Números reales

1º El ayuntamiento de Alba de Tormes cuenta con 600 habitantes de edades comprendidas entre 16 y 20 años. Les ha realizado una encuesta sobre las actividades culturales que les interesan respondiendo: el 81,81818181…% contestó que le interesaba el cine, y al 14,583333…% no le interesaban las charlas científicas. Calcula el número de personas a las que se les pasó la encuesta.

2º En una clase se realiza una encuesta sobre las aficiones deportivas. El 92,592592592…% del total contesta que practica algún deporte, y la mitad, que le gusta el fútbol. Si en la clase hay como máximo 35 alumnos, razona si son posibles los datos anteriores.

3º Demuestra que el número áureo cumple: $\Phi^2 = \Phi + 1, \quad \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}, \quad \Phi^3 = \frac{\Phi+1}{\Phi-1}$.

4º Representa en la recta real

a) $\frac{3}{5} + \sqrt{5}$. b) $\frac{2 - 3\sqrt{7}}{5}$

5º Racionaliza:

a) $\frac{\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[4]{a^7}} =$ b) $\frac{x-2}{3\sqrt{x-2}} =$ c) $\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} =$

6º Opera:

a) $2 \cdot \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + 3\sqrt{2}\right) =$

b) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} =$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}} =$

d) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} =$

7º Halla las dimensiones exactas de un A0. Completa la tabla. Empleando el reasultado anterior demuestra que en un A4 son 297 mm por 210 mm.

	A0	A1	A2	A3	A4	A5
Largo						
Ancho						

8º Calcula de forma exacta (en forma de fracción):

$0,\widehat{12} - 2 \cdot \left(0,\hat{1} - 0,0\widehat{20}\right) + 0,0\hat{3} =$

1º Sea N el número de personas a las cuales se les pasó la encuesta.

De N sabemos que es un entero positivo ($N \in \mathbb{Z}^+$) y que es menor o igual que 600 ($N \leq 600$)

Sea A el número de personas que contestó que le interesaba el cine y B las que no le interesaban las charlas científicas. Evidentemente $A, B \in \mathbb{Z}^+$.

Se expresan los porcentajes en forma de fracción.

¿A? $A = 81,\widehat{81}\%$ de N ¿B? $B = 14,58\widehat{3}\%$ de N.

$$p = 81,8181\ldots$$

$$100p = 8181,81\ldots$$
$$-p = -81,81\ldots$$
$$99p = 8100 \longrightarrow p = \frac{8100}{99} \Rightarrow \boxed{A = \frac{8100}{99} \cdot \frac{N}{100} = \frac{81N}{99} = \frac{9N}{11}}$$

$$q = 14,5833\ldots$$

$$1000q = 14583,3\ldots$$
$$-100q = -1458,3\ldots$$
$$900q = 13125 \rightarrow q = \frac{13125}{900} \Rightarrow \boxed{B = \frac{13125}{900} \cdot \frac{N}{100} = \frac{7N}{48}}$$

Como A y B son enteros positivos y vienen expresadas como fracciones, N debe ser múltiplo de 11 y 48. Se busca el m.c.m(11,48)

$$48 = 2^4 \cdot 3 \Rightarrow m.c.m(11,48) = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 = 528$$

$$N = \dot{528} = 528,\ 1056\ (528 \cdot 2),\ 1584\ (528 \cdot 3) \ldots,$$

pero $N \leq 600 \Rightarrow \boxed{N = 528}$ Solución.

(2) Sea N el número de alumnos de la clase. ¿Qué sabemos de N?

- $N \in \mathbb{Z}^+$ (son alumnos !!)
- $N \leq 35$
- A = nº de personas que practica algún deporte $\quad A \in \mathbb{Z}^+$.

$A = 92,\widehat{592}\%$ de N

$$p = 92,592\ldots \rightarrow \quad \begin{array}{r} 1000p = 92592,592\ldots \\ -p = -92,592\ldots \\ \hline 999p = 92500 \end{array} \Rightarrow p = \frac{92500}{999}$$

$$\Rightarrow A = \frac{92500}{999} \cdot \frac{N}{100} = \frac{925N}{999} = \frac{25N}{27}$$

para que A sea entero N debe ser múltiplo de 27: $N = \dot{27} \rightarrow$

$N = 27, 54, \ldots$.

$\boxed{N = 27}$ pues debe ser menor de 35.

- A la mitad le gusta el fútbol. $\frac{27}{2} = 13,5 \in \mathbb{Q}$.

