in(-\infty,-2)$: $f(-3)=\dfrac{+}{5}>0$

$0\in(-2,2)$: $f(0)=\dfrac{+}{-4}<0$

$3\in(2,\infty)$: $f(3)=\dfrac{+}{5}>0$



- Simetrías

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2+5}{(-x)^2-4}=\dfrac{x^2+5}{x^2-4}=f(x) \rightarrow$ PAR : simétrica respecto del eje OY.

• Puntos notables.

DERIVADAS

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4) - (x^2+5)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x^3-8x-2x^3-10x}{(x^2-4)^2} = \frac{-18x}{(x^2-4)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-18\cdot(x^2-4)^{\cancel{2}} - (-18x)\cdot 2\cdot \cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{-18\cdot(x^2-4) - (-18x)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-4)^3} = \frac{-18x^2+72+72x^2}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{54x^2+72}{(x^2-4)^3}.$$

Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow$

$$\frac{-18x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow -18x = 0 \rightarrow x = 0.$$

$$f''(0) = \frac{72}{(-4)^3} < 0 \rightarrow \text{Máximo.} \quad M = (0, f(0)) = (0, -5/4)$$

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{54x^2+72}{(x^2-4)^3} = 0 \rightarrow 54x^2+72 = 0 \rightarrow \text{no tiene solución.}$$

• Monotonía.

Tabla con los valores que anulan a f' y los puntos de discontinuidad de f y f'.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$
f	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

Observa que el signo de f' es el signo de $(-18x)$ pues $(x^2-4)^2$ es siempre POSITIVO.

$-3 \in (-\infty,-2): \; f'(-3) = -18\cdot(-3) > 0$

$-1 \in (-2,0): \; f'(-1) = -18\cdot(-1) > 0$

$1 \in (0,2): \; f'(1) = -18\cdot 1 < 0$

$3 \in (2,\infty): \; f'(3) = -18\cdot 3 < 0$

• Curvatura.

Tabla con los puntos de inflexión y los puntos de discontinuidad de f y f''.

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
f''	$+$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$+$
f	convexa $\cup$	$\nexists$	cóncava $\cap$	$\nexists$	convexa $\cup$

$\nexists$: no existe.

El signo de f'' es el signo de $(x^2-4) = g(x)$

$-3 \in (-\infty,-2): \; g(-3) = 9-4 > 0 \rightarrow f'' > 0$.

$0 \in (-2,2): \; g(0) = -4 < 0 \rightarrow f'' < 0$

$3 \in (2,\infty): \; g(3) = 9-4 > 0 \rightarrow f'' > 0$

• Asíntotas

VERTICALES. $(x=a)$

Tenemos 2 asíntotas $x=2$ y $x=-2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+5}{x^2-4} = \left(\dfrac{9}{+0}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+5}{x^2-4} = \left(\dfrac{9}{-0}\right) = -\infty \end{array}\right\}$$

$x=2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x^2+5}{x^2-4} = \left(\dfrac{9}{-0}\right) = -\infty \\[2ex] \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x^2+5}{x^2-4} = \left(\dfrac{9}{+0}\right) = +\infty\end{array}\right\}$$

HORIZONTALES $(y=b)$

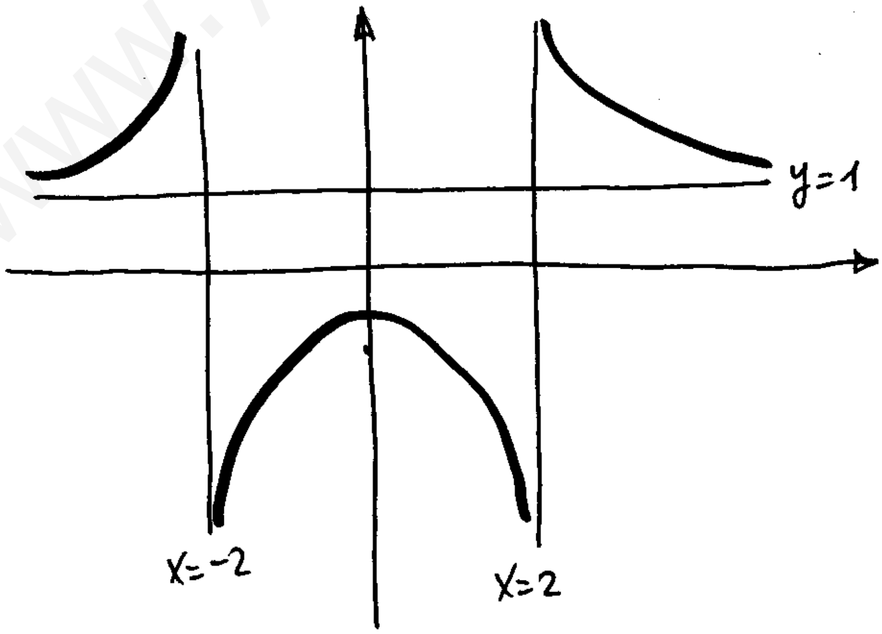
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{5}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}} = 1 \rightarrow \boxed{y=1}$$

Posición relativa

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-4} - 1\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5-x^2+4}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x^2-4} = \left(\frac{9}{+\infty}\right) = +0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-4} - 1\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{x^2-4} = \left(\frac{9}{+\infty}\right) = +0.$$

GRÁFICA.



2g $\boxed{f(x)=\dfrac{4-x^2}{1+x}}$

- Dominio.

Se trata de una función racional, su dominio son todos los números reales salvo los que anulan al denominador.

$$\text{Dom } f(x)=\{x\in\mathbb{R} : 1+x\neq 0\}$$

$$1+x=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{-1\}.$$

- Simetrías

$$f(-x)=\frac{4-(-x)^2}{1+(-x)}=\frac{4-x^2}{1-x}\neq f(x) \text{ y } \neq -f(x)$$

No tiene simetrías.

- Puntos notables.

$$f'(x)=\frac{-2x\cdot(1+x)-(4-x^2)\cdot 1}{(1+x)^2}=\frac{-2x-2x^2-4+x^2}{(1+x)^2}\rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-2x-4}{(1+x)^2}$$

$$f''(x)=\frac{(-2x-2)\cdot(1+x)^{\cancel{2}}-(-x^2-2x-4)\cdot 2\cdot\cancel{(1+x)}\cdot 1}{(1+x)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{-2x-2x^2-2-2x+2x^2+4x+8}{(1+x)^3}\rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{6}{(1+x)^3}$$

Condición de extremo: $f'=0\rightarrow$

$$\frac{-x^2-2x-4}{(1+x)^2}=0\rightarrow -x^2-2x-4=0\rightarrow x^2+2x+4=0\rightarrow$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-12}}{2}\rightarrow \text{no tiene.}$$

Puntos de inflexión : $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{6}{(1+x)^3}=0 \longrightarrow 6 \neq 0 \rightarrow \text{no tiene.}$$

- Monotonía

Tabla indicando los puntos extremos y los de discontinuidad.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
f	$-$	$\nexists$	$-$
f'	decreciente		decreciente.

$\nexists$ = no existe.

$$f'(x)=\frac{-(x^2+2x+4)}{(1+x)^2}$$

$x^2+2x+4>0$ para todo x (recuerda que no tiene raíces)

$(1+x)^2>0$ para todo x

- Curvatura

Tabla indicando los puntos de inflexión y los de discontinuidad.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
f	$-$	$\nexists$	$+$
f''	cóncava		convexa.

$$f''(x)=\frac{6}{(1+x)^3}$$

$$-2\in(-\infty,-1): \quad f''(-2)=\frac{6}{(-2+1)^3}=\ominus$$

$$0\in(-1,\infty): \quad f''(0)=\frac{6}{(0+1)^3}=\oplus$$

Observa que el signo de $f''(x)$ es el signo de $(1+x)$.

$1+x>0 \rightarrow x>-1$ ó $(-1,\infty) \rightarrow f''>0$.

- Asíntotas

VERTICALES. $(x=a)$

Al ser una función racional tendremos una asíntota vertical en $x=-1$.
Posición de la curva respecto de la asíntota.

$$\lim_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} \left(\frac{4-x^2}{1+x}\right) = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \left(\frac{4-x^2}{1+x}\right) = \left(\frac{3}{0^-}\right) = -\infty$$

$(x>-1 \leftrightarrow x+1>0)$ $\qquad$ $(x<-1 \leftrightarrow x+1<0)$

HORIZONTALES $(y=b)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-x^2}{1+x}\right) = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{x}-\frac{x^2}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{x}-x}{\frac{1}{x}+1}\right) = \left(\frac{-\infty}{1}\right) = -\infty$$

$\Rightarrow$ no tiene.

OBLICUAS $(y=mx+n)$

¿m? $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-x^2}{x+x^2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{-1}{1} = \boxed{-1} \Rightarrow m=-1.$$

¿n? $$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-x^2}{1+x}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-x^2+x+x^2}{1+x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+x}{1+x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{x}+\frac{x}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{x}+1}{\frac{1}{x}+1}\right) = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$\Rightarrow$ $y=-x+1$. es la asíntota oblicua.

Posición de la curva respecto de la asíntota: signo de $[f(x)-(mx+n)]$

$$f(x)-(mx+n)=\frac{4-x^2}{1+x}-(-x+1)=\frac{4-x^2-(-x+1)\cdot(1+x)}{1+x}=\frac{3}{1+x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{1+x}=+0 \to$ la curva (f) está por encima de la asíntota (mx+n)

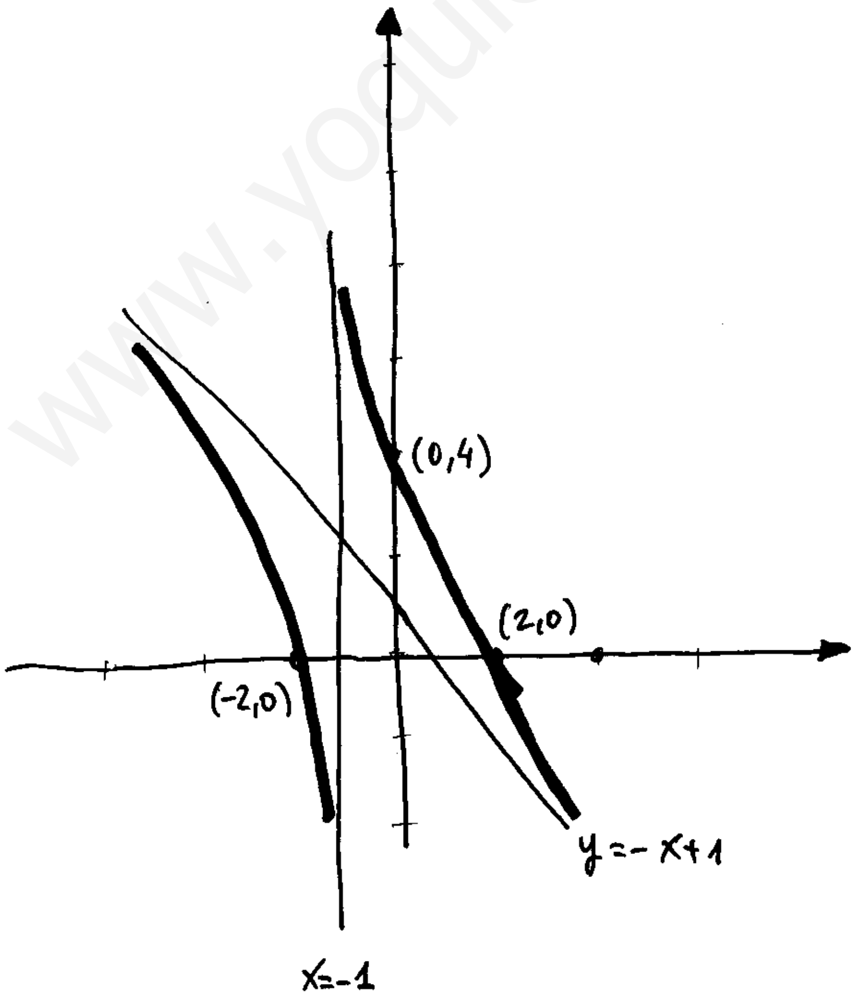
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{1+x}=-0 \to$ la curva está por debajo de la asíntota.

GRÁFICA.

Los puntos de corte con los ejes pueden ayudarnos a dibujarla.

Eje X: $y=0 \to 4-x^2=0 \to x=\pm 2 \to (2,0)$ y $(-2,0)$

Eje Y: $x=0 \to y=\frac{4}{1}=4 \to (0,4)$



$\boxed{2h}$

$$\boxed{f(x) = \frac{4x^2}{1+x^4}}$$

• Dominio

$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} : 1+x^4 \neq 0\}$

$(1+x^4)$ no es nunca 0, $\Leftrightarrow$ $1+x^4=0$ no tiene soluciones reales $\Rightarrow$ $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$.

• Puntos de corte con los ejes.

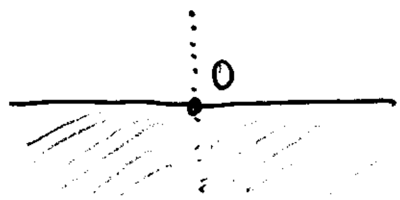
Eje X: $y=0 \rightarrow \frac{4x^2}{1+x^4}=0 \rightarrow 4x^2=0 \rightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{A=(0,0)}$

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=0$: A.

• Regiones.

Tabla con los valores que anulan a $f(x)$ y sus puntos de discontinuidad.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f	$+$	0	$+$



$-3 \in (-\infty,0)$: $f(-3) = +$

$3 \in (0,\infty)$: $f(3) = +$

Observa que $f(x) = \frac{4x^2}{1+x^4}$: $(4x^2)$ y $(1+x^4)$ son ambos SIEMPRE POSITIVOS.

• Simetrías.

$$f(-x) = \frac{4(-x)^2}{1+(-x)^4} = \frac{4x^2}{1+x^4} = f(x) \Rightarrow \text{PAR}.$$

El eje OY es un eje de simetría.

Departamento de Matemáticas

- Puntos notables.

