Aplicaciones de la derivada

1º. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2-5x+6$ paralela a la recta $3x+2y-2=0$.

2º. Deduce la función derivada aplicando la definición de derivada de una función en un punto.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ b) $f(x)=\sqrt{x}$ c) $f(x)=\sqrt{x+1}$

d) $f(x)=x^3$ e) $f(x)=\ln x$ f) $f(x)=\operatorname{sen}x$

g) $f(x)=\cos x$ h) $f(x)=\operatorname{arctg}x$ i) $f(x)=\operatorname{arcsen}x$

j) $f(x)=\arccos x$

3º Aplicando la definición calcula la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$ en el punto de abscisa x=5.

4º Calcular el valor de k para que la curva de ecuación $f(x)=x^3+6x^2-kx+4$ tenga la recta tangente en el punto de abscisa $x=3$ paralela a la recta $3x-2y+6=0$.

5º Aplicando la definición calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\dfrac{-2}{x+3}$ en el punto de abscisa x=2.

6º Aplicando la definición calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\sqrt{2x+1}$ en el punto de abscisa x=3.

7º Se considera la parábola: $y=x^2-4x-2$.

a) Halla la función derivada aplicando la definición.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x=1.
c) Halla el punto de la curva en que su recta tangente es paralela a la recta y=3x−1
d) ¿En qué punto la derivada es 0?
e) ¿Qué significado tiene el punto encontrado en el apartado anterior?

8º Aplicando la definición calcula la derivada calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=-2x^2+3x-5$ en el punto de abscisa x=5.

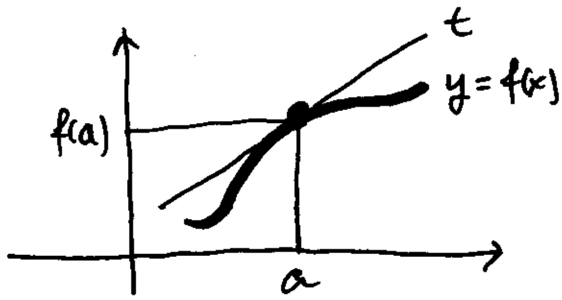
9º ¿En que punto de la curva $f(x)=-3x^2+5x$ su recta tangente es paralela a la recta $r:2x-y+3=0$?

10º Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=x^2-5x+6$ perpendicular a la recta $3x+2y-2=0$.

11º Calcula los puntos en los que la tangente a la curva $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+1$ es paralela a la recta $y=5x+3$.

12º Halla **a** y **b** para que la función $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ tenga extremos en los puntos x_1=1 y x_2=2. Para esos valores de a y de b, ¿qué tipo de extremos tiene la función en 1 y 2?

1º Recuerda la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.



$\boxed{t: \ y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a).}$

recta tangente a $y = f(x)$ en $P = (a, f(a))$.

Nos plantean el problema inverso: se conoce la pendiente y nos piden el punto.

$$r: 3x + 2y - 2 = 0 \longrightarrow \vec{v}_r = (2,-3) \longrightarrow m = \frac{-3}{2}.$$

Sea t la solución del problema: recta tangente a $y = f(x)$ y paralela a $r: 3x+2y-2=0$.

$$t: \begin{cases} (a, f(a)) = P \\ m = f'(a) \end{cases}$$

Averiguando (a) se conocería el punto P.

- $f(x) = x^2 - 5x + 6 \rightarrow f'(x) = 2x - 5.$
- $m = f'(a) \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = 2a - 5 \rightarrow \boxed{a = \frac{7}{4}} \Rightarrow$

$$f(a) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 5\cdot\left(\frac{7}{4}\right) + 6 = \frac{5}{16}.$$

Solución: $\boxed{t: \ y - \frac{5}{16} = \frac{-3}{2}\cdot\left(x - \frac{7}{4}\right)}$

② Recuerda

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ⓐ $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)\cdot x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\cdot(x+h)\cdot x} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)\cdot x} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-1}{x^2}}$$

ⓑ $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h\cdot[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h\cdot[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

ⓒ $f(x) = \sqrt{x+1}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h+1})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{h\cdot[\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}]} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h+1-(x+1)}{h\cdot[\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}]}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}}}$$