Los datos no son posibles pues tenemos un nº de alumnos no entero.

③ Recuerda

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

a) $\boxed{\phi^2 = \phi + 1}$

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{2+1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{2}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi$$

b) $\boxed{\phi - 1 = \frac{1}{\phi}} \Longleftrightarrow \boxed{\phi = \frac{1}{\phi - 1}}$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \overset{(*)}{=} \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}-1)}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \phi - 1.$$

c) $$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \underbrace{\frac{1}{\phi-1}}_{\text{ap. b)}} \cdot \underbrace{(\phi+1)}_{\text{ap. a)}} = \frac{\phi+1}{\phi-1}$$

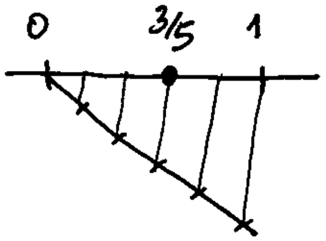
(*) $1+\sqrt{5} = \sqrt{5}+1$

4º

a) Se representan por separado cada número

$\boxed{\frac{3}{5}}$

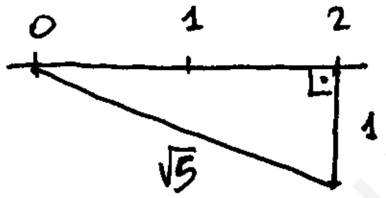
Teorema de Tales. Como $\frac{3}{5}<1 \to$ entre 0 y 1



$\boxed{\sqrt{5}}$

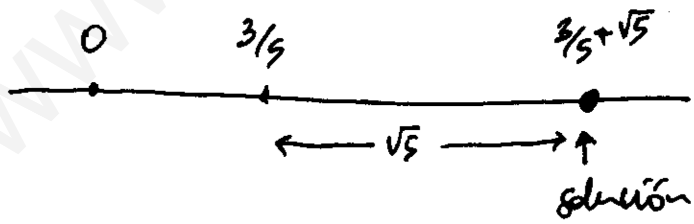
Teorema de Pitágoras. El cuadrado perfecto más cercano es 4

$5=2^2+1^2 \to$



$\boxed{\frac{3}{5}+\sqrt{5}}$

Al 1º se le añade el 2º. (con un compás)