DERIVADAS

$$f'(x) = \frac{8x\cdot(1+x^4) - 4x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{8x+8x^5-16x^5}{(1+x^4)^2} = \frac{8x-8x^5}{(1+x^4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(8-40x^4)\cdot(1+x^4)^{\cancel{2}} - (8x-8x^5)\cdot 2\cdot\cancel{(1+x^4)}\cdot 4x^3}{(1+x^4)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{(8-40x^4)\cdot(1+x^4) - (8x-8x^5)\cdot 8x^3}{(1+x^4)^3} =$$

$$= \frac{8+8x^4-40x^4-40x^8-64x^4+64x^8}{(1+x^4)^3} = \frac{8-96x^4+24x^8}{(1+x^4)^3}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{8x-8x^5}{(1+x^4)^2} \qquad f''(x) = \frac{8-96x^4+24x^8}{(1+x^4)^3}.$$

Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow$

$$\frac{8x-8x^5}{(1+x^4)^2} = 0 \rightarrow 8x-8x^5=0 \rightarrow 8x\cdot(1-x^4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1. \end{cases}$$

$$f''(0) = \frac{8}{1} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \qquad \boxed{m = (0, f(0)) = (0,0)}$$

$$f''(1) = \frac{8-96+24}{+} < 0 \rightarrow \text{máximo} \qquad \left.\begin{array}{l} M = (1, f(1)) \\ f(1) = \frac{4}{1+1} = 2 \end{array}\right\} \boxed{M = (1,2)}$$

$$f''(-1) = \frac{8-96+24}{+} < 0 \rightarrow \text{máximo} \qquad \left.\begin{array}{l} M' = (-1, f(-1)) \\ f(-1) = 2 \\ \text{función PAR} \end{array}\right\} \boxed{M' = (-1,2)}$$

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{8-96x^4+24x^8}{(1+x^4)^3}=0 \Rightarrow 8-96x^4+24x^8=0 \Leftrightarrow \boxed{3x^8-12x^4+1=0}$$

Ecuación "bicuadrada": $x^4=z \rightarrow 3z^2-12z+1=0 \rightarrow$

$$z=\frac{12\pm\sqrt{144-4\cdot3\cdot1}}{6}=\frac{12\pm\sqrt{132}}{6}=2\pm\sqrt{\frac{132}{36}}=2\pm\sqrt{\frac{11}{3}}$$

Observa que $z_+=2+\sqrt{\frac{11}{3}}>0 \rightarrow x^4=2+\sqrt{\frac{11}{3}} \Rightarrow x_1=+\sqrt[4]{2+\sqrt{\frac{11}{3}}}$

$$x_2=-\sqrt[4]{2+\sqrt{\frac{11}{3}}}$$

$x_1\simeq 1{,}4 \rightarrow f(1{,}4)\simeq 1{,}6$ $\quad I_1=(1.4,\,1.6)$

$x_2\simeq -1{,}4 \rightarrow f(-1{,}4)\simeq 1{,}6$ $\quad I_2=(-1.4,\,1.6)$

$$z_-=2-\sqrt{\frac{11}{3}} \rightarrow x^4=2-\sqrt{\frac{11}{3}} \Rightarrow x_3=+\sqrt[4]{2-\sqrt{\frac{11}{3}}}$$

$$x_4=-\sqrt[4]{2-\sqrt{\frac{11}{3}}}$$

$x_3\simeq 0{,}5 \rightarrow f(0{,}5)\simeq 1{,}1$ $\quad I_3=(0.5,\,1.1)$

$x_4\simeq -0{,}5 \rightarrow f(-0{,}5)\simeq 1{,}1$ $\quad I_4=(-0{,}5,\,1.1)$

- Monotonía

Tabla con los puntos extremos de $f(x)$ y los de discontinuidad de $f(x)$ y de $f'(x)$. (no hay)

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	mín	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

La 1ª derivada es $f'(x) = \dfrac{8x\cdot(1-x^4)}{(1+x^4)^2}$.

El signo de $f'(x)$ es el signo del producto $x\cdot(1-x^4)$ que llamaremos $g(x) = x\cdot(1-x^4)$; pues $[8]$ y $[(1+x^4)^2]$ son términos SIEMPRE positivos.

$-3 \in (-\infty,-1)$: $g(-3) = (-3)\cdot[1-(-3)^4] = -\cdot- > 0$

$-0.5 \in (-1,0)$: $g(-0{,}5) = (-0.5)\cdot[1-(-0.5)^4] = -\cdot+ < 0$

$0{,}5 \in (0,1)$: $g(0.5) = 0{,}5\cdot[1-0{,}5^4] = +\cdot+ > 0$

$2 \in (1,\infty)$: $g(2) = 2\cdot[1-2^4] = +\cdot- < 0$

- Curvatura

Tabla con los puntos de inflexión y los puntos de discontinuidad de f y f'' (no hay)

	$(-\infty,x_2)$	x_2	(x_2,x_4)	x_4	(x_4,x_3)	x_3	(x_3,x_1)	x_1	(x_1,∞)
f''	+	0	−	0	+	0	−	0	+
f	convexa		cóncava		convexa		cóncava		convexa

El signo de $f''(x)$ lo proporciona el numerador:
$(24x^8 - 96x^4 + 8.)$

Dado que es una función continua (polinomio de grado 8) y en su descomposición hay 4 raíces distintas los signos en los diferentes intervalos son ALTERNOS $\Rightarrow$ bastará con averiguar el signo en un intervalo.

$(x_4,x_3) = (-0.5, 0.5)$: $0 \in (x_4,x_3)$: $f''(0) = \dfrac{8}{+} > 0$

- Ramas

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{1+x^4} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0$$

Es mayor el grado del denominador.

- Asíntotas..

VERTICALES: no tiene.

HORIZONTALES: $y=0$ (observa las ramas)

Posición de la curva respecto de la asíntota.

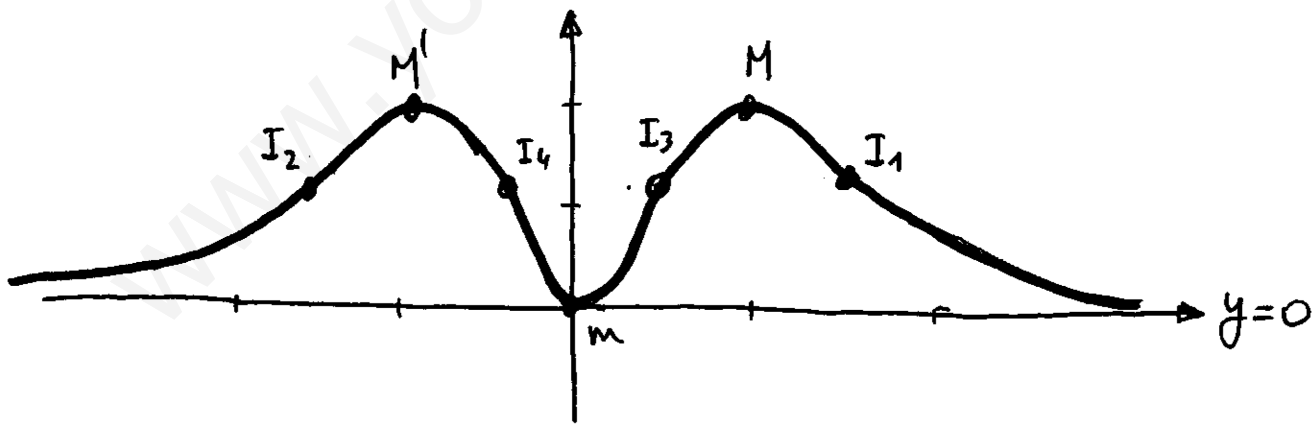
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2}{1+x^4}-0\right) = +0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2}{1+x^4}-0\right) = +0$$

$-\infty$ $y=0$ $+\infty$

OBLÍCUAS: no hay pues hay una asíntota horizontal

- GRÁFICA



2i

$$f(x)=\frac{3x-2}{5-7x}=\frac{3x-2}{-7x+5}$$

Se trata de una hipérbola.

Método 1.

- Dominio de $f(x)$

$\text{Dom}\, f(x)=\{x\in\mathbb{R} : 5-7x\neq 0\}$

$5-7x=0 \rightarrow x=\frac{5}{7} \qquad \Rightarrow \text{Dom}\, f(x)=\mathbb{R}-\{\frac{5}{7}\}$

- Puntos de corte con los ejes.

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=\frac{-2}{5} \Rightarrow A=(0,-\frac{2}{5})=(0,-0.4)$

Eje X: $y=0 \rightarrow 3x-2=0 \rightarrow x=\frac{2}{3} \Rightarrow B=(\frac{2}{3},0)\simeq(0.67,0)$

- Regiones.

Se trata de estudiar el signo de $f(x)$. Tabla con los valores que anulan a $f(x)$ y los puntos de discontinuidad.

	$(-\infty,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},\frac{5}{7})$	$\frac{5}{7}$	$(\frac{5}{7},\infty)$
f	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

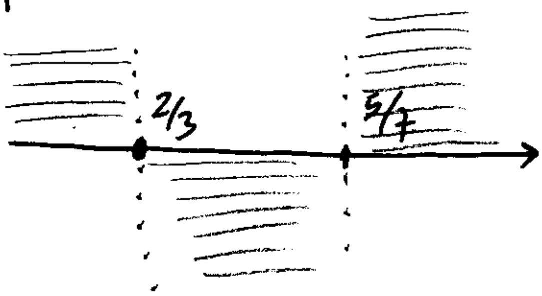
$\exists$ existe

$\nexists$ no existe

$0\in(-\infty,\frac{2}{3}) \quad f(0)=-\frac{2}{5}$

$0.7\in(\frac{2}{3},\frac{5}{7}) \quad f(0.7)=\frac{3\cdot 0,7-2}{5-7\cdot 0,7}=\frac{+}{+}$

$10\in(\frac{5}{7},\infty) : f(10)=\frac{28}{-65}=-$



• Simetrías

$$f(-x)=\frac{3(-x)-2}{5-7\cdot(-x)}=\frac{-3x-2}{5+7x}\neq f(x) \text{ y } -f(x) \Rightarrow \text{no tiene.}$$

• Puntos notables

1ª y 2ª derivada.

$$f'(x)=\frac{3\cdot(5-7x)-(3x-2)\cdot(-7)}{(5-7x)^2}=\frac{15-21x+21x-14}{(5-7x)^2}=\frac{1}{(5-7x)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2(5-7x)\cdot(-7)}{(5-7x)^4}=\frac{14}{(5-7x)^3}.$$

Recuerda: si $y=\frac{1}{f} \rightarrow y'=-\frac{f'}{f^2}$

No tiene extremos ni puntos de inflexión.

$f'=0 \rightarrow \frac{1}{(5-7x)^2}=0 \rightarrow 1=0$. no tiene solución.

$f''=0 \rightarrow \frac{14}{(5-7x)^3}=0 \rightarrow 14=0$. no tiene solución.

• Monotonía

Se trata de estudiar el signo de la 1ª derivada. Tabla con los valores que anulan a f' y los puntos de discontinuidad de f y f'.

	$(-\infty, 5/7)$	$5/7$	$(5/7, \infty)$
f'	+	$\nexists$	+
f	↗	$\nexists$	↗

$0 \in (-\infty, 5/7)$: $f'(0)=\frac{1}{+}>0$

$10 \in (\frac{5}{7}, \infty)$: $f'(10)=\frac{1}{+}>0$

• Curvatura

Se trata de estudiar el signo de la 2ª derivada. Tabla con los valores que anulan a f'' y los puntos de discontinuidad de f y f''.

	$(-\infty, 5/7)$	$5/7$	$(5/7, \infty)$
f''	$+$	$\nexists$	$-$
f	convexa $\cup$	$\nexists$	cóncava $\cap$

$$0 \in (-\infty, 5/7): \ f''(0) = \frac{14}{5^3} > 0$$

$$10 \in (5/7, \infty): \ f''(10) = \frac{14}{(-65)^3} < 0$$

• Asíntotas

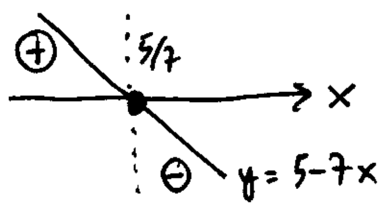
Verticales: $\boxed{x = \frac{5}{7}}$ (es una fracción algebraica y para este valor se anula el denominador)

Posición relativa de la curva respecto de la asíntota:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5/7^+} \dfrac{3x-2}{5-7x} = \dfrac{1/7}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 5/7^-} \dfrac{3x-2}{5-7x} = \dfrac{1/7}{0^+} = +\infty \end{array}\right\}$$

$x = 5/7$

La determinación del signo del denominador es sencillo si representas la recta $y = 5-7x$



Horizontales

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{5-7x} = \frac{-3}{7} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-3}{7}}$$

Posición relativa de la curva respecto de la asíntota. Se trata de determinar el signo de

$$\frac{3x-2}{5-7x} - \left(\frac{-3}{7}\right)$$

Operando

$$\frac{3x-2}{5-7x} + \frac{3}{7} = \frac{7(3x-2)+3(5-7x)}{7\cdot(5-7x)} = \frac{21x-14+15-21x}{7\cdot(5-7x)} = \frac{1}{7(5-7x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{7\cdot(5-7x)} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

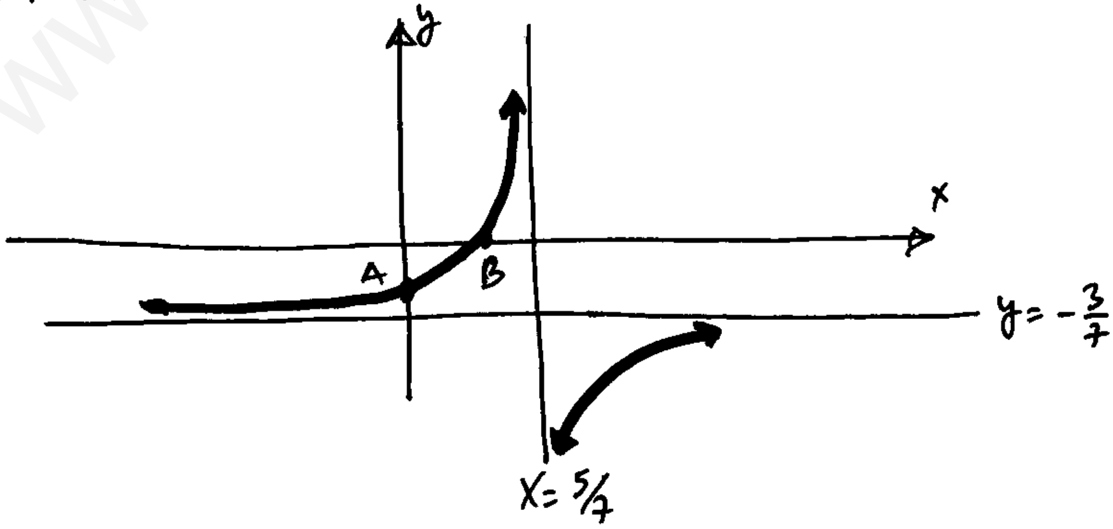
$y = \frac{-3}{7}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{7\cdot(5-7x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$y = \frac{-3}{7}$.

Verticales: no tiene por tener una horizontal.

GRÁFICA.