(d) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2}$$

(e) $f(x) = \ln x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} =$$

$$= \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{1}{\boxed{\frac{x}{h}}}\right)^{\frac{1}{h}} \text{(1)} = \ln \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\boxed{\frac{x}{h}\cdot\frac{h}{x}\cdot\frac{1}{h}}} \text{(2)}$$

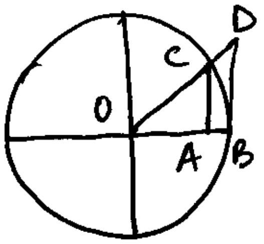
$$= \ln \underbrace{\lim_{h\to 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]}_{e}{}^{\frac{1}{x}} \text{(3)} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

① $\frac{h}{x} = \frac{1}{\frac{x}{h}}$ ② $\frac{1}{h} = \underbrace{\frac{x}{h} \cdot \frac{h}{x}}_{1.} \cdot \frac{1}{h}$ ③ $\lim \left(1+\frac{1}{f}\right)^{f} = e$ si $f \to \infty$

(f) $f(x) = \operatorname{sen} x$

① • Recuerda la interpretación geométrica del seno y la tangente.



$DC = 1 = OB$.

$AC = \operatorname{sen} x$ y $DB = \operatorname{tg} x$.

$\widehat{BC} = x$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x}$ $(: \operatorname{sen} x)$ $\Rightarrow$

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow$$

$$1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x \Leftrightarrow \boxed{\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1.}$$

Tomando límites

$$\lim_{x\to 0} \cos x \le \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le \lim_{x\to 0} 1 \Rightarrow$$

$$1 \le \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \le 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

② • Recuerda

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cdot \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \cos \frac{x+h+x}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{h} \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\frac{h}{2} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}_{\cos x} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}}_{1} = \cos x$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \cos x}$$

(g) $f(x) = \cos x$

Recuerda $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, aplicando la regla de la cadena a la función

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \rightarrow y' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \operatorname{sen} x \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -\operatorname{sen} x}$$

(h) Recuerda la derivación de la función inversa

$$f \circ f^{-1} = id \Leftrightarrow (f \circ f^{-1})(x) = x \Leftrightarrow \boxed{f[f^{-1}(x)] = x}$$

derivando la última igualdad:

$$f'[f^{-1}(x)] \cdot f'^{-1}(x) = 1 \Rightarrow f'^{-1}(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x \longrightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x \rightarrow$$

$$\boxed{f'^{-1}(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}}$$

pues $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$.

(i) $f(x) = \operatorname{sen} x \longrightarrow f'(x) = \cos x$

$f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$

$\Rightarrow f'^{-1}(x) = \dfrac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)}$

Recuerda $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \longrightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} \Rightarrow$

$\cos(\operatorname{arcsen} x) = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arcsen} x)} = \pm\sqrt{1-x^2}$

Observa:

- $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$
- $\operatorname{arcsen} x$ es una función creciente $\rightarrow$ signo $+$.

$\Rightarrow \boxed{f'^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

(j) $f(x) = \cos x \longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f^{-1}(x) = \arccos x \Rightarrow f'^{-1}(x) = \dfrac{1}{-\operatorname{sen}(\arccos x)}$

$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1-\cos^2 x} \Rightarrow$

$-\operatorname{sen}(\arccos x) = \mp\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \mp\sqrt{1-x^2}$.

- $\cos(\arccos x) = x$
- $\arccos x$ es una función decreciente $\rightarrow$ signo $-$

$\boxed{f'^{-1}(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$

7º

a) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-4(x+h)-2-(x^2-4x-2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{4x}-4h-\cancel{2}-\cancel{x^2}+\cancel{4x}+\cancel{2}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2xh+h^2-4h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2x+h-4)=2x-4$

$\Rightarrow \boxed{f'(x)=2x-4}$

b) $\left.\begin{array}{l} P=(a,f(a)) \\ m=f'(a) \end{array}\right\}$ $a=1 \longrightarrow f(1)=1^2-4\cdot 1-2=-5$

$f'(1)=2\cdot 1-4=-2$

$\boxed{t:\ y+5=-2\cdot(x-1)}$

c) $f'(x)=3$

la pendiente de la recta tangente : $f'(x)$ es igual a la pendiente de la recta $y=3x-1$ (3)