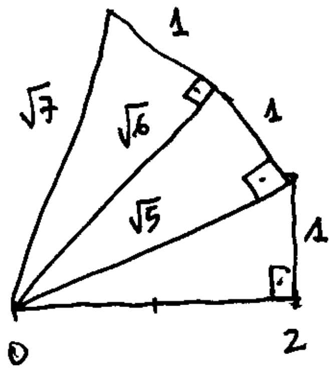


b) Primero se representa $\boxed{\sqrt{7}}$

Se busca el cuadrado perfecto más cercano

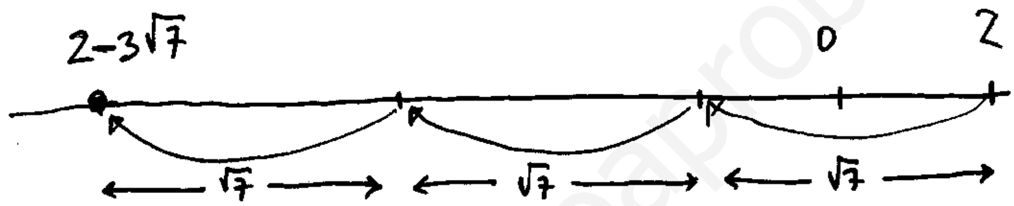
$2^2<7 \to 2^2+1=5$

Procedimiento general $\sqrt{5} \to \sqrt{6} \to \boxed{\sqrt{7}}$



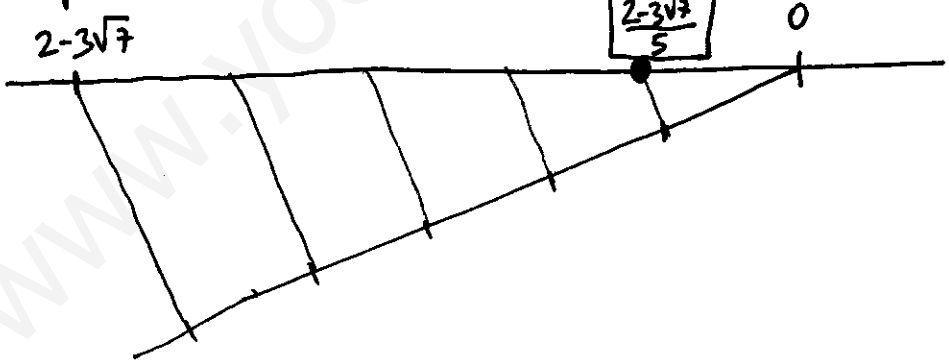
$\boxed{2-3\sqrt{7}}$

Nos situamos a 2 y con un compás tomamos 3 $\boxed{\sqrt{7}}$ a la izquierda



$\boxed{\dfrac{2-3\sqrt{7}}{5}}$

Se aplica el teorema de Tales a $2-3\sqrt{7}$



5º

a) $$\frac{\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[4]{a^7}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a\cdot a\cdot\sqrt[4]{a^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}}\cdot\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{a^2\cdot a} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{a^3}}$$

Se podía efectuar el numerador

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[12]{a^7}$$

m.c.m $(3,4)=12$ $$\Rightarrow \boxed{\frac{\sqrt[12]{a^7}}{a^3}}$$

b) $$\frac{x-2}{3\cdot\sqrt{x-2}}\cdot\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\cancel{(x-2)}\cdot\sqrt{x-2}}{3\cdot\cancel{(x-2)}} = \boxed{\frac{\sqrt{x-2}}{3}}$$

c) $$\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}\cdot\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{12}-4\sqrt{18}}{18-12} = \frac{12\sqrt{3}-12\sqrt{2}}{6} = \boxed{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{12} = \sqrt{2^2\cdot 3} = 2\sqrt{3}\\ \sqrt{18} = \sqrt{2\cdot 3^2} = 3\sqrt{2}\end{array}\right\}$$

6º

a) $2\cdot\left(2-3\sqrt{2}\right)^2+\left(2-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2+3\sqrt{2}\right)=$

$2\cdot\left[2^2-2\cdot 2\cdot 3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2\right]+2^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2=$

$2\cdot\left[4-12\sqrt{2}+18\right]+4-18=2\cdot\left(22-12\sqrt{2}\right)-14=$

$44-24\sqrt{2}-14=\boxed{30-24\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}}=$

$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{6}}{6}=\boxed{\frac{5\sqrt{6}}{6}}$

c) Voy introduciendo los 2 de "fuera a dentro".

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}=\sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}=$

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^7\sqrt{2\sqrt{2}}}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{15}\sqrt{2}}}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{31}}}}}}=$

$\boxed{\sqrt[32]{2^{31}}}$

Si lo hubiera hecho de "dentro a fuera":

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\sqrt{2^3}}}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[4]{2^3}}}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\sqrt[4]{2^7}}}} = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt[8]{2^7}}} = \sqrt{2\sqrt{\sqrt[8]{2^{15}}}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt[16]{2^{15}}} = \sqrt{\sqrt[16]{2^{31}}} = \boxed{\sqrt[32]{2^{31}}}$$

d) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

Reducción a común índice: $m.c.m(2,3,4) = 12$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x} = \sqrt[12]{x^6} \\ \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{x^8} \\ \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[12]{x^6} \cdot \sqrt[12]{x^8} \cdot \sqrt[12]{x^9} = \boxed{\sqrt[12]{x^{23}} = x \cdot \sqrt[12]{x^{11}}}$$

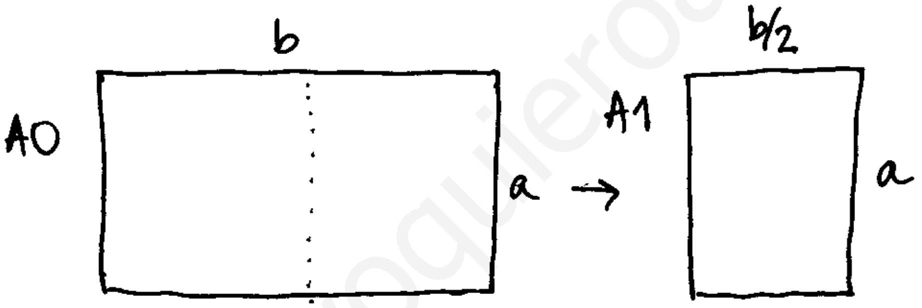
7º La norma DIN señala un tamaño normalizado aceptado en todo el mundo.

¿Qué propiedades verifican?