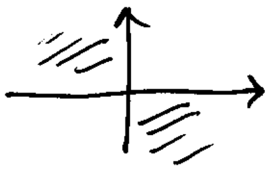
Método 2.

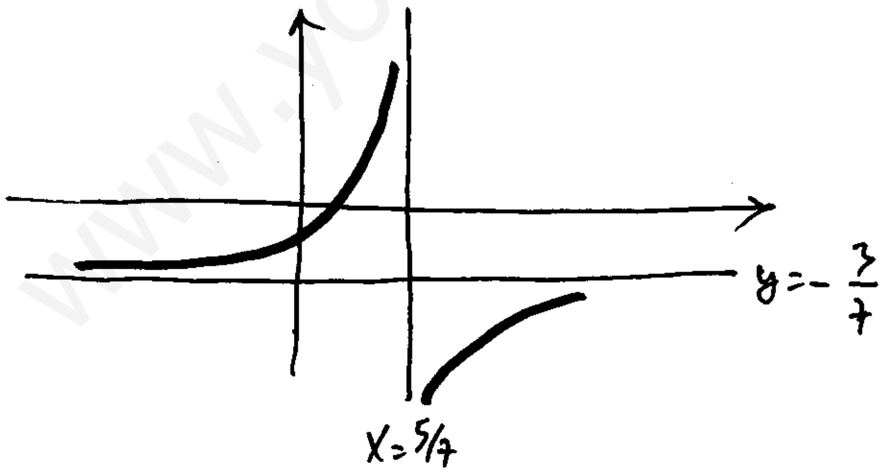
$$\begin{array}{l|l} 3x-2 & -7x+5 \\ \cline{2-2} -3x+\frac{15}{7} & -3/7 \\ \hline \quad 1/7 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-2}{-7x+5} = -\frac{3}{7} + \frac{1/7}{-7x+5} = -\frac{3}{7} + \frac{-1/7}{7x-5}.$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = -\frac{3}{7} + \frac{-1/7}{7x-5}} \quad \Leftrightarrow f(x) = a + \frac{k}{x-b}.$$

- a : Asíntota horizontal : $\boxed{y = \frac{-3}{7}}$
- $x-b$: Asíntota vertical : $7x-5=0 \longrightarrow \boxed{x = \frac{5}{7}}$
- $k = -1/7 < 0$. 2º y 4º cuadrante.





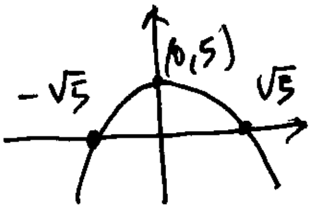
3a

$$\boxed{f(x) = x \cdot \sqrt{5-x^2}}$$

- Dominio

$\text{Dom } f(x) = \{ x \in \mathbb{R} : 5-x^2 \geq 0 \}$

Voy a resolver la inecuación de modo gráfico: $y = 5-x^2$ es una parábola de ramas negativas y eje de simetría $x=0$; y de vértice $V=(0,5)$. Corta al eje OX en $x^2-5=0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$.



$5-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0 \rightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

$\text{Dom } f(x) = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$.

- Puntos de corte con los ejes.

Eje Y: $x=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow \boxed{A=(0,0)}$

Eje X: $y=0 \rightarrow x \cdot \sqrt{5-x^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x=0 : A \\ \sqrt{5-x^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \end{cases}$

$B = (\sqrt{5}, 0) \quad C = (-\sqrt{5}, 0)$

- Regiones.

	$-\sqrt{5}$	$(-\sqrt{5}, 0)$	0	$(0, \sqrt{5})$	$\sqrt{5}$
f	0	$-$	0	$+$	0

$-2 \in (-\sqrt{5}, 0) : f(-2) = (-2) \cdot \sqrt{1} < 0$

$2 \in (0, \sqrt{5}) : f(2) = (+2) \cdot \sqrt{1} > 0$

• Simetrías

$$f(-x) = -x \cdot \sqrt{5-(-x)^2} = -x \cdot \sqrt{5-x^2} = -f(x) \Rightarrow \text{IMPAR}$$

y la función es simétrica respecto del origen de coordenadas

• Puntos notables.

DERIVADAS

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{5-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}} = \sqrt{5-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{5-x^2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot \sqrt{5-x^2} - (5-2x^2) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{5-x^2}}}{\left(\sqrt{5-x^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{-4x \cdot \sqrt{5-x^2} + \frac{x \cdot (5-2x^2)}{\sqrt{5-x^2}}}{5-x^2} = \frac{-4x \cdot \left(\sqrt{5-x^2}\right)^2 + x \cdot (5-2x^2)}{(5-x^2) \cdot \sqrt{5-x^2}}$$

$$= \frac{-4x \cdot (5-x^2) + x \cdot (5-2x^2)}{(5-x^2)^{3/2}} = \frac{x \cdot (2x^2-15)}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

Condición de extremo: $f' = 0 \rightarrow$

$$\frac{5-2x^2}{\sqrt{5-x^2}} = 0 \rightarrow 5-2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left(2 \cdot \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - 15\right)}{+} = \frac{+ \cdot -}{+} < 0 \rightarrow \text{Máximo}.$$

$$M = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$$

$f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{5-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt{5-\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}. \Rightarrow \boxed{M = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right)}$

$f''\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = \dfrac{-\sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \left[2\cdot\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - 5\right]}{+} = \dfrac{- \cdot -}{+} > 0 \rightarrow$ Mínimo.

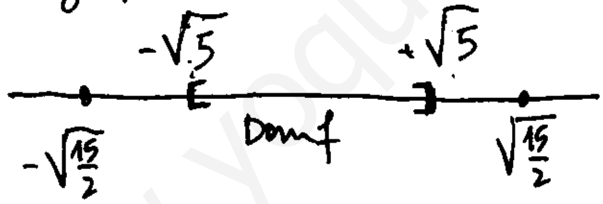
Por simetría $f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -f\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{m = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{5}{2}\right)}$

Condición de punto de inflexión: $f'' = 0 \rightarrow$

$$\frac{x\cdot(2x^2-15)}{\sqrt{(5-x^2)^3}} = 0 \Rightarrow x\cdot(2x^2-15) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

las últimas soluciones no son válidas pues están fuera del dominio de la función. $\sqrt{\frac{15}{2}} > \sqrt{5}$.

De modo gráfico: observa los intervalos.



$\boxed{I = (0, f(0)) = (0,0)}$

- Monotonía.

Tabla con los valores de los extremos y los puntos de discontinuidad de $f(x)$

	$\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, +\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$	$+\sqrt{\frac{5}{2}}$	$\left(+\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘	mín	↗	Máx.	↘

$-2 \in \left(-\sqrt{5}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right) : f'(-2) = \frac{5-8}{+} < 0.$

$0 \in \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) : f'(0) = \frac{5}{\sqrt{5}} > 0.$

$2 \in \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{5}\right) : f'(2) = \frac{5-8}{+} < 0$

• Curvatura.

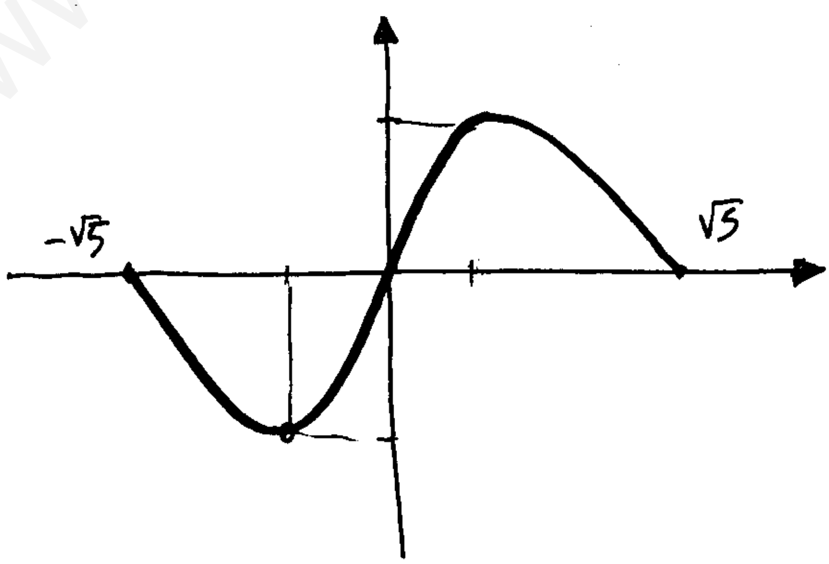
	$(-\sqrt{5}, 0)$	0	$(0, \sqrt{5})$
f''	$+$	0	$-$
f	convexa $\cup$	I.	cóncava $\cap$

$-2 \in (-\sqrt{5}, 0) : f''(-2) = \frac{-2\cdot(8-15)}{+} = \frac{-\cdot-}{+} > 0$

$2 \in (0, \sqrt{5}) : f''(2) = \frac{2\cdot(8-15)}{+} = \frac{+\cdot-}{+} < 0$

• Asíntotas: no tiene de ningún tipo.

• Gráfica



3b

$$\boxed{f(x) = x + \sqrt[3]{x^2}}$$

- Dominio

$\mathrm{Dom}\, f(x) = \mathbb{R}$.

Está formada por (x), función polinómica, y $(\sqrt[3]{x^2})$ que existe para todos los valores reales.

- Corte con los ejes

Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \longrightarrow \boxed{A = (0,0)}$

Eje X: $y = 0 \rightarrow x + \sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow$

$x^3 = (-\sqrt[3]{x^2})^3 \Leftrightarrow x^3 = -x^2 \Rightarrow x^3 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 \cdot (x+1) = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = -1$.

$\boxed{B = (-1,0)}$

- Regiones.

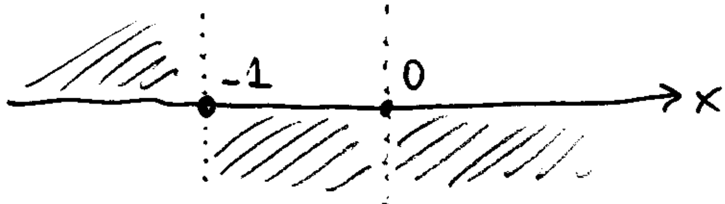
Tabla de valores

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\infty)$
f	$-$	0	$+$	0	$+$

$-2 \in (-\infty,-1)$: $f(-2) = -2 + \sqrt[3]{4} < 0$

$-0{,}5 \in (-1,0)$: $f(-0{,}5) = -0{,}5 + \sqrt[3]{0{,}25} > 0$

$2 \in (0,\infty)$: $f(2) = 2 + \sqrt[3]{4} > 0$



• Simetrías.

$$f(-x) = -x + \sqrt[3]{(-x)^2} = -x + \sqrt[3]{x^2} \neq f(x) \text{ y } \neq -f(x)$$

NO TIENE.

• Puntos notables

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2} = x + x^{2/3}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{3} x^{-1/3} = 1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-1}{3} x^{-4/3} = \frac{-2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Condición de extremo: $f' = 0 \rightarrow$

$$1 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -1 \rightarrow \sqrt[3]{x} = -\frac{2}{3} \rightarrow x = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{-8}{27}.$$

$$f''\left(\frac{-8}{27}\right) = \frac{-}{+} < 0 \rightarrow \text{Máximo.} \quad M = \left(-\frac{8}{27}, f\left(-\frac{8}{27}\right)\right)$$

$$f\left(-\frac{8}{27}\right) = \frac{-8}{27} + \sqrt[3]{\left(-\frac{8}{27}\right)^2} = \frac{-8}{27} + \sqrt[3]{\frac{2^6}{3^6}} = \frac{-8}{27} + \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{27}.$$

$$8 = 2^3 \rightarrow 8^2 = 2^6 \quad ; \quad 27 = 3^3 \rightarrow 27^2 = 3^6.$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \left(-\frac{8}{27}, \frac{4}{27}\right)}$$

Condición de punto de inflexión: $f'' = 0 \rightarrow$

$$\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^2}} = 0 \rightarrow \text{NO TIENE.}$$

• Monotonía:

Tabla con los valores extremos $\left(-\frac{8}{27}\right)$ y puntos de discontinuidad de f (ninguno) y $f'(0)$.

	$\left(-\infty,-\frac{8}{27}\right)$	$-\frac{8}{27}$	$\left(-\frac{8}{27},0\right)$	0	$(0,\infty)$
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$-8 \in \left(-\infty,-\frac{8}{27}\right) : f'(-8) = 1+\frac{2}{3\cdot -2} = \frac{2}{3} > 0$$

$$-0{,}1 \in \left(-\frac{8}{27},0\right) : f'(-0{,}1) = 1+\frac{2}{3\sqrt[3]{-0{,}1}} < 0$$

$$8 \in (0,\infty) : f'(8) = 1+\frac{2}{3\cdot 2} > 0$$

• Curvatura

Tabla con los valores de los puntos de inflexión (no tiene) y discontinuidad de f (no tiene) y $f''(x=0)$.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$-$
f	cóncava $\cap$	0	cóncava $\cap$

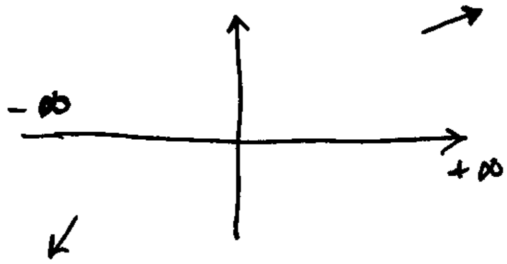
$$-3 \in (-\infty,0) : f''(-3) = \frac{-2}{+} < 0$$

$$3 \in (0,\infty) : f''(3) = \frac{-2}{+} < 0$$

• Ramas

$$\lim_{x \to \infty} \left(x + \sqrt[3]{x^2}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[3]{x^2}\right) = -\infty.$$



$\left.\begin{array}{l} x \text{ tiene grado } 1 \\ \sqrt[3]{x^2} \text{ tiene grado } \frac{2}{3} \end{array}\right\} \to$ el término que cuenta es x.

Si extraes factor común x:

$$x + \sqrt[3]{x^2} = x \cdot \left(1 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = x \cdot \left(1 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}\right) = x \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[3]{x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} x \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = (-\infty \cdot 1) = -\infty$$

• Asíntotas.

VERTICALES: no tiene. $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$.

HORIZONTALES: no tiene. Mira el apartado "Ramas".