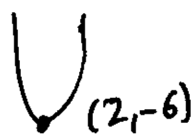
$2x-4=3 \longrightarrow x=7/2$

$Q=(7/2, f(7/2))=(7/2, -15/4)$

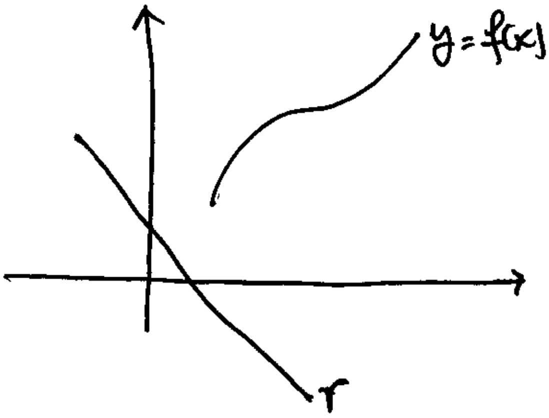
d) $f'(x)=0 \longrightarrow 2x-4=0 \longrightarrow x=2 \Rightarrow R=(2,f(2))$

$f(2)=2^2-4\cdot 2-2=-6 \Rightarrow \boxed{R=(2,-6)}$

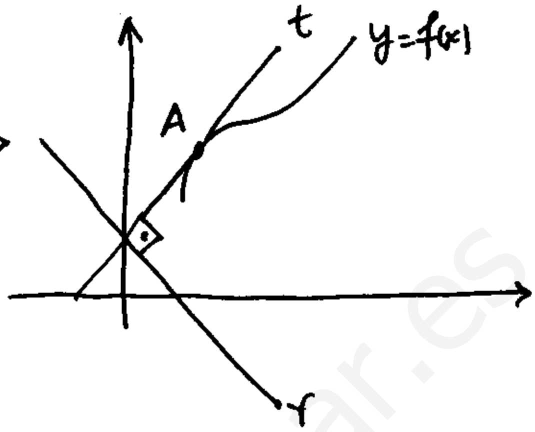
e) Es el vértice de la parábola. En este caso un mínimo



(10º) Observa la figura: nos dan una curva $y=f(x)$ y una recta r.



$\Rightarrow$



buscamos t.

¿Qué sabemos de t?

- la pendiente de t es $f'(x)$, pues es tangente a $y=f(x)$
- es perpendicular a r $\Leftrightarrow$ $m_t = \dfrac{-1}{m_r}$.

Cálculos

- $f'(x) = 2x-5$
- $r:\ 3x+2y-5=0 \rightarrow \vec{n}_r = (3,2) \rightarrow \vec{v}_r = (2,-3) \rightarrow m_r = \dfrac{-3}{2}$

$$\rightarrow m_t = \frac{-1}{m_r} = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow \boxed{2x-5=\frac{2}{3}} \rightarrow 2x = \frac{17}{3} \rightarrow x = \frac{17}{6}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \left(\frac{17}{6}, f\left(\frac{17}{6}\right)\right) \\ f\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{88}{9} \end{array}\right\} \quad A = \left(\frac{17}{6}, \frac{88}{9}\right)$$

11º la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+1$

es $f'(x)=x^2-2x-3$

la pendiente de la recta $r: y=5x+3$ es $m_r=5$

Si son paralelas → tienen la misma pendiente.

$f'(x)=m_r \Leftrightarrow \boxed{x^2-2x-3=5}$

$x^2-2x-8=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}4\\-2.\end{cases}$

$\underline{P}=(4,f(4))$

$f(4)=\frac{4^3}{3}-4^2-3\cdot4+1=$ $\Big\}\ \underline{P}=(4,$

$Q=(-2,f(-2))$

$f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2-3\cdot(-2)+1=$ $\Big\}\ Q=(-2,$

12º Condición de extremo: $f'=0$

$f'(x)=a\cdot\frac{1}{x}+2bx+1 \Rightarrow f'(1)=0 \rightarrow a+2b+1=0$

$f'(2)=0 \rightarrow \frac{a}{2}+4b+1=0 \quad (\cdot 2)$

$\left.\begin{array}{l}a+2b=-1\\a+8b=-2\end{array}\right\}\quad \begin{array}{r}-a-2b=1\\a+8b=-2\\\hline 6b=-1\end{array} \rightarrow \boxed{b=\frac{-1}{6}}\quad \boxed{a=-1-2b=-1+\frac{2}{6}=\frac{-2}{3}}$

$\boxed{f(x)=-\frac{2}{3}\ln x-\frac{1}{6}x^2+x}$

Veamos la 2ª derivada: $f''(x)=-\frac{a}{x^2}+2b=\frac{2}{3x^2}-\frac{1}{3}$.

