1. Dado α ∈ 4º cuadrante tal que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, hallar, mediante identidades trigonométricas (resultados simplificados y racionalizados; no vale utilizar decimales):

a) sen α/2 $= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \overset{0{,}05}{=} \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$ 0,15

$\alpha \in 4^{\circ}$ cuad $\Rightarrow 270^{\circ} < \alpha < 360^{\circ}$

$135^{\circ} < \alpha/2 < 180^{\circ} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in 2^{\circ}$ cuad.

0,05

TOTAL: $\boxed{0{,}25}$

b) sen 2α $= 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha \overset{0{,}05}{=} 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \boxed{-1}$ 0,1

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2\alpha + \frac{1}{2} = 1$

$\text{sen}^2\alpha = \frac{1}{2}$ ↗ $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ descartado pq. $\alpha \in 4^{\circ}$ cuad.

↘ $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 0,1

TOTAL: $\boxed{0{,}25}$

c) tg (α–60º) $= \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,60^{\circ}}{1+\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,60^{\circ}} \overset{0{,}05}{=} \frac{-1-\sqrt{3}}{1+(-1)\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \overset{0{,}05}{=} -\frac{1+2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \boxed{2+\sqrt{3}}$ 0,1

$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$ 0,05

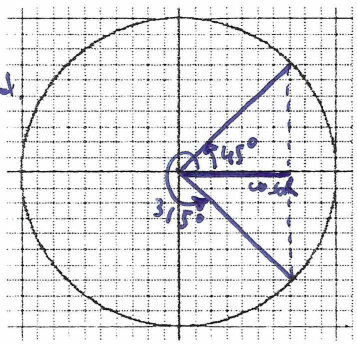
TOTAL: $\boxed{0{,}25}$

d) Razonar en la circunferencia goniométrica (sin calculadora) de qué α se trata ~~(aproximando a los segundos)~~.

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \text{arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}$ ↗ 0,05 $\alpha = 45^{\circ}$ descartado pq. $\alpha \in 4^{\circ}$ cuad.

↘ $\boxed{\alpha = 315^{\circ}}$ 0,15

TOTAL: $\boxed{0{,}25}$



0,05

2. Dados $\vec{u}=(-3,1)$ y $\vec{v}=(-10,4)$, hallar $\vec{w}=(x,y)$ tal que $\vec{u}\cdot\vec{w}=1$ y $\vec{w}\perp\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=1 \Rightarrow (-3,1)\cdot(x,y) = -3x+y=1$ 0,25

$\vec{w}\perp\vec{v} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (x,y)\cdot(-10,4) = -10x+4y=0$ 0,25

por sustitución:

$y=1+3x \Rightarrow$

$\Rightarrow -10x+4(1+3x)=0$

$-10x+4+12x=0$

$2x=-4$

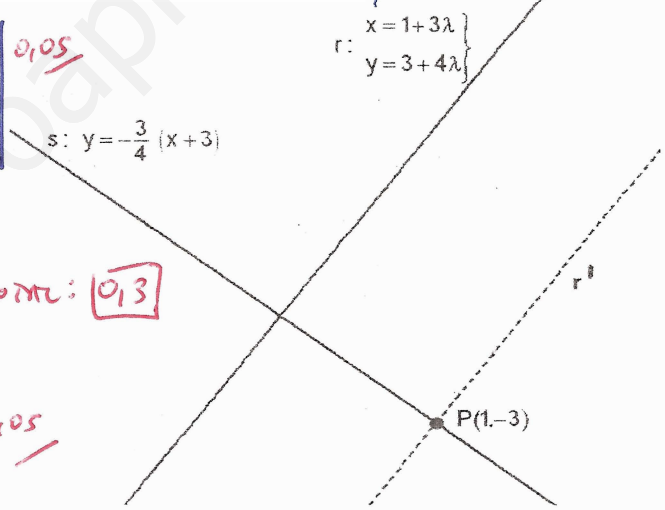
$\boxed{x=-2}$ 0,25

$\Downarrow$

$\boxed{y=-5}$ 0,25

TOTAL: $\boxed{1}$

3. Dadas las rectas de la figura, se pide:



$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{4} \rightarrow 4x-4=3y-9$

$4x-3y+5=0$

a) Obtener la ecuación de r' sabiendo que es // a r, en todas las formas conocidas.