OBLICUAS $y = mx + n$

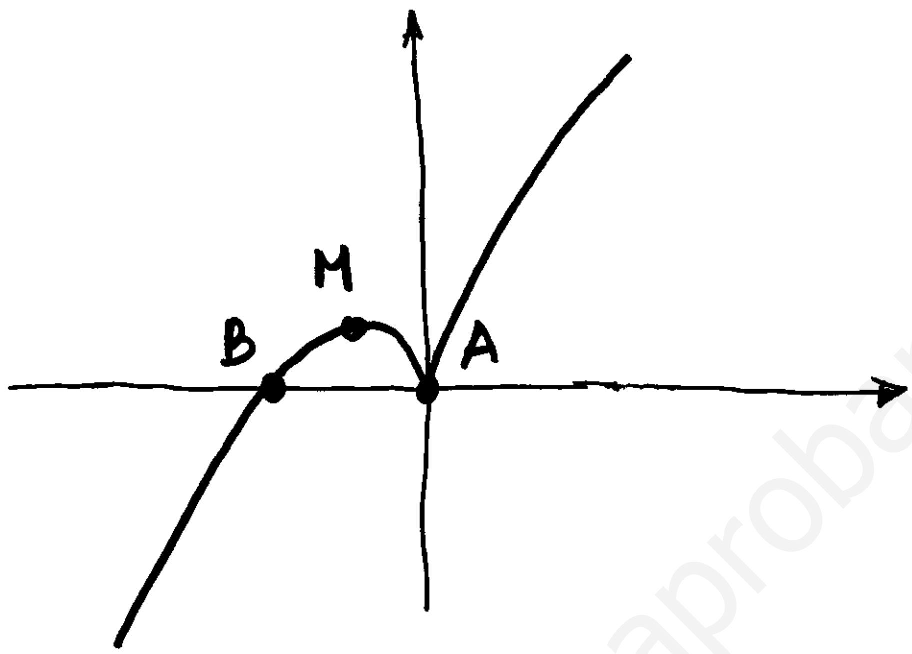
¿m? $m = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x + \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 1.$

¿n? $n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to \infty} \left(x + \sqrt[3]{x^2} - x\right) = +\infty \Rightarrow$

no hay asíntota oblicua, a pesar, de existir $\underline{\underline{m}}$.

Recuerda que m y n deben ser números reales.

GRÁFICA.



$\boxed{3c}$

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2-9}}$$

• Dominio

$\mathrm{Dom}\, f(x) = \{x \in \mathbb{R} : x^2-9 \geq 0\}$

Resolvamos la inecuación $x^2-9 \geq 0 \iff (x+3)\cdot(x-3) \geq 0$

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,\infty)$
$(x+3)$	$-$	0	$+$	6	$+$
$(x-3)$	$-$	-6	$-$	0	$+$
x^2-9	$+$	0	$-$	0	$+$

$\mathrm{Dom}\, f(x) = (-\infty,-3] \cup [3,\infty)$

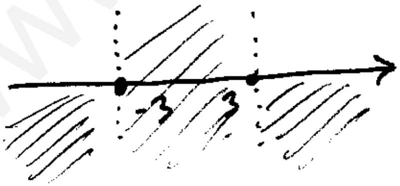
• Puntos de corte con los ejes.

Eje X: $y=0 \rightarrow \sqrt{x^2-9}=0 \rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x=\pm 3$

$A=(3,0) \quad B=(-3,0)$

Eje Y: $x=0$, no hay pues no está en el dominio.

• Regiones. Es siempre positiva



• Simetrías.

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2-9} = \sqrt{x^2-9} = f(x) \rightarrow$ PAR.

El eje OY (vertical) es un eje de simetría de la curva.

- Puntos notables.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}.$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2-9} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}}{\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2-9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}}{x^2-9}.$$

Operando en el numerador:

$$\sqrt{x^2-9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{\left(\sqrt{x^2-9}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{-9}{\sqrt{x^2-9}} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-9}{(x^2-9)\cdot\sqrt{x^2-9}}.$$

Condición de extremo. $f'=0 \rightarrow$

$\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \longrightarrow x=0$ (fuera del dominio) $\Rightarrow$ no tiene.

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$\frac{-9}{(x^2-9)\cdot\sqrt{x^2-9}} = 0 \rightarrow$ no tiene.

- Monotonía.

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$
f	$\searrow$				$\nearrow$

$-4\in(-\infty,-3)$: $f'(-4) = \frac{-4}{\sqrt{16-9}} < 0$

$+4\in(3,\infty)$: $f'(4) = \frac{4}{\sqrt{16-9}} > 0$

- Curvatura

	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,3)$	3	$(3,\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$-$
f	cóncava $\cap$				cóncava $\cap$

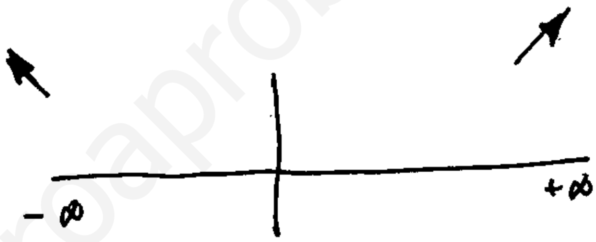
$-4 \in (-\infty,-3) : f''(-4) = \frac{-9}{+} < 0$

$+4 \in (3,\infty) : f''(4) = \frac{-9}{+} < 0$

- Ramas

$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-9} = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-9} = +\infty$



- ASÍNTOTAS

Verticales: no tiene.

Horizontales: no tiene. (observar las Ramas)

Oblicuas $y = mx+n$

¿m? $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = 1$

¿n? $n = \lim (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-9} - x\right) = (\infty - \infty)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-9} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-9} + x\right)}{\sqrt{x^2-9} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9-x^2}{\sqrt{x^2-9}+x} = 0.$$

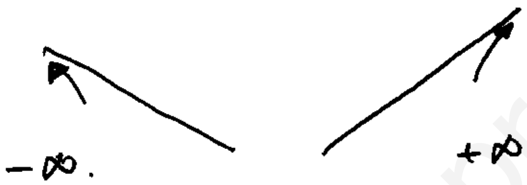
$\Rightarrow \boxed{y = x}$

Por simetría (PAR) tendremos otra asíntota en $x \to -\infty$: $\boxed{y=-x}$

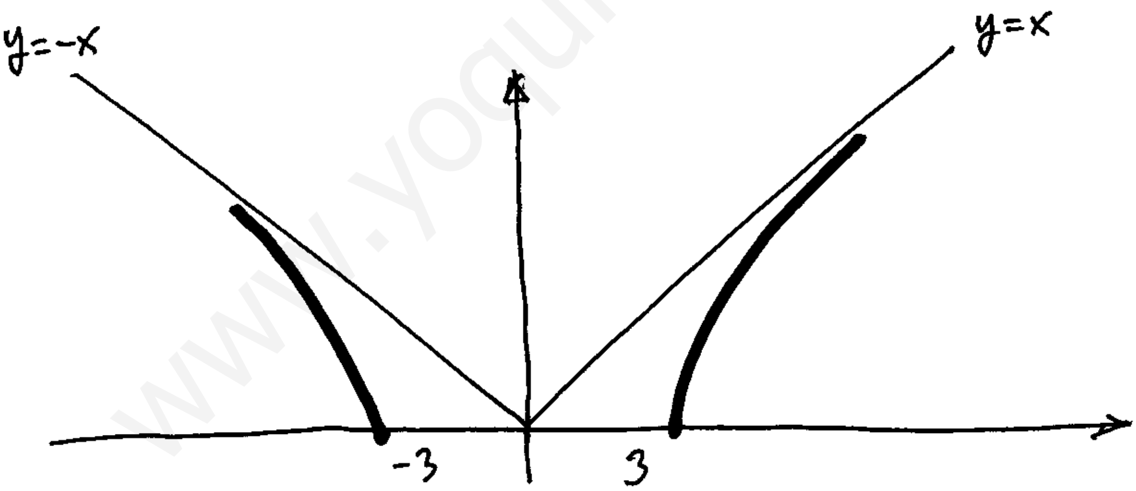
Posición de la curva respecto de la asíntota. Será estudiar el signo de $f(x) - (mx+n)$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-9} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x} = \frac{-9}{+\infty} = -0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-9} - (-x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2-9}-x} = \frac{-9}{+\infty} = -0$$



GRÁFICA.



3d

$$\boxed{f(x)=\sqrt{9-4x^2}}$$

- Dominio

$Dom\, f(x)=\{x\in\mathbb{R} : 9-4x^2\geq 0\}$

Resolución gráfica de la inecuación: $y=9-4x^2$. Se puede interpretar la inecuación como ~~p~~ los puntos de la parábola $y=9-4x^2$ con ordenada ≥ 0.

$$9-4x^2\geq 0 \iff y\geq 0.$$

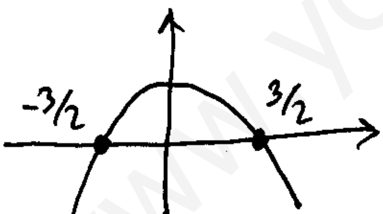
Esta parábola es muy sencilla pues es una traslación vertical de 9 unidades de $-4x^2$.

Eje de simetría : $x=0$

Vértice $V=(0,9)$

Raíces: $9-4x^2=0 \to 4x^2=9 \to x=\pm 3/2$. $(3/2,0),(-3/2,0)$.

Ramas : $-4<0$: negativas.



$$9-4x^2\geq 0 \iff \left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$$

$$\Rightarrow Dom\, f(x)=\left[-\frac{3}{2}, +\frac{3}{2}\right]$$

La resolución mediante la inecuación es bastante más corta de escribir.

$$9-4x^2\geq 0 \iff (3+2x)\cdot(3-2x)\geq 0.$$

Tabla de valores:

	$\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
$3+2x$	$-$	0	$+$	$\frac{11}{3}$	$+$
$3-2x$	$+$	$\frac{11}{3}$	$+$	0	$-$
$9-4x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Dom } f(x) = \left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$$

- Puntos de corte con los ejes.

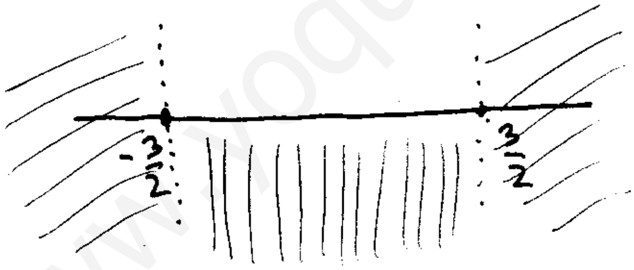
Eje X: $y=0 \to \sqrt{9-4x^2}=0 \to 9-4x^2=0 \to x=\pm\frac{3}{2}$

$\boxed{A=\left(-\frac{3}{2},0\right)}$ $\boxed{B=\left(+\frac{3}{2},0\right)}$

Eje Y: $x=0 \to y=\sqrt{9}=3 \to \boxed{C=(0,3)}$

- Regiones.

Siempre POSITIVA.



- Simetrías

$$f(-x)=\sqrt{9-4(-x)^2}=\sqrt{9-4x^2}=f(x) \Rightarrow \text{PAR}.$$

simétrica respecto del eje vertical OX.

- Puntos notables.

DERIVADAS

$$f'(x)=\frac{-8x}{2\sqrt{9-4x^2}}=\frac{-4x}{\sqrt{9-4x^2}}.$$

$$f''(x)=\frac{-4\cdot\sqrt{9-4x^2}-(-4x)\cdot\frac{-4x}{\sqrt{9-4x^2}}}{\left(\sqrt{9-4x^2}\right)^2}=\frac{-4\cdot\sqrt{9-4x^2}-\frac{16x^2}{\sqrt{9-4x^2}}}{9-4x^2}$$

$$=\frac{-4\cdot\left[\sqrt{9-4x^2}\right]^2-16x^2}{(9-4x^2)\cdot\sqrt{9-4x^2}}=\frac{-36+16x^2-16x^2}{(9-4x^2)\cdot\sqrt{9-4x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{-36}{\sqrt{(9-4x^2)^3}}.$$

Condición de extremo: $f'=0\rightarrow$

$$\frac{-4x}{\sqrt{9-4x^2}}=0\rightarrow -4x=0\longrightarrow x=0.$$

$$f''(0)=\frac{-36}{\sqrt{9^3}}<0\longrightarrow \text{máximo}\qquad M=(0,f(0))=(0,3)$$

Condición de punto de inflexión: $f''=0\rightarrow$

$$\frac{-36}{\sqrt{(9-4x^2)^3}}=0\rightarrow -36=0\rightarrow$$ no tiene solución. (no hay puntos de inflexión).

- Monotonía.

Tabla con los extremos y los puntos de discontinuidad de f y f'

$\nexists$ = no existe.

(*)

	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2},0\right)$	0	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$
f'	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$
f	0	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	0

$-1 \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) : f'(-1) = \frac{-4\cdot(-1)}{+} > 0$

$1 \in \left(0, \frac{3}{2}\right) : f'(1) = \frac{-4\cdot 1}{+} < 0$

- Curvatura.

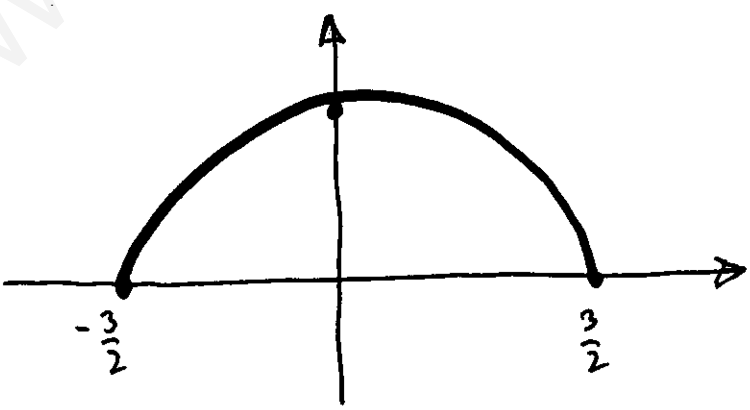
Tabla con los puntos de inflexión y los puntos de discontinuidad de f y f''.

	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$
f''	$\nexists$	$-$	$\nexists$
f	0	cóncava $\cap$	0

$0 \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) : f''(0) = \frac{-36}{+} < 0$

- Asíntotas: no tiene verticales y no puede tener horizontales ni oblicuas porque no hay comportamiento en el infinito: la función está definida sólo en el intervalo $\left[-3/2, 3/2\right]$.

- GRÁFICA



(*) Observa: la recta tangente en $\frac{3}{2}$ y $-\frac{3}{2}$ es vertical: tiene ∞ de pendiente.

Departamento de Matemáticas

3e $\boxed{f(x)=\sqrt{9+4x^2}}$

- Dominio de $f(x)$.

  $\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} : 9+4x^2 \geq 0\}$

la solución de la inecuación son todos los números reales.

  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$.

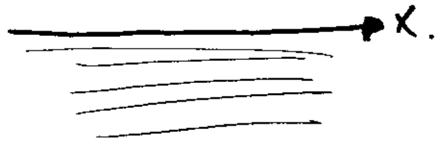
- Puntos de corte con los ejes.