$f''(1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}>0$ mínimo.

$f''(2)=\frac{2}{12}-\frac{1}{3}<0$ máximo.

3º $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2(x+h)-1} - \frac{1}{2x-1}}{h}$

Numerador:

$$\frac{2x-1-(2(x+h)-1)}{(2(x+h)-1)\cdot(2x-1)} = \frac{2x-1-2x-2h+1}{(2(x+h)-1)\cdot(2x-1)} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h\cdot(2(x+h)-1)\cdot(2x-1)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{(2(x+h)-1)\cdot(2x-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}}$$

$f'(5) = \frac{-2}{(2\cdot 5-1)^2} = \frac{-2}{81}$ $\qquad f(5) = \frac{1}{2\cdot 5-1} = \frac{1}{9}$.

$$\Rightarrow \boxed{t:\ y - \frac{1}{9} = \frac{-2}{81}\cdot(x-5)}$$

4º la recta $r: 3x-2y+6=0$ tiene como vector director $\vec{v}_r = (2,3)$
$\rightarrow$ tiene de pendiente $m = \frac{3}{2}$.

la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3+6x^2-kx+4$ en $x=a$ es $f'(a) = 3a^2+12a-k$.

Ambas rectas son paralelas $\Rightarrow$ tienen la misma pendiente

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{f'(3) = \frac{3}{2}} \\ f'(3) = 27+36-k = 63-k \end{array}\right\} \ 63-k = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{k = \frac{123}{2}}$$

5º Problema 1 para la figura

$$t: y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

$$f(x) = \frac{-2}{x+3}$$

$$a = 2 \longrightarrow f(2) = \frac{-2}{5}$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-2}{5+h} - \frac{-2}{5}}{h}$$

$$\frac{-2}{5+h} - \frac{-2}{5} = \frac{-2}{5+h} + \frac{2}{5} = \frac{-2\cdot 5 + 2\cdot(5+h)}{(5+h)\cdot 5} = \frac{2h}{(5+h)\cdot 5} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h\cdot(5+h)\cdot 5} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{(5+h)\cdot 5} = \frac{2}{25} \Rightarrow$$

la solución sería:

$$\boxed{t:\ y + \frac{2}{5} = \frac{2}{25}\cdot(x-2)}$$

6º $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$$a = 3 \longrightarrow f(3) = \sqrt{7}.$$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(3+h)+1} - \sqrt{7}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{7+2h} - \sqrt{7}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{7+2h} - \sqrt{7})\cdot(\sqrt{7+h} + \sqrt{7})}{h(\sqrt{7+h} + \sqrt{7})} = \lim_{h\to 0} \frac{7+2h-7}{h\cdot(\sqrt{7+h} + \sqrt{7})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{7+h} + \sqrt{7}} = \frac{2}{2\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7} \Rightarrow$$

$$\boxed{t:\ y - \sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{7}(x-3)}$$

8º $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$t: y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$

$P = (a, f(a)) = (5, f(5)) = (5, -40)$

$f(5) = -2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 - 5 = -40.$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2(5+h)^2 + 3(5+h) - 5 - (-40)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-50 - 20h - 2h^2 + 15 + 3h - 5 + 40}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-17h - 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (-17 - 2h) = -17$$

$$\Rightarrow \boxed{y + 40 = -17 \cdot (x - 5)}$$

9º Pendiente de la recta tangente : $f'(x) = -6x + 5$

Pendiente de la recta $r: 2x - y + 3 = 0$ $\quad m = +2$

$y = 2x + 3$

Como la recta tangente es paralela a la recta r, tendrán la misma pendiente:

$-6x + 5 = 2 \rightarrow -6x = -3 \rightarrow x = 1/2$

El punto de tangencia será:

$$\left.\begin{array}{l} P = \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{4} \end{array}\right\} \quad P = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$