$r'//r \Rightarrow \vec{v_r}=\vec{v_{r'}}=(3,4)$, $P(1,-3)\in r'$ 0,05 $\Rightarrow$ $r': \boxed{\begin{matrix} x=1+3\lambda \\ y=-3+4\lambda \end{matrix}}$ 0,05

PARAMÉTRICAS

0,05

$\boxed{\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{4}}$ $\Rightarrow 4x-4=3y+9$

CONTINUA

$\boxed{4x-3y-13=0}$ 0,05

GRAL. o IMPLÍCITA

TOTAL: $\boxed{0,3}$

$\Downarrow$ 0,05

$\boxed{y+3=\frac{4}{3}(x-1)}$

PTO. – PDTE.

$\Downarrow$

$3y=4x-13;$ $\boxed{y=\frac{4}{3}x-\frac{13}{3}}$ 0,05

EXPLÍCITA

b) Calcular la d(r,r')

$d(r,r')=d(Q,r')$ 0,05 $=\frac{|4-9-13|}{\sqrt{16+9}}$ 0,1 $=\frac{|-18|}{\sqrt{25}}$ 0,1 $=\boxed{\frac{18}{5}u}$ 0,1

$Q(1,3)\in r$

TOTAL: $\boxed{0,35}$

c) Hallar el ángulo que forman r y s

$m_s=-\frac{3}{4} \Rightarrow \vec{u_s}=(4,-3)$ 0,05

se baja 0,15 por no indicar el valor absoluto

$\cos\alpha=\frac{|\vec{u_r}\cdot\vec{v_s}|}{\|\vec{v_r}\|\cdot\|\vec{v_s}\|}$ 0,05 $=\frac{|(3,4)\cdot(4,-3)|}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{16+9}}$ 0,05 $=\frac{|12-12|}{5\cdot5}$ 0,05 $=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=\arccos 0=90^\circ} \Rightarrow r\perp s$ 0,15

TOTAL: $\boxed{0,35}$

4. Dada $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x} & \text{si } x\le -1\\ (x-2)^2+1 & \text{si } -1<x\le 3\\ \dfrac{x-7}{x-5} & \text{si } x>3\end{cases}$, se pide:

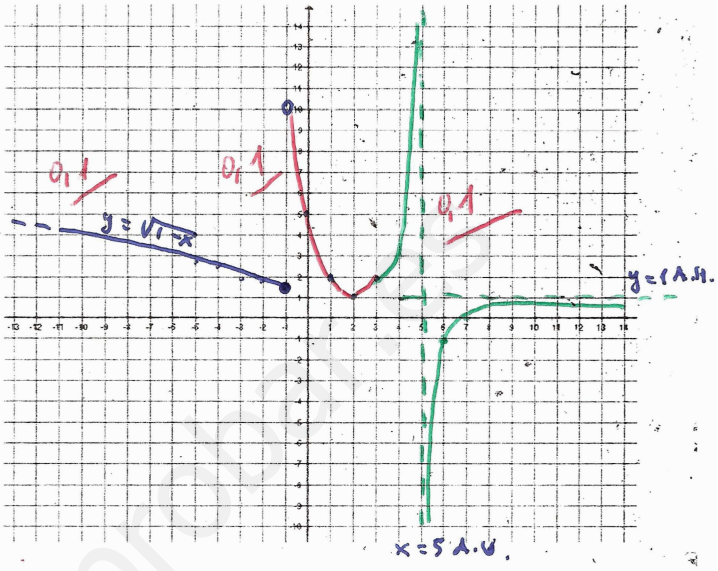
se baja 0,1 por no indicar los nombres de las ramas
" " " " " " las asíntotas en la gráfica
" " 0,05 por no dar suficientes valores en cada tabla
" " " por no indicar qué ocurre en el extremo de la rama

NOTA: $\boxed{0,3}$ a) Gráfica.

$y=\sqrt{1-x}$	∞ ... 2,65	2,45	2,24	2	1,73	1,41

x	$\cancel{-1}$	0	1	2	3
$y=(x-2)^2+1$	$\cancel{10}$	5	2	1	2

x	$\cancel{3}$	4	5	6	7	8	9	10	11 ... 105 ... ∞
$y=\frac{x-7}{x-5}$	$\cancel{2}$	3	$\nexists$	-1	0	0,33	0,5	0,6	0,67 ... 0,98 ... 1^-



NOTA: $\boxed{0,1}$ b) Dom(f)= $\mathbb{R}-\{5\}$ 0,05 Im(f)= $\mathbb{R}$ 0,05

c) Intervalos de crecimiento. M y m

NOTA: $\boxed{0,15}$
0,05 $f(x)\searrow\ \forall x\in(-\infty,-1)\cup(-1,2)$
0,05 $f(x)\nearrow\ \forall x\in(2,5)\cup(5,\infty)$
$m(2,1)$ 0,05

NOTA: 0,35 d) Indicar dónde es continua y ~~Clasificar analíticamente sus~~ posibles discontinuidades.