  Eje Y: $x=0 \rightarrow f(0)=\sqrt{9}=3 \Rightarrow A=(0,3)$

  Eje X: $y=0 \rightarrow \sqrt{9+4x^2}=0 \rightarrow 4x^2+9=0 \rightarrow$ no tiene.

- Regiones.

  Es una función siempre positiva.



- Simetrías.

  $f(-x)=\sqrt{9+4(-x)^2}=\sqrt{9+4x^2}=f(x) \Rightarrow$ PAR.

- Puntos notables.

  1ª y 2ª derivada

$$f'(x)=\frac{8x}{2\sqrt{9+4x^2}}=\frac{4x}{\sqrt{9+4x^2}}.$$

$$f''(x)=\frac{4\cdot\sqrt{9+4x^2}-4x\cdot\frac{4x}{\sqrt{9+4x^2}}}{\left(\sqrt{9+4x^2}\right)^2}=\frac{4(9+4x^2)-16x^2}{(9+4x^2)\cdot\sqrt{9+4x^2}}$$

$$f''(x)=\frac{36}{(9+4x^2)\cdot\sqrt{9+4x^2}}.$$

Extremos: $f'=0 \rightarrow$

$$\frac{4x}{\sqrt{9+4x^2}} = 0 \rightarrow 4x=0 \rightarrow x=0.$$

$$f''(0) = \frac{36}{+\cdot+} > 0 \rightarrow \text{mínimo} \quad m = (0, f(0)) = (0,3)$$

Puntos de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{36}{(9+4x^2)\cdot\sqrt{9+4x^2}} = 0 \rightarrow 36=0 \rightarrow \text{no tiene solución: no tiene.}$$

• Monotonía.

Tabla con los valores que anulan a f' y los puntos de discontinuidad de f y f' (si los hubiera)

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

$$-1 \in (-\infty,0) : f'(-1) = \frac{4\cdot(-1)}{+} < 0$$

$$+1 \in (0,\infty) : f'(1) = \frac{4\cdot1}{+} > 0$$

• Curvatura

Tabla con los valores que anulan a f'' y los puntos de discontinuidad de f y f'' (si los hubiera)

Observa que en este caso f'' es siempre positiva. $\rightarrow$ es siempre convexa $\boxed{\cup}$

- Asíntotas

Verticales: no tiene.

Horizontales: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{9+4x^2} = +\infty$. $\rightarrow$ no tiene.

Oblicuas: $y = mx+n$.

$$\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{9}{x^2}+4} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \sqrt{9+4x^2} - 2x = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9+4x^2}-2x)\cdot(\sqrt{9+4x^2}+2x)}{\sqrt{9+4x^2}+2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{9+4x^2})^2-(2x)^2}{\sqrt{9+4x^2}+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{\sqrt{9+4x^2}+2x} = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2x}$$

$$\boxed{m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x} = -2 \quad (*)$$

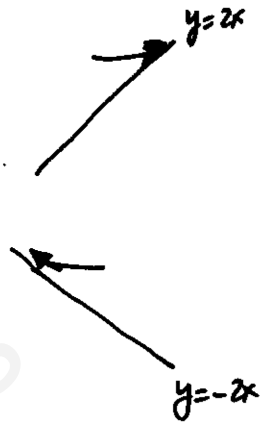
$$n' = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{9+4x^2}+2x = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{9+4x^2}+2x)\cdot(\sqrt{9+4x^2}-2x)}{\sqrt{9+4x^2}-2x} = \dots = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2x}$$

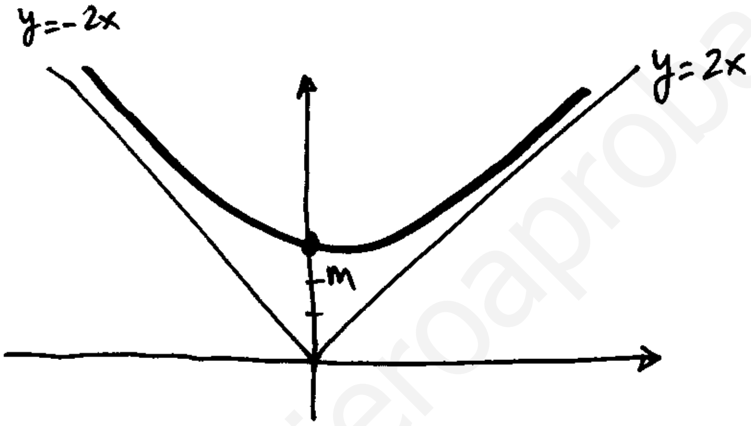
Posición relativa de la curva respecto de la asíntota.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9+4x^2}-2x = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{\sqrt{9+4x^2}+2x} = \frac{9}{+\infty} = +0$$



$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9+4x^2}-(-2x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{\sqrt{9+4x^2}-2x} = \frac{9}{+\infty} = +0$$

GRÁFICA



Observaciones:

(*) $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9+4x^2}}{x}$ el signo de la fracción es $\ominus$

$\sqrt{9+4x^2}$ es $\oplus$ si $x\to-\infty$.

x es $\ominus$ si $x\to-\infty$.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+4(-x)^2}}{\ominus x} = \lim_{x\to\infty} \ominus\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{4x^2}{x^2}} = -2.$$

(**) Debes observar que salvo en las funciones racionales el estudio de las asíntotas oblicuas exige hacer $\lim_{x\to\oplus\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $\lim_{x\to\ominus\infty} \frac{f(x)}{x}$

Es habitual OLVIDARSE del 2º límite.

3f

$$\boxed{f(x)=\sqrt{x^2-x}}$$

• Dominio de $f(x)$.

$\text{Dom} f(x) = \{x \in \mathbb{R} : x^2-x \geq 0\}$

Resolución de la inecuación:

$x^2-x \geq 0 \iff x\cdot(x-1)\geq 0$ (raíces: 0 y 1)

tabla de signos

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
x	$-$	0	$+$	1	$+$
$x-1$	$-$	-1	$-$	0	$+$
x^2-x	$+$	0	$-$	0	$+$

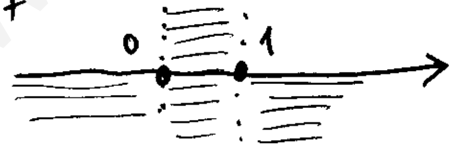
$\Rightarrow \text{Dom} f(x) = (-\infty,0]\cup[1,\infty)$

• Puntos de corte con los ejes.

Eje Y: $x=0 \rightarrow f(0)=0 \Rightarrow A=(0,0)$

Eje X: $y=0 \rightarrow \sqrt{x^2-x}=0 \iff x^2-x=0 \rightarrow x=0,\ x=1 \Rightarrow B=(1,0)$

• Regiones: $f(x)$ es positiva en todo su dominio, salvo en $x=0$ y $x=1$ que es nula.



• Simetrías.

$f(-x)=\sqrt{(-x)^2-(-x)}=\sqrt{x^2+x} \neq f(x)$ y $-f(x)$

No tiene simetrías.

- Puntos notables.

1^a y 2^a derivada

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{x-1/2}{\sqrt{x^2-x}}$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^2-x} - (x-1/2)\cdot\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}}{(\sqrt{x^2-x})^2} = \frac{2(\sqrt{x^2-x})^2 - (x-1/2)\cdot(2x-1)}{2\cdot\sqrt{x^2-x}\cdot(x^2-x)}$$

$$= \frac{2(x^2-x) - (x-1/2)\cdot 2(x-1/2)}{2(x^2-x)^{3/2}} = \frac{2x^2-2x-2x^2+2x-1/2}{2(x^2-x)^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{4\cdot(x^2-x)^{3/2}}$$

EXTREMOS: $f'=0 \rightarrow \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=1/2$

pero $1/2 \notin \text{Dom}\, f(x) \Rightarrow$ no tiene

PUNTOS DE INFLEXION: $f''=0 \rightarrow \frac{-1}{4(x^2-x)^{3/2}}=0 \rightarrow -1=0 \Rightarrow$ no tiene.

- Monotonía

Tabla con los valores para los cuales se anula la 1^a derivada.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$+$
f	$\searrow$	0	$\nexists$	0	$\nearrow$

$-3 \in (-\infty,0)$: $f'(-3) = \frac{-}{+} < 0$

$3 \in (1,\infty)$: $f'(3) = \frac{+}{+} > 0$

Observa que:

a) $(0,1)$ f no existe $\rightarrow$ tampoco existirá f'

b) $f'(0)$ no existe: $f'(0) = \frac{-1/2}{0}$
$f'(1)$ tampoco: $f'(1) = \frac{1/2}{0}$

pero sí existen $f(0)$ y $f(1)$, ambos valen $\underline{0}$.

- Curvatura

Tabla con los valores para los cuales se anula f'' y los puntos de discontinuidad de f'' y f.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$-$
f	cóncava $\cap$	0	$\nexists$	0	cóncava $\cap$

f'' es siempre negativa

- Asíntotas.

Verticales: no tiene.

Horizontales

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-x} = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{no tiene}$$

Oblicuas. $y = mx + n$

$(+\infty)$ $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$ $\boxed{m=1}$

$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - x\right) = (\infty - \infty) =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} = -\frac{1}{2}.$

$\Rightarrow \boxed{y = x - \frac{1}{2}}$

$(-\infty)$ $m' = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \left(\frac{\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2-(-x)}}{-x} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{-x} = \lim_{x\to\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow \boxed{m' = -1}$

$n' = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m'x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x} + x = (\infty - \infty) =$

$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}+x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x}-x\right)}{\sqrt{x^2-x}-x} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2-x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2-x}-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-(-x)}{\sqrt{(-x)^2-(-x)}-(-x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -x + \frac{1}{2}}$$

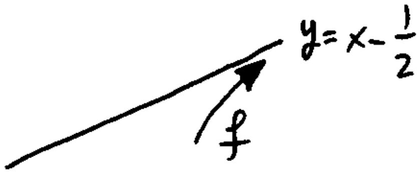
Posición relativa de la curva respecto de la asíntota.

Hemos de estudiar el signo de $f(x) - (mx+n)$

$+\infty$ $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x} - \left(x-\frac{1}{2}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-x}-(x-1/2)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2-x}+(x-1/2)\right]}{\sqrt{x^2-x}+(x-1/2)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-x)-(x-1/2)^2}{\sqrt{x^2-x}+(x-1/2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/4}{\sqrt{x^2-x}+(x-1/2)} = \frac{-}{+} = -0$$

$$x^2-x-(x-1/2)^2 = x^2-x-x^2+x-1/4$$



$-\infty$ $$\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-x} - (-x+1/2)\right] =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2-x}-(-x+1/2)\right]\cdot\left[\sqrt{x^2-x}+(-x+1/2)\right]}{\sqrt{x^2-x}+(-x+1/2)} =$$

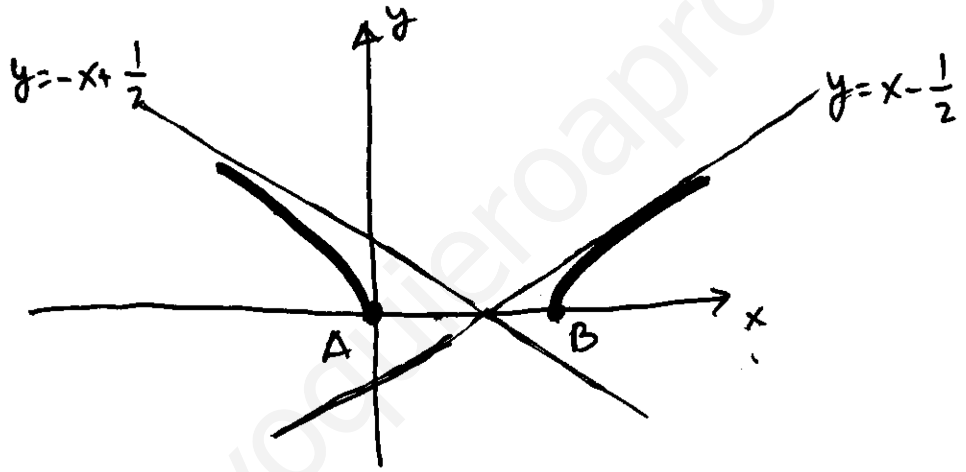
Departamento de Matemáticas

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-x-\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2-x}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-1/4}{\sqrt{x^2-x}+\left(-x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-}{+} = -0.$$

$$x^2-x-\left(-x+\tfrac{1}{2}\right)^2 = x^2-x-x^2+x-\tfrac{1}{4}$$

$y=-x+\frac{1}{2}$

GRÁFICA.



La posición relativa de la curva respecto de las asíntotas podría haberse deducido de modo más sencillo observando que f la curva es cóncava en todo su dominio y decreciente en $(-\infty,0)$ y creciente en $(0,\infty)$ y debe ir necesariamente "por debajo" de la asíntota tanto en $(+\infty)$ como en $(-\infty)$. El caso contrario ("ir por encima de la asíntota") es imposible.

4a

$$\boxed{f(x) = x \cdot e^{2x}}$$

- Dominio

  $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

  Es el producto de 2 funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

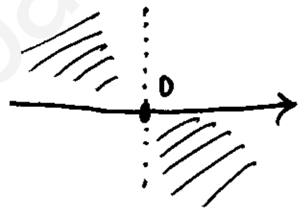
- Puntos de corte con los ejes.

  Eje X : $y = 0 \longrightarrow x \cdot e^{2x} = 0 \longrightarrow x = 0 \Longrightarrow A = (0,0)$

  Eje Y : $x = 0 \longrightarrow y = 0 \cdot e^{2 \cdot 0} = 0 \longrightarrow A$.

- Regiones.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	$-$	0	$+$



$-2 \in (-\infty, 0)$: $f(-2) = -2 \cdot e^{-4} < 0$

$2 \in (0, \infty)$ $\quad f(2) = 2 \cdot e^{4} > 0$

- Simetrías

  $f(-x) = -x \cdot e^{-2x} \neq f(x)$ y $-f(x) \Longrightarrow$ no tiene.

- Puntos notables.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + x \cdot 2 \cdot e^{2x} = (1+2x) \cdot e^{2x}$$

$$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} + (1+2x) \cdot 2 \cdot e^{2x} = [2 + (1+2x) \cdot 2] \cdot e^{2x} \Longrightarrow$$

$$f''(x) = (4 + 4x) \cdot e^{2x}$$

Condición de extremo : $f' = 0 \rightarrow$

$$(1+2x) \cdot e^{2x} = 0 \Longrightarrow 1 + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(4 + \frac{-4}{2}\right) \cdot e^{-2/2} = 2 \cdot e^{-1} > 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

$$m = \left(-\tfrac{1}{2}, f\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} \cdot e^{-1}\right) = (-0.5, -0.2)$$

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$(4+4x)\cdot e^{2x}=0 \Rightarrow 4+4x=0 \rightarrow x=-1$$

$$I=(-1, f(-1))=(-1, -e^{-2})=(-1, -0.14)$$

• Monotonía.