1. A1 es la unidad de área del A0
   A2 " " del A1
   A3 " " A2

2. A0, A1, A2, ... son semejantes.
3. A0 mide $1\,m^2$.

Conocidas las dimensiones del A0 se pueden averiguar las dimensiones de A1 y así sucesivamente.



$$A0 \sim A1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b/2} \\ a \cdot b = 1 \end{array}}$$ (semejanza de rectángulos)

Resolvamos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b^2}{2} = a^2 \rightarrow b^2 = 2a^2 \\ b = \dfrac{1}{a} \rightarrow b^2 = \dfrac{1}{a^2} \end{array}\right\} \quad 2a^2 = \frac{1}{a^2} \rightarrow \boxed{a^4 = \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}}$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

$$b=\frac{1}{a}=\sqrt[4]{2}$$

Solución para el $\boxed{\text{A0} \quad \begin{array}{l} \text{largo } b=\sqrt[4]{2} \\ \text{ancho } a=\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2} \end{array}}$

Tabla de valores.

Norma	largo	Ancho	largo	Ancho
A0	b	a	$\sqrt[4]{2}$	$\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$
A1	a	$\frac{b}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$
A2	$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$
A3	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$
A4	$\frac{b}{4}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$	$\frac{\sqrt[4]{8}}{8}$
A5	$\frac{a}{4}$	$\frac{b}{8}$	$\frac{\sqrt[4]{8}}{8}$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{8}$.

.....

Comprueba que las dimensiones del A4 (son las más empleadas)

largo $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}=0{,}297\ldots \text{ m} \simeq 297 \text{ mm}$

ancho $\frac{\sqrt[4]{8}}{8}=0{,}210\ldots \text{ m} \simeq 210 \text{ mm}.$

Fórmula general.

Método 1.

De la tabla anterior. Vamos expresar el largo como una potencia en base 2.

A0	A1	A2	A3	...	AN
$2^{1/4}$	$2^{-1/4}$	$2^{-3/4}$	$2^{-5/4}$	....	

los exponentes forman una progresión aritmética de 1er término 1/4 y diferencia $-2/4 (=-1/2)$

$$AN: \text{ largo } 2^{+\frac{1}{4}-\frac{N}{2}} = 2^{\frac{1-2N}{4}}$$

Para el ancho hacemos lo mismo.

A0	A1	A2 ...	AN
$2^{-1/4}$	$2^{-3/4}$	$2^{-5/4}$	

los exponentes forman una progresión aritmética de 1er término $-1/4$ y diferencia $-2/4 (=-1/2)$

$$AN: \text{ ancho } 2^{-1/4-N/2} = 2^{\frac{-1-2N}{4}}$$

Método 2.

El área de $A0 = 1$, $A1 = 1/2$, $A2 = 1/4$ ... $AN = 1/2^N$.

las dimensiones (b = largo y a = ancho) cumplen la relación de semejanza.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b/2} \\ \text{(área)} \rightarrow \quad a \cdot b = \dfrac{1}{2^N} \end{array}\right\}$$

la solución del sistema son las dimensiones del papel AN.

8º Primero se expresa cada uno de los números en forma de fracción:

$a = 0,\widehat{12} = 0,1212\ldots$

$100a = 12,12\ldots$

$-a = -0,12\ldots$

$99a = 12 \longrightarrow a = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

$$\begin{array}{r|l} 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

para el cálculo del m.c.m de 33, 11 y 30.

$b = 0,\hat{1} = 0,11\ldots$

$10b = 1,1\ldots$

$-b = -0,1\ldots$

$9b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{9}$

$c = 0,0\widehat{20} = 0,02020\ldots$

$1000c = 20,20\ldots$

$-10c = -0,20\ldots$

$990c = 20 \rightarrow c = \frac{20}{990} = \frac{2}{99}$

$d = 0,0\hat{3} = 0,033\ldots$

$100d = 3,3\ldots$

$-10d = -0,3\ldots$

$90d = 3 \longrightarrow d = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$ $\Rrightarrow$

$$\frac{4}{33} - 2\cdot\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{99}\right) + \frac{1}{30} = \frac{4}{33} - 2\cdot\frac{11-2}{99} + \frac{1}{30}$$

$$= \frac{4}{33} - \frac{18}{99} + \frac{1}{30} = \frac{4}{33} - \frac{2}{11} + \frac{1}{30}$$

m.c.m $(33, 11, 30) = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 11 = 330$

$$\frac{40 - 60 + 11}{330} = \frac{-9}{330} = \boxed{\frac{-3}{110}}$$