- La 1ª rama es continua en su dominio particular de definición, pues ahí el radicando $1-x$ es siempre positivo
- La 2ª rama es continua por ser polinómica
- La 3ª rama no es continua en $x=5$ pues ahí no está definida

¿continua en $x=-1$?

1º) $\exists\ f(-1)=\sqrt{2}$ (1ª rama)

2º) $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1}\sqrt{1-x}=\sqrt{2}$ 0,05
$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1}\left[(x-2)^2+1\right]=10$
$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to -1} f(x) \Rightarrow$ 0,05 $\boxed{\text{discontinuidad de salto finito en } x=-1}$

NOTA: se baja 0,05 por cada fallo en lenguaje matemático

¿continua en $x=3$?

1º) $f(3)=2$ (2ª rama)

2º) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}(x-2)^2+1=2$ 0,05
$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{-4}{-2}=2$
$\Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x)=2 \Rightarrow f(x)$ continua en $x=3$ 0,05

¿continua en $x=5$?

$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-}\frac{x-7}{x-5}=\frac{-2}{0^-}=\infty$ 0,05
$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+}\frac{x-7}{x-5}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$
$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to 5} f(x) \Rightarrow$ 0,05 $\boxed{\text{discontinuidad de salto } \infty \text{ en } x=5}$

Sol: $\boxed{f(x) \text{ continua } \forall x-\{-1,5\}}$ 0,05

TOTAL: 0,1 e) Ecuación de las posibles asíntotas: 0,05 $x=5$ A.V. 0,05 $y=1$ A.H.

5. Calcular:

a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1} \overset{0/0}{=}$ INDTDO. 0,1 $\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-2x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{0}{2} = \boxed{0}$ 0,2 0,1

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & & 1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

TOTAL: 0,4

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+3x-1}{x^4-x^2-x+1} \overset{\infty/\infty}{\sim}$ INDTDO. 0,05 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^4} = $ 0,05 $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2} = $ 0,1 $\frac{3}{\infty} = \boxed{0}$

TOTAL: 0,2

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) \overset{\infty-\infty}{=}$ INDTDO. $\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x} = $ 0,05 $\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x}+x} \overset{\infty/\infty}{=}$ INDTDO 0,05

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{\cancel{x}}}+1} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$ 0,2

0,05 0,05 0

TOTAL: 0,4

6. Derivar y **simplificar**:

a) $y=\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{x}{5}+\frac{1}{x} \longrightarrow y'=\frac{1}{4}12x^3-\frac{1}{3}6x^2+\frac{1}{2}2x-\frac{1}{5}=\boxed{3x^3-2x^2+x-\frac{1}{5}}$ 0,1 0,15

b) $y=\sqrt[4]{(x^4-1)^3} = (x^4-1)^{3/4} \xrightarrow{u^n} y'=\frac{3}{\cancel{4}}(x^4-1)^{-1/4}\cdot\cancel{4}x^3 = \boxed{\frac{3x^3}{\sqrt[4]{x^4-1}}}$ 0,1 0,15

0,25 cada apdo.

c) $y=\frac{1}{(x^2+1)^3} \xrightarrow{1/u} y'=\frac{-3(x^2+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^6}=\boxed{\frac{-6x}{(x^2+1)^4}}$ 0,1 0,15

d) $y=\frac{2x^2-3}{3x^2-2} \xrightarrow{u/v} y'=\frac{4x(3x^2-2)-(2x^2-3)\cdot 6x}{(3x^2-2)^2}=\frac{\cancel{12x^3}-8x-\cancel{12x^3}+18x}{(3x^2-2)^2}=\boxed{\frac{10x}{(3x^2-2)^2}}$ 0,05 0,05 0,15

■ **Elige dos preguntas de entre las cuatro siguientes (En total tienes que hacer 8 preguntas; todas puntúan igual):**

7. **a)** Operar y simplificar:

$$\frac{\frac{x-1}{x^3-3x+2}}{\frac{2}{x+2}} = \frac{(x-1)(x+2)}{2\cdot(x^3-3x+2)} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{2\cancel{(x-1)}(x^2+x-2)} = \frac{\cancel{x+2}}{2\cancel{(x+2)}(x-1)} = \boxed{\frac{1}{2x-2}}$$

raíz 1 · raíz −2 · 0,05 · 0,1 · raíz 2 · 0,1 · 0,25

comparte la raíz 1 · comparte la raíz −2

TOTAL: $\boxed{0,5}$

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	$\boxed{0}$
−2		−2	2	
	1	−1	$\boxed{0}$	

b) Resolver:

$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}=\sqrt{10}$$

$$(\sqrt{x+5}-\sqrt{10})^2=(\sqrt{x-5})^2$$

$$\cancel{x}+5-2\sqrt{10}\sqrt{x+5}+10=\cancel{x}-5 \quad 0,05$$

$$20=2\sqrt{10}\sqrt{x+5} \quad 0,05$$

$$10=\sqrt{10}\,\sqrt{x+5}$$

$$10^2=(\sqrt{10}\,\sqrt{x+5})^2 \quad 0,05$$

$$100=10(x+5) \quad 0,05$$

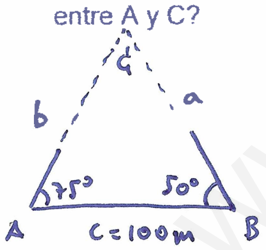
$$10=x+5$$

$$5=x \quad 0,1$$

Comprobación: $\sqrt{10}-\sqrt{10}=\sqrt{10} \Rightarrow$ Solución: $\boxed{x=5}$ 0,2

TOTAL: $\boxed{0,5}$ (0,3+0,2)

8. Se desea unir entre sí tres puntos, A, B y C, mediante caminos rectos. La distancia de A a B es de 100 m, el ángulo correspondiente a B es de 50º, y el ángulo en A es de 75º. ¿Cuál es la distancia entre B y C? ¿Y entre A y C?



$$C=180°-(50°+75°)=55° \quad 0,1$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} 75°}=\frac{100}{\operatorname{sen} 55°} \Rightarrow \boxed{a=\frac{100\operatorname{sen} 75°}{\operatorname{sen} 55°}} \simeq \boxed{117,92\text{ m}}$$

1 · 1 · 0,25

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} 50°}=\frac{100}{\operatorname{sen} 55°} \Rightarrow \boxed{b=\frac{100\operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 55°}} \simeq \boxed{93,52\text{ m}}$$

1 · 1 · 0,25

Se baja 0,1 por no indicar las unidades
" " " " fallos en el redondeo
" " " " no indicar el ≃

TOTAL: $\boxed{1}$

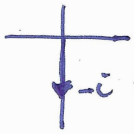
9. Operar en forma polar (se recomienda dibujar previamente cada complejo) y dar el resultado en binómica:

$$\frac{-i\cdot\left(1-\sqrt{3}i\right)^3}{(-1+i)^4\cdot\left(-\sqrt{3}-i\right)}=\frac{1_{270^\circ}\cdot\left(2_{300^\circ}\right)^3}{\left(\sqrt{2}_{315^\circ}\right)^4\cdot 2_{210^\circ}}=\frac{1_{270^\circ}\cdot 8_{900^\circ}}{4_{1260^\circ}\cdot 2_{210^\circ}}=\frac{8_{1170^\circ}}{8_{1470^\circ}}=8_{-300^\circ}=8_{60^\circ}=$$

0,1 0,1 0,1

$$=8\left(\cos 60^\circ+i\,\text{sen}\,60^\circ\right)=8\cdot\left(\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boxed{4+4\sqrt{3}\,i}$$

0,1 0,1 0,1

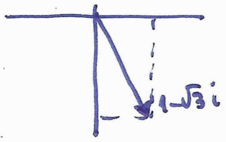


$-i=1_{270^\circ}$ 0,1

$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$

$\alpha=\text{arc tg}\left(-\sqrt{3}\right)=300^\circ$

$1-\sqrt{3}i=2_{300^\circ}$ 0,1

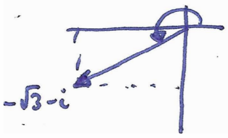


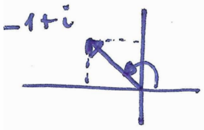
$r=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$

$\alpha=\text{arc tg}\,\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}=210^\circ$

$-\sqrt{3}-i=2_{210^\circ}$ 0,1

TOTAL: 1





$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\alpha=\text{arc tg}\,\frac{1}{-1}=\text{arc tg}(-1)=315^\circ$

$-1+i=\sqrt{2}_{315^\circ}$ 0,1

10. Resolver:

a) $\log(x+1)=\log(5x-13)-\log(x-3)$

b) $9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0$