	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$

$$-3 \in (-\infty, -1/2) : f'(-3) = -5\cdot e^{-6} < 0$$

$$0 \in (-1/2, \infty) : f'(0) = 1. > 0$$

• Curvatura

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	cóncava $\cap$		convexa $\cup$

$$-2 \in (-\infty, -1) : f''(-2) = -4\cdot e^{-4} < 0$$

$$0 \in (-1, \infty) : f''(0) = 4 > 0$$

• Ramas.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x\cdot e^{2x} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{2x} = 0$$

- Asíntotas

VERTICALES. No tiene. Es continua en todo $\mathbb{R}$.

HORIZONTALES. $y=0$ en el $-\infty$.

OBLICUAS. puede haberla en el ∞.

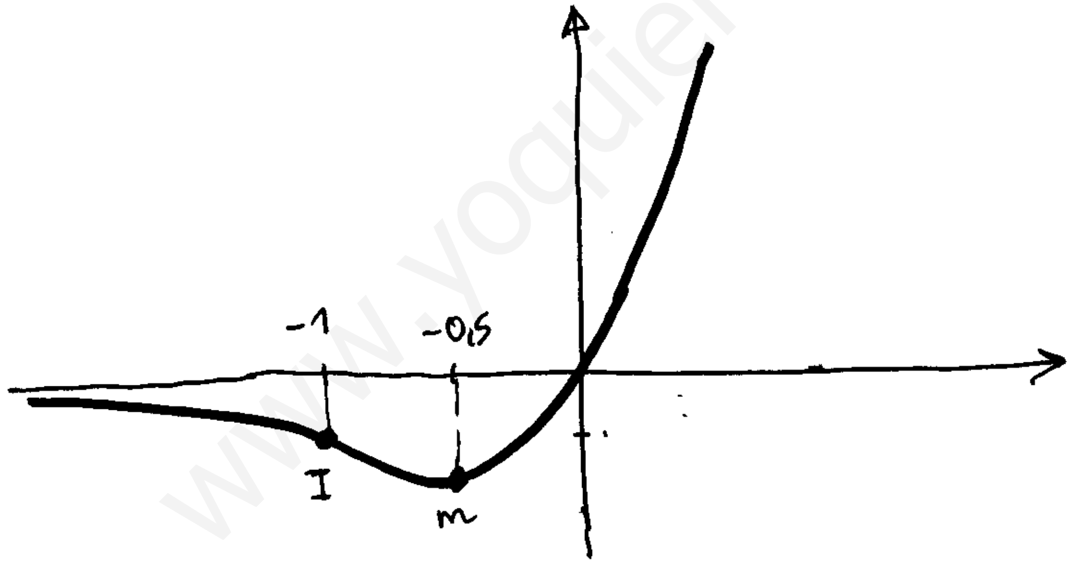
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot e^{2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{2x} = \infty \rightarrow \text{no tiene.}$$

Posición de la asíntota y la curva.

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x)-0) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{2x} = 0^- \quad (x<0 \text{ y } e^{2x}>0)$$

$-\infty$. $\longleftarrow$ $y=0$

GRÁFICA.



OBSERVACIÓN.

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{2x} = (-\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{e^{2x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) = \text{Regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{2\cdot e^{2x}} = 0.$$

$\boxed{4b}$

$$\boxed{f(x) = (x-1)\cdot e^x}$$

- Dominio de $f(x)$

  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

  Tanto $y = x-1$ como $y = e^x$ son funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Puntos de corte con los ejes:

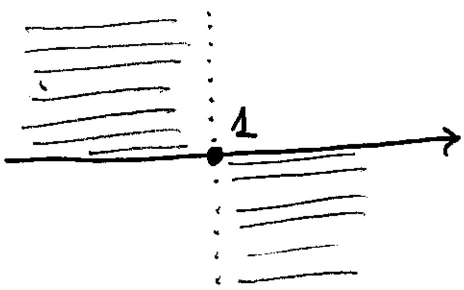
  Eje X: $y = 0 \rightarrow (x-1)\cdot e^x = 0 \rightarrow x-1=0 \rightarrow x=1 \Rightarrow \boxed{A=(1,0)}$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = -1\cdot e^{-1} = \frac{-1}{e} \simeq -0{,}4 \rightarrow \boxed{B = \left(0, \frac{-1}{e}\right)}$

- Regiones.

  Tabla con el signo de $f(x)$. Se divide el eje real con los valores que anulan a $f(x)$ y sus puntos de discontinuidad.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$



$0 \in (-\infty, 1)$: $f(0) = \frac{-1}{e} < 0$

$2 \in (1, \infty)$: $f(2) = 1\cdot e^2 > 0$

- Simetrías.

  $f(-x) = (-x-1)\cdot e^{-x} \neq f(x)$ y $-f(x) \Rightarrow$ no es simétrica.

- Puntos notables.

  DERIVADAS

  $f'(x) = 1\cdot e^x + (x-1)\cdot e^x = x\cdot e^x$

  $f''(x) = 1\cdot e^x + x\cdot e^x = (1+x)\cdot e^x$.

Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow$

$x \cdot e^x = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(0) = (1+0)\cdot e^0 > 0 \rightarrow$ mínimo $\boxed{m = (0, f(0)) = \left(0, \frac{-1}{e}\right)}$

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$(1+x)\cdot e^x = 0 \rightarrow 1+x=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} I = (-1, f(-1)) \\ f(-1) = -2\cdot e^{-1} \end{array}\right\} \boxed{I = \left(-1, \frac{-2}{e}\right)}$

• Monotonía.

Tabla con los puntos de discontinuidad de f y f' y los valores que anulan a f'

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	Mín.	$\nearrow$

$-1 \in (-\infty, 0)$: $f'(-1) = -1\cdot e^{-1} < 0$

$2 \in (0, \infty)$: $f'(2) = 2\cdot e^2 > 0$

• Curvatura

Tabla con los puntos de discontinuidad de f y f'' y los valores que anulan a f''.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	cóncava $\cap$	I.	convexa $\cup$

$-3 \in (-\infty, -1)$: $f''(-3) = (-2)\cdot e^{-3} < 0$

$0 \in (-1, \infty)$: $f''(0) = 1\cdot e^0 > 0$

• Asíntotas.

VERTICALES: no tiene por ser continua en $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

HORIZONTALES:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x-1)\cdot e^x = (\infty\cdot\infty) = \infty \rightarrow \text{no tiene.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)\cdot e^x = (-\infty\cdot 0) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{e^{-x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \underset{\text{Regla de L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \left(\frac{1}{-\infty}\right) = 0$$

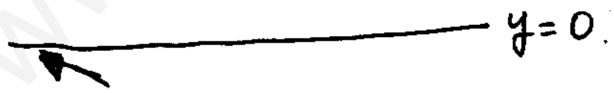
Hay una asíntota horizontal ($y=0$) en el $-\infty$.

Posición de la curva respecto de la asíntota

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - 0) = \lim_{x\to\infty} (x-1)\cdot e^x \underset{(*)}{=} -0.$$

(*) el límite es 0

el signo es negativo porque $\begin{cases} x-1 \text{ es } \ominus \text{ en } (-\infty) \\ e^x \text{ es } \oplus \text{ siempre.} \end{cases}$ $\ominus\cdot\oplus = -$



OBLICUAS

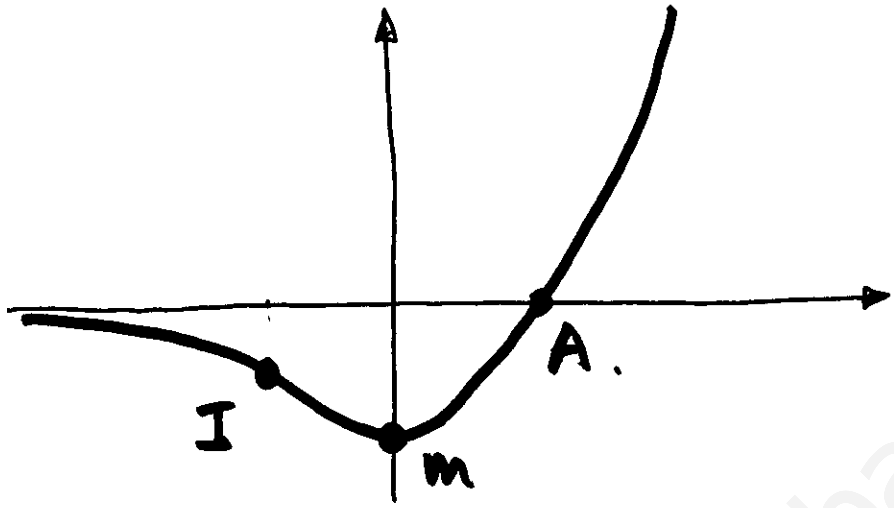
En $x = -\infty$ no tiene por haber una horizontal.

En $x = \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)\cdot e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x}\cdot e^x = 1\cdot\infty = \infty$$

$\Rightarrow$ no tiene.

GRÁFICA.



OBSERVACIONES

- ecuaciones del tipo $(ax+b)\cdot e^x = 0$.

  $e^x \neq 0$ (una exponencial nunca es CERO) $\rightarrow ax+b=0$

  Un producto es nulo si es nulo al menos un factor

- cuando hay funciones exponenciales, el comportamiento en el ∞ (ramas y asíntotas horizontales) hay que hacerlo en los 2 lugares: $\boxed{+\infty}$ y $\boxed{-\infty}$.

4c

$$\boxed{f(x)=\ln(x^2-1)}$$

- Dominio de $f(x)$.

Dom $f(x) = \{x \in \mathbb{R} : x^2-1>0\}$.

Resolvamos la inecuación $x^2-1>0 \Leftrightarrow \boxed{(x+1)\cdot(x-1)>0}$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$x+1$	$-$	0	$+$	2	$+$
$x-1$	$-$	-2	$-$	0	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$

Dom $f(x) = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

- Puntos de corte con los ejes.

Eje X: $y=0 \rightarrow \ln(x^2-1)=0 \rightarrow x^2-1=1 \rightarrow x^2=2 \rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

$$\boxed{A=(\sqrt{2},0) \text{ y } B=(-\sqrt{2},0)}$$

Eje Y: $x=0$, $0 \notin$ Dom $f(x) \rightarrow$ no tiene.

- Regiones.

Puntos de discontinuidad de f y valores que anulan a f.

$-\sqrt{2}$ -1 1 $\sqrt{2}$

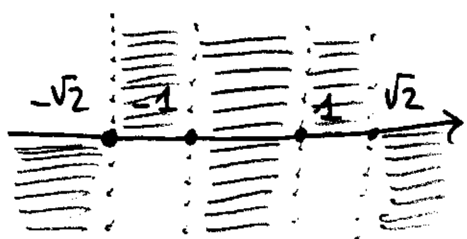
f $+$ 0 $-$ $\nexists$ $\nexists$ $\nexists$ $-$ 0 $+$

$-2 \in (-\infty,-\sqrt{2})$: $f(-2)=\ln 3>0$

$-1{,}2 \in (-\sqrt{2},-1)$: $f(-1{,}2)=\ln 0{,}44<0$

$1{,}2 \in (1,\sqrt{2})$: $f(1{,}2)=\ln 0{,}44<0$

$2 \in (\sqrt{2},\infty)$: $f(2)=\ln 3>0$



• Simetrías

$f(-x) = \ln\left[(-x)^2-1\right] = \ln(x^2-1) = f(x) \rightarrow \boxed{\text{PAR}}$. Es simétrica respecto del eje OY.

• Puntos notables.

DERIVADAS

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot(x^2-1) - 2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}.$$

Condición de extremo: $f' = 0 \rightarrow$

$\frac{2x}{x^2-1} = 0 \longrightarrow 2x = 0 \longrightarrow x = 0 \notin \text{Dom } f(x)$: NO TIENE.

Condición de punto de inflexión: $f'' = 0 \rightarrow$

$\frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2} = 0 \longrightarrow -2x^2-2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2+2 = 0 \rightarrow$ no tiene solución.

• Monotonía:

Tabla con los puntos de discontinuidad de f y f' y los valores que anulan a f'

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
f'	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$\nexists$: no existe.

$-3 \in (-\infty,-1)$: $f'(-3) = \frac{-6}{8} < 0$

$3 \in (1,\infty)$: $f'(3) = \frac{6}{8} > 0$

- Curvatura:

Tabla con los puntos de discontinuidad de f y f'' y los valores que anulan a f''.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
f''	$-$	$\nexists$	$-$
f	cóncava $\cap$	$\nexists$	cóncava

$-2 \in (-\infty,-1)$: $f''(-2) = \dfrac{-12}{+} < 0$

$2 \in (1,\infty)$: $f''(2) = \dfrac{-12}{+} < 0$

- Asíntotas

VERTICALES: $(x=a)$

Tiene 2. $x=-1$ y $x=1$.

Posición de la curva: SÓLO tiene sentido una posición en cada asíntota:

$\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x^2-1) = -\infty.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1}} \ln(x^2-1)$ no existe pues $1^- \notin \text{Dom } f(x)$

X=1

$\lim\limits_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} \ln(x^2-1)$ no existe pues $-1^+ \notin \text{Dom } f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \ln(x^2-1) = -\infty.$

X=−1

HORIZONTALES $(y=b)$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \ln(x^2-1) = \infty \rightarrow \text{no tiene.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2-1) = \infty \rightarrow \text{no tiene.}$$

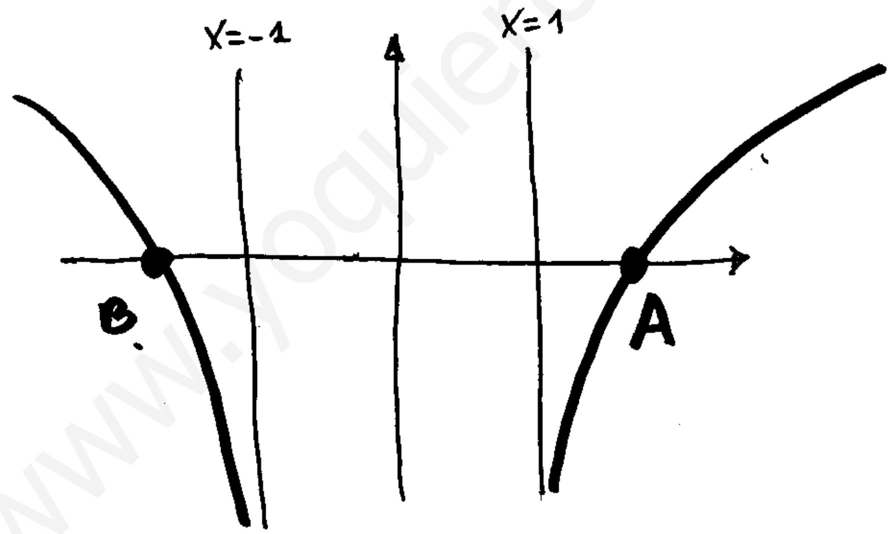
OBLICUAS $(y=mx+n)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = 0$$

Regla de L'Hôpital

NO TIENE.

• GRÁFICA



$\boxed{4d}$

$$\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$$

- Dominio.

  Es una función exponencial $\text{Dom} f(x) = \mathbb{R}$.

- Simetrías

  $$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x) \longrightarrow \text{PAR}.$$

  Es simétrica respecto del eje de las ordenadas.

- Puntos notables

  $$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

  $$f''(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) + e^{-x^2} \cdot (-2) = e^{-x^2} \cdot [4x^2 - 2].$$

  Condición de extremo : $f' = 0 \rightarrow$

  $$e^{-x^2} \cdot (-2x) = 0 \longrightarrow -2x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0}$$

  $e^{-x^2} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

  $$f''(0) = e^{-0} \cdot (4 \cdot 0^2 - 2) = 1 \cdot (-2) < 0 \longrightarrow \text{Máximo}$$

  $$\left.\begin{array}{l} M = (0, f(0)) \\ f(0) = e^{-0^2} = 1 \end{array}\right\} \boxed{M = (0,1)}$$

  Condición de punto de inflexión : $f'' = 0 \rightarrow$

  $$e^{-x^2} \cdot (4x^2 - 2) = 0 \longrightarrow 4x^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

  $$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

  $$I_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

  $$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = e^{-1/2} = 0{,}60653\ldots \simeq 0{,}6$$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707\ldots \Rightarrow I_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right) \approx (0.7, 0.6)$

Por paridad $\Rightarrow I_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right) \approx (-0{,}7, 0.6)$

• Monotonía

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	↗	Máximo	↘

$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$

El signo lo proporciona x pues e^{-x^2} es SIEMPRE positivo.

$-3 \in (-\infty, 0)$: $f'(-3) = -2 \cdot (-3) = +$

$5 \in (0, \infty)$: $f'(5) = -2 \cdot (5) = -$

• Curvatura

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	convexa	punto de inflexión	cóncava	punto de inflexión	convexa

Como es una función continua los signos de la 2ª derivada van alterno → basta con averiguarlo en uno de los intervalos.

$0 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $f''(0) = e^{-0} \cdot (4 \cdot 0^2 - 2) = -$

• Asíntotas.

VERTICALES

No tiene porque es una función continua en todo $\mathbb{R}$.

HORIZONTALES

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = (e^{-\infty}) = 0. \to \boxed{y=0}$$

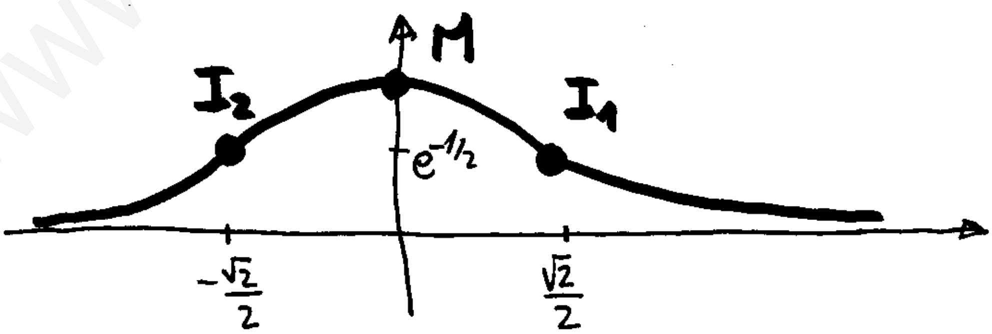
Por simetría (PAR) $\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0.$

Posición de la curva frente a la asíntota: $\lim_{x \to \infty} (e^{-x^2} - 0) = 0^+$

OBLÍCUAS.

No tiene por tener asíntota horizontal.

GRÁFICA



4e

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}}$$

- Dominio

  $\text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$

  Es una suma de funciones exponenciales.

- Puntos de corte con los ejes.

  Eje X: $y=0 \rightarrow e^{x}+e^{-x}=0$ no tiene, pues e^{x} y e^{-x} son estrictamente positivos.

  Eje Y: $x=0 \rightarrow y=\frac{1+1}{2}=1 \Rightarrow A=(0,1)$.

- Regiones.

  La gráfica está siempre por encima del eje horizontal.

- Simetrías

  $$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x) \Rightarrow \text{PAR: el eje OY}$$

  es un eje de simetría de la función.

- Puntos notables.

  DERIVADAS

  $$f'(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad f''(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}.$$

  Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow$

  $$\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}=0 \rightarrow e^{x}-e^{-x}=0 \rightarrow e^{x}=e^{-x} \Rightarrow x=-x \rightarrow \boxed{x=0}$$

  $$f''(0)=\frac{2}{2}>0 \rightarrow \text{mínimo } \boxed{m=(0,f(0))=(0,1)}$$

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=0 \rightarrow e^x+e^{-x}=0 \rightarrow$ no tiene solución: no hay puntos de inflexión.

• Monotonía.

Tabla con los puntos extremos, y los de discontinuidad de f y f'.

	$(-\infty,0)$	0	$(0,\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

$-2\in(-\infty,0)$: $f'(-2)=\frac{e^{-2}-e^{2}}{2}=\frac{-}{+}<0$.

$e^{-2}<1$ y $e^{2}>1$.

$2\in(0,\infty)$: $f'(2)=\frac{e^{2}-e^{-2}}{2}=\frac{+}{-}>0$

• Curvatura.

Tabla con los puntos de inflexión y de discontinuidad de f y f''.

	$(-\infty,\infty)$
f''	$+$
f	convexa $\cup$

$0\in(-\infty,\infty)$: $f''(0)=\frac{1+1}{2}>0$

• Ramas

$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\left(\frac{\infty+0}{2}\right)=\infty$ • $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=\left(\frac{0+\infty}{2}\right)=\infty$.

Recuerda:

$$e^{\infty} \to \infty \qquad e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} \to 0.$$

- Asíntotas.

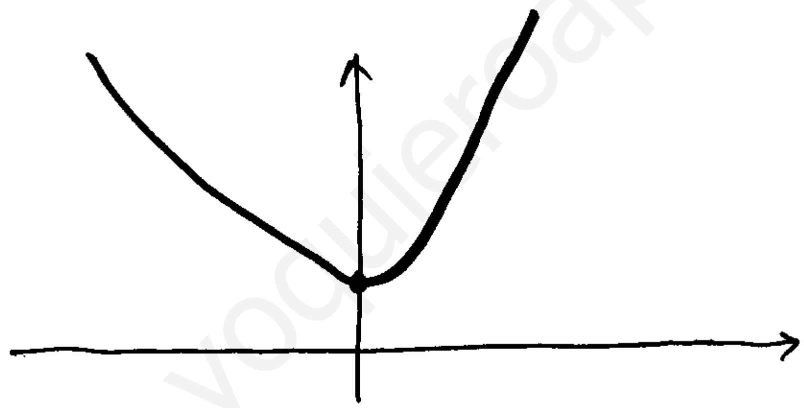
No tiene verticales ni horizontales.

Oblicuas $y = mx+n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\left(\text{Regla de L'Hôpital}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{2} = +\infty. \to \text{no tiene.}$$

- GRÁFICA.



Esta curva se denomina

CATENARIA.

Es la forma de los cables de la luz, de las cuerdas de tender la ropa, ...

La curva $\boxed{1f}$ $f(x) = \dfrac{e^{x/a}+e^{-x/a}}{2}$ está modulada por el parámetro a. Te recomiendo que con la calculadora WIRIS u otro programa informático dibujes varias catenarias.

$\boxed{4g}$ $\boxed{f(x) = x \cdot e^{-2x}}$

- $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

  Es el producto de 2 funciones continuas en todo $\mathbb{R}$.

- Puntos de corte con los ejes.

  Eje X : $y = 0 \rightarrow x \cdot e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \rightarrow A = (0,0)$

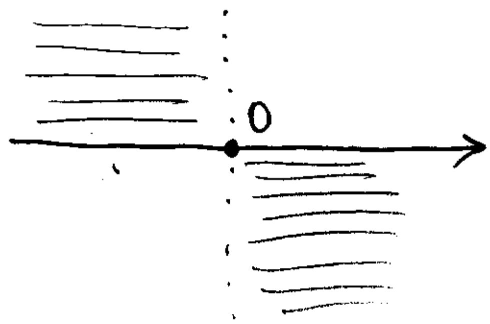
  Eje Y : $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow A$.

- Regiones.

  Se trata de estudiar el signo de $f(x)$ en todo el dominio.

Tabla con los valores que anulan a $f(x)$.

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$



$-3 \in (-\infty, 0)$: $f(-3) = -3 \cdot e^{+6} < 0$

$3 \in (0, \infty)$: $f(3) = 3 \cdot e^{-6} > 0$

- Simetrías.

  $f(-x) = -x \cdot e^{-2 \cdot (-x)} = -x \cdot e^{2x} \neq f(x)$ y $-f(x)$

  no tiene simetrías.

- Puntos notables.

  1ª y 2ª derivada

  $f'(x) = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = (1 - 2x) \cdot e^{-2x}$

$$f''(x) = -2\cdot e^{-2x} + (1-2x)\cdot e^{-2x}\cdot(-2) = (-2-2+4x)\cdot e^{-2x}$$

$$f''(x) = (-4+4x)\cdot e^{-2x}.$$

Extremos.

Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow (1-2x)\cdot e^{-2x} = 0 \iff$

$1-2x=0 \rightarrow x = 1/2.$

$$f''(1/2) = \left(-4+4\cdot\tfrac{1}{2}\right)\cdot e^{-2\cdot 1/2} = \underbrace{-2}_{-}\cdot\underbrace{e^{-1}}_{+} < 0 \rightarrow \text{máximo}$$

$M = \left(1/2, f(1/2)\right)$

$$f(1/2) = \frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot e^{-1} = \frac{1}{2e} \simeq 0{,}18.$$

Puntos de inflexión.

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow (-4+4x)\cdot e^{-2x} = 0$

$\iff -4+4x=0 \rightarrow x=1.$

$I = (1, f(1))\cdot$

$$f(1) = 1\cdot e^{-2\cdot 1} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}13$$

- Monotonía.

Se trata de estudiar el signo de la 1ª derivada. Tabla con los valores que anulan a $f'(x)$ y los puntos de discontinuidad de f y f'.

	$(-\infty, 1/2)$	$1/2$	$(1/2, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	↗	Máx.	↘

$0 \in (-\infty, 1/2): f'(0) = 1 > 0$

$2 \in (1/2, \infty): f'(2) = -3\cdot e^{-6} < 0$

• Curvatura

Se trata de estudiar el signo de la 2ª derivada. Tabla con los valores que anulan a f'' y los puntos de discontinuidad de f y f'' (si los hubiera).

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	−	0	+
f	cóncava ∩	Inflex.	convexa ∪

$0 \in (-\infty, 1) : f''(0) = -4 < 0$

$2 \in (1, \infty) : f''(2) = 4 \cdot e^{-4} > 0$

• Asíntotas.

Verticales: no tiene porque es continua en $\mathbb{R}$.

Horizontales: $y = b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x \cdot e^{-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

aplicando la Regla de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2 \cdot e^{2x}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0 \rightarrow \boxed{y = 0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-2x} = (-\infty \cdot e^{\infty}) = -\infty \rightarrow \text{no tiene.}$$

Posición relativa de la curva respecto de la asíntota.

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - b] = \lim_{x\to\infty} (x \cdot e^{-2x} - 0) = +0. \qquad \longrightarrow y = 0$$

Observa que el signo de $x \cdot e^{-2x}$ es positivo si $x > 0$.

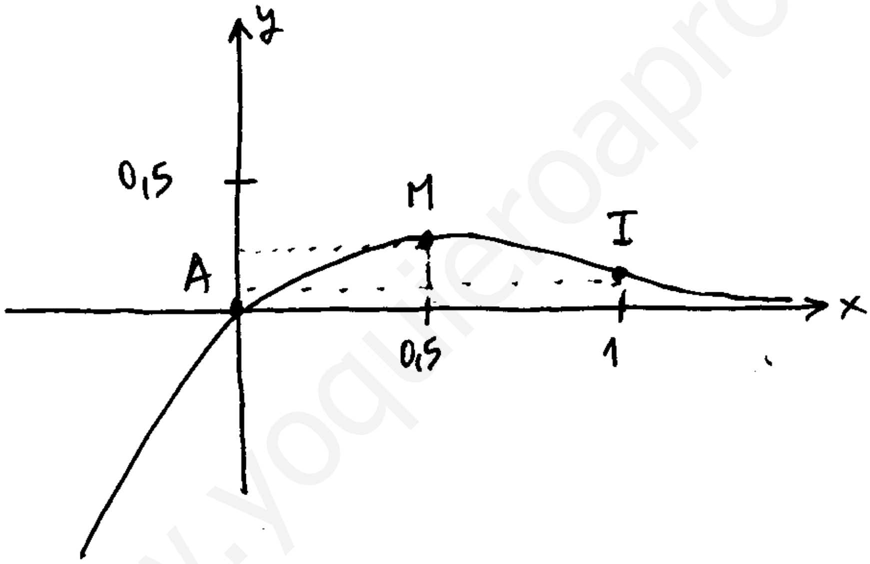
Oblicuas.

En $x \to \infty$ no hay porque tenemos una asíntota horizontal.

En $x \to -\infty$. : $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \cdot e^{-2x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty \to \text{no tiene.}$$

GRÁFICA.



4h

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

- Dominio de $f(x)$

$$\text{Dom } f(x) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{1+x} > 0 \right\}$$

Para resolver la inecuación se buscan los ceros de los factores y se estudia el signo según la tabla.

ceros: $1-x=0 \rightarrow x=1$ $\quad 1+x=0 \rightarrow x=-1$.

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$1-x$	+	2	+	0	−
$1+x$	−	0	+	2	+
$\frac{1-x}{1+x}$	−	$\nexists$	+	0	−

$\nexists$: no existe.

La solución de la inecuación nos da el dominio.

$$\text{Dom } f(x) = (-1,1).$$

- Puntos de corte con los ejes.

Eje X: $y=0 \rightarrow \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=0 \rightarrow \frac{1-x}{1+x}=1 \rightarrow x=0$. $\boxed{A=(0,0)}$

Eje Y: $x=0 \rightarrow \ln 1 = 0 \rightarrow A$.

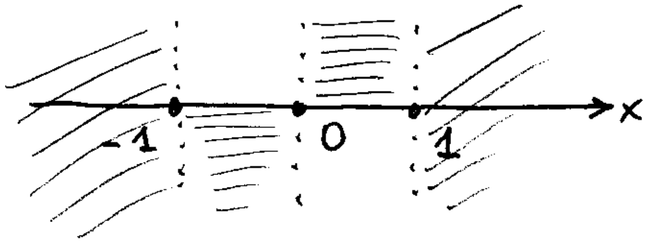
- Regiones:

Tabla con los puntos que anulan a la función ($x=0$) y de discontinuidad $(-1,1)$.

	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
$f(x)$	+	0	−

$-0{,}5 \in (-1,0): \; f(-0.5) = \ln\left(\frac{3/2}{1/2}\right) = \ln(3) > 0.$

$0{,}5 \in (0,1): \; f(0{,}5) = \ln\left(\frac{1/2}{3/2}\right) = \ln(1/3) < 0.$



• Simetrías

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-(-x)}{1+(-x)}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -f(x)$$

Es una función IMPAR: simétrica respecto del origen de coordenadas.

• Puntos notables.

DERIVADAS

Recuerda alguna propiedad de los logaritmos.

$$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B.$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1-x)\cdot(1+x)} = \frac{-2}{1-x^2}.$$

$$f''(x) = \frac{+2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{-4x}{(1-x^2)^2}.$$

Condición de extremo: $f'(x) = 0 \longrightarrow$

$$\frac{-2}{1-x^2} = 0 \longrightarrow -2 = 0 \Rightarrow \text{no tiene extremos.}$$

Condición de punto de inflexión: $f''(x)=0 \rightarrow$

$$\frac{-4x}{(1-x^2)^2}=0 \rightarrow -4x=0 \longrightarrow x=0 \Rightarrow \boxed{I=(0,f(0))=(0,0)}$$

• Monotonía.

Tabla con los extremos de f y los puntos conflictivos de f y f'.

	-1	$(-1,1)$	1
f'	$\nexists$	$-$	$\nexists$
f	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$

$0 \in (-1,1)$: $f'(0)=\frac{-2}{1}<0$

• Curvatura.

Tabla con los puntos de inflexión y los puntos conflictivos de f y f''.

	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
f''	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$
f	$\nexists$	convexa $\cup$	0	cóncava $\cap$	$\nexists$

$-0{,}5 \in (-1,0)$: $f''(-0{,}5)=\frac{+}{+}>0$

$0{,}5 \in (0,1)$: $f''(0{,}5)=\frac{-}{+}<0$

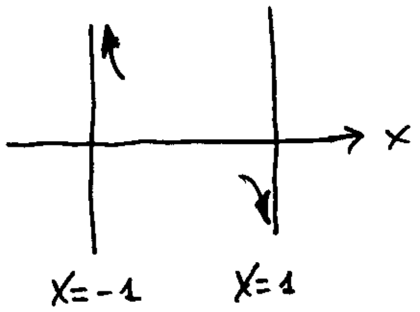
• Asíntotas: $(x=a)$

VERTICALES: puede haberlas en $x=1$ y $x=-1$.

Dado que el dominio de $f(x)$ es $(-1,1)$ sólo podemos estudiar el comportamiento en -1^+ y 1^-, pues en -1^- y 1^+ no está definida la función.

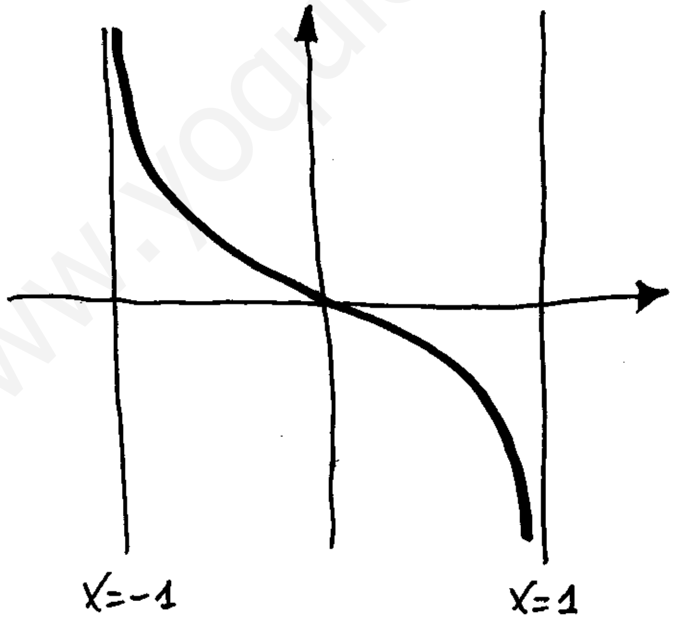
$$\lim_{x \to -1^+} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \left(\frac{2}{0^+}\right) = +\infty \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \left(\frac{0^+}{2}\right) = -\infty \rightarrow x = 1 \text{ es otra asíntota vertical.}$$



HORIZONTALES Y OBLICUAS: no tiene porque no hay comportamiento en $x \to \infty$ (no hay función).

GRÁFICA.



4i

$$\boxed{f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot e^x}$$

- Dominio de $f(x)$.

  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

  No hay ninguna restricción para $\sqrt[3]{x}$ ni para e^x.

- Puntos de corte con los ejes.

  Eje X: $y = 0 \rightarrow \sqrt[3]{x} \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \rightarrow x = 0$

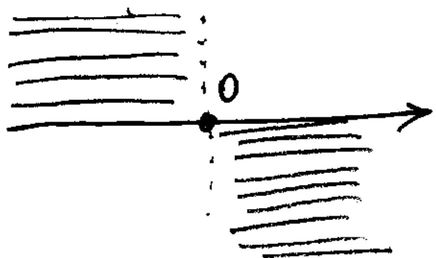
  $A = (0,0)$

  Eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow A$.

- Regiones

  Estudiemos el signo de $f(x)$. Tabla con los valores que anulan a $f(x)$ y sus puntos de discontinuidad (si los hubiere).

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f	$-$	0	$+$



$-1 \in (-\infty, 0)$: $f(-1) = \sqrt[3]{-1} \cdot e^{-1} = -e^{-1} < 0$

$+1 \in (0, \infty)$: $f(1) = \sqrt[3]{1} \cdot e^{1} = e > 0$

- Simetrías

  $f(-x) = \sqrt[3]{-x} \cdot e^{-x} = -\sqrt[3]{x} \cdot e^{-x} \neq f(x)$ y $-f(x)$

  no es simétrica.

• Puntos notables

Se calculan la 1ª y 2ª derivada.

Una de las dificultades de este problema es lo farragosas que resultan las simplificaciones de las derivadas. Observa y trata de seguir los pasos, van indicados.

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot e^x + \sqrt[3]{x} \cdot e^x = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\right) \cdot e^x$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot e^x = \frac{1+3x}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot e^x \quad \text{(racionalizando)}$$

$$= \frac{(1+3x) \cdot e^x \cdot \sqrt[3]{x}}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{(1+3x) \cdot \sqrt[3]{x} \cdot e^x}{3x}}$$

Para la 2ª derivada voy a emplear la 2ª expresión de $f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\right) \cdot e^x$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{-2}{3} \cdot x^{-2/3-1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) \cdot e^x + \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\right) \cdot e^x$$

$$= \left(\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\right) \cdot e^x$$

observa: $\sqrt[3]{x^5} = x \cdot \sqrt[3]{x^2}$

$$f''(x) = \left(\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\right) \cdot e^x$$

Racionalizando:

$$\frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}} = \frac{-2}{9x\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{-2\sqrt[3]{x}}{9x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{x}}{3x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-2\cdot\sqrt[3]{x}}{9x^2} + \frac{2\sqrt[3]{x}}{3x} + \sqrt[3]{x} \right)\cdot e^x$$

Se extrae factor común a $\sqrt[3]{x}$

$$f''(x) = \left(\frac{-2}{9x^2} + \frac{2}{3x} + 1 \right)\cdot \sqrt[3]{x}\cdot e^x = \frac{-2+6x+9x^2}{9x^2}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{(9x^2+6x-2)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot e^x}{9x^2}}$$

Condición de extremo: $f'=0 \rightarrow$

$$\frac{(1+3x)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot e^x}{3x} = 0 \rightarrow (1+3x)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot e^x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1+3x=0 \\ \sqrt[3]{x}=0 \end{cases}$$

tenemos 2 posibles soluciones:

$1+3x=0 \rightarrow x=\frac{-1}{3}$ y $\sqrt[3]{x}=0 \rightarrow x=0$.

Observa que $x=0$ no es posible pues $\mathrm{Dom}\, f'(x) = \mathbb{R}-\{0\}$. La 1ª derivada no existe para $x=0$. (es una fracción algebraica de denominador $3x$).

Veamos que valor toma la 2ª derivada

$f''(-1/3)$

Observa que el signo de la $f''(-1/3)$ viene dado por el de

$9x^2+6x-2 = 9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-2 = 1-3-2<0$ y

$\sqrt[3]{-1/3}<0$

pues e^x y $9x^2$ son positivas. $\Rightarrow f''(-1/3) = - \cdot - > 0 \Rightarrow$ mínimo.

$m = \left(-1/3, f(-1/3)\right)$

$f(-1/3) = \sqrt[3]{-\frac{1}{3}}\cdot e^{-1/3} \simeq -0{,}496.$

Condición de punto de inflexión: $f''=0 \rightarrow$

$$\frac{(9x^2+6x-2)\cdot\sqrt[3]{x}\cdot e^x}{9x^2} = 0 \rightarrow 9x^2+6x-2=0 \rightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot9\cdot(-2)}}{2\cdot9}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{108}}{18} = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{3}.$$

$$I = \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)\right) \simeq (-0.91, -0.38)$$

$$I' = \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)\right) \simeq (0.24, 0.79)$$

- Monotonía

Se trata de estudiar el signo de la 1ª derivada; se completa la tabla con los valores que anulan a f' $(-1/3)$ y los puntos de discontinuidad de f (no tiene) y f' (0).

	$(-\infty, -1/3)$	$-1/3$	$(-1/3, 0)$	0	$(0, \infty)$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\searrow$	mínimo	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$\nexists$: no existe.

$-5 \in (-\infty, -1/3)$: $f'(-5) = \dfrac{-14 \cdot - \cdot +}{-} = -$

$-0{,}1 \in (-1/3, 0)$: $f'(0.1) = \dfrac{+0.7 \cdot - \cdot +}{-} = +$

$3 \in (0, \infty)$: $f'(3) = \dfrac{10 \cdot + \cdot +}{+} = +$

Para hacerlo más sencillo:

e^x siempre positivo.

$3x$ y $\sqrt[3]{x}$ tienen el mismo signo $\Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3x}$ positivo.

$\Rightarrow$ el signo de $f'(x)$ es el signo de $3x+1$.

- Curvatura

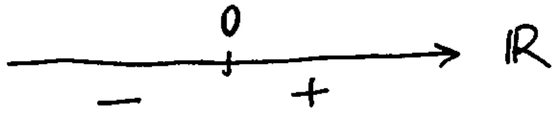
Se trata de estudiar el signo de la 2ª derivada; se completa la tabla con los valores que anulan a f'' $\left(\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}\right)$ y los puntos de discontinuidad de f (no tiene) y f'' (0).

	$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{-1-\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{3}, 0\right)$	0	$\left(0, \frac{-1+\sqrt{3}}{3}\right)$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{3}$	$\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
f''	+	0	−	$\nexists$	−	0	+
f	convexa $\cup$	I	cóncava $\cap$	0	cóncava $\cap$	I'	convexa $\cup$

El signo de la 2ª derivada lo proporcionan $(9x^2+6x-2)$ y $\sqrt[3]{x}$ pues $9x^2$ y e^x son positivos.

Voy a completar la tabla de un modo diferente al habitual (que es tomar un valor cualquiera de cada intervalo y calcular su valor, así se tendrá el signo).

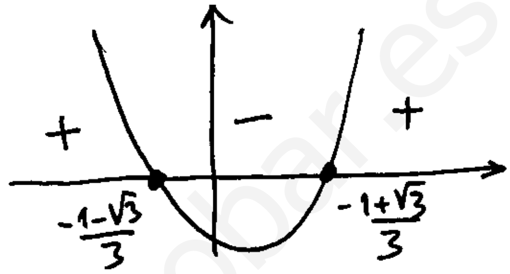
El signo de $\sqrt[3]{x}$ es el de x, es decir.

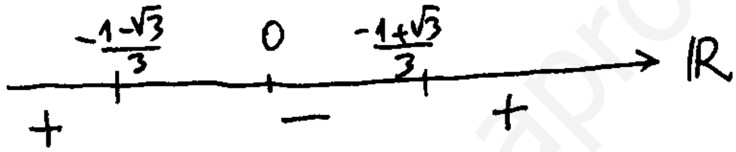


El signo de $9x^2+6x-2$ lo estudiaremos mediante la gráfica de la parábola $y=9x^2+6x-2$.

Ramas $a=9>0$ positivas

Raíces: $-\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$ y $-\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}$





Combinando ambas condiciones sobre el signo de x podrás completar la tabla de la página 5.

- Asíntotas

  Verticales: no tiene. Dom $f(x)=\mathbb{R}$.

  Horizontales: $y=a$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x}\cdot e^x = (\infty\cdot\infty) = \infty \rightarrow \text{no tiene.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x}\cdot e^x = (-\infty\cdot 0) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{e^{-x}} = \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$

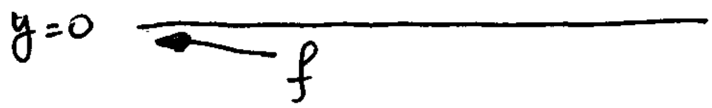
aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-3\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

Posición relativa de la curva respecto de la asíntota. Se trata de estudiar el signo de $[f(x)-a]$. En nuestro caso:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x}\cdot e^{x}-0\right) = -0$$

es negativo porque $\sqrt[3]{x}$ es <0 y e^{x} es >0.



Oblicuas:

En $x\to-\infty$ no tiene pues tenemos una horizontal.

En $x\to\infty$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot e^{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\cdot e^{x}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{x}}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{\sqrt[3]{x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

aplicando la regla de L'Hôpital: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}}{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3\sqrt[3]{x}\cdot e^{x}}{2}=\infty$

no tiene.

GRÁFICA