RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA.

Para determinar un triángulo hace falta dar 3 de sus elementos, uno de los cuales debe ser un lado.

¿De qué herramientas disponemos?

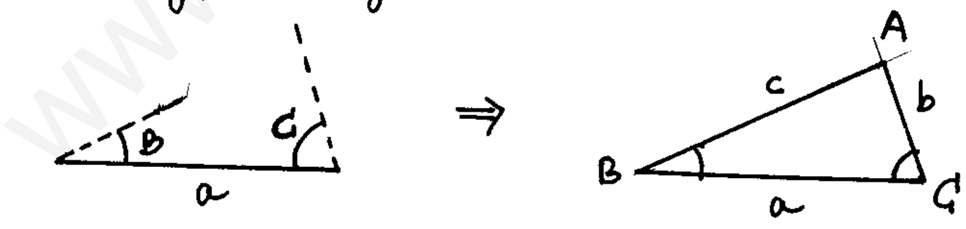
1. $A + B + C = 180^\circ$
2. Desigualdad Triangular: $a + b > c$
   Esto es válido para cualquier pareja de lados del triángulo.
   $b + c > a$ y $b + a > c$.
3. Teorema del Coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$
4. Teorema del Seno
   $$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$
5. A mayor lado se opone mayor ángulo: si $a > b \Rightarrow A > B$.

En todos los casos procederé de igual forma: primero lo resolveré de modo gráfico (con regla y compás) y segundo de modo analítico.

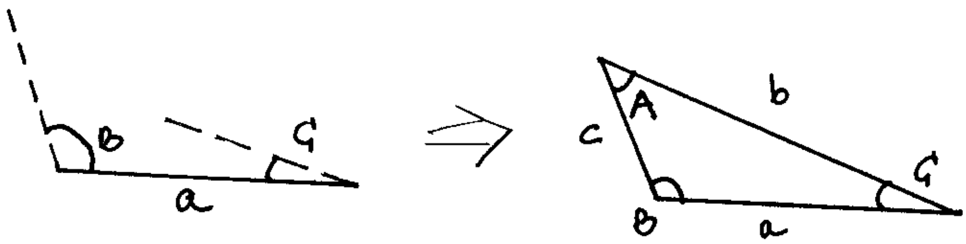
CASO I.

Datos: un lado y dos ángulos cualesquiera. (a, B, C)

- B y C son agudos.



- B es obtuso



Datos: $\boxed{(a=7,\ B=70°,\ C=60°)}$

$a=7 \qquad A=50°$

$b=8{,}59 \qquad B=70°$

$c=7{,}91 \qquad C=60°.$

¿A? $\quad A=180-(B+C) \Rightarrow \boxed{A=50°}$

Para el cálculo de b y c se empleará el teorema del seno

$$\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{a}{\operatorname{sen}A} \Leftrightarrow \frac{b}{\operatorname{sen}70°}=\frac{7}{\operatorname{sen}50°} \Rightarrow \boxed{b=\frac{7\cdot\operatorname{sen}70°}{\operatorname{sen}50°}\simeq 8{,}59}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}C}=\frac{a}{\operatorname{sen}A} \Leftrightarrow \frac{c}{\operatorname{sen}60°}=\frac{7}{\operatorname{sen}50°} \Rightarrow \boxed{c=\frac{7\cdot\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}50°}\simeq 7{,}91}$$

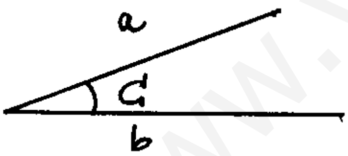
Nota: la solución es ÚNICA.

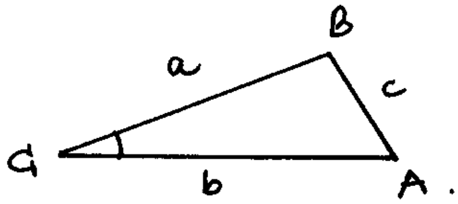
CASO II

Datos: dos lados y el ángulo comprendido (a, b, C).

la solución de este caso es ÚNICA, es decir, sólo hay un triángulo que cumple las condiciones. Si de forma analítica obtuviéramos alguna más habría que descartarla.

MODO GRÁFICO





MODO ANALÍTICO. $\boxed{(a=5,\ b=7,\ C=50°)}$

$a=5 \qquad A=45{,}32°$

$b=7 \qquad B=84{,}68°$

$c=5{,}39 \qquad C=50°.$

Siempre que sea posible emplearemos

el teorema del coseno para el cálculo de ÁNGULOS

el teorema del seno para el cálculo de LADOS.

¿c? Teorema del coseno

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C \Leftrightarrow c^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cdot\cos 50° \Rightarrow \boxed{c\simeq 5{,}39}$$

¿A? $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \dfrac{7^2 + \quad - 5^2}{2 \cdot 7 \cdot 5{,}39}$

$\Rightarrow \cos A = 0{,}70\ldots \Rightarrow \boxed{A_1 = 45{,}32^\circ}$

$A_2 = 360 - 45{,}32^\circ > 180^\circ$ (se descarta)

¿B? $\boxed{B} = 180^\circ - (A + C) = \boxed{84{,}68^\circ}$

Nota. Podríamos haber empleado el teorema del seno para calcular A. Este procedimiento conduce a dos soluciones siendo UNA de ellas imposible. Veámoslo.

¿A? $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} C}{c} = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{5{,}39} = 0{,}71\ldots$

$\Rightarrow A_1 = 45{,}29^\circ$

$A_2 = 180^\circ - 45{,}29^\circ = 134{,}71^\circ$

- si $A_1 = 45{,}29^\circ \rightarrow B_1 = 180 - (A_1 + C) = 84{,}71^\circ$.
- si $A_2 = 134{,}71^\circ \rightarrow A_2 + C > 180^\circ \longrightarrow$ imposible.

(la diferencia de decimales se debe a las aproximaciones).

¿B? $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} C}{c} = \dfrac{7 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{5{,}39} = 0{,}994\ldots$

$\Rightarrow B_1 = 84{,}19^\circ$

$B_2 = 180^\circ - 84{,}19^\circ = 95{,}81^\circ$.

- si $B_1 = 84{,}19^\circ \longrightarrow A_1 = 180^\circ - (B_1 + C) = 45{,}81^\circ$
- si $B_2 = 95{,}81^\circ \longrightarrow A_2 = 180^\circ - (B_2 + C) = 34{,}19^\circ$.

Las dos soluciones son COMPATIBLES con las "herramientas" 1, 2 y 5.

$5 < 5{,}39 < 7 \rightarrow \quad 45{,}81^\circ < 50^\circ < 84{,}19^\circ \longrightarrow A_1 < C < B_1$

$a < c < b \rightarrow \quad 34{,}19^\circ < 50 < 95{,}81^\circ \longrightarrow A_2 < C < B_2$

Una de ellas no cumple el teorema del seno (Veamos que es la 2ª)

$\dfrac{5}{\operatorname{sen} 45{,}81^\circ} = 6{,}973 \quad \dfrac{5{,}39}{\operatorname{sen} 50^\circ} = 7{,}036 \quad \dfrac{7}{\operatorname{sen} 84{,}19^\circ} = 7{,}036$.

"las diferencias son muy pequeñas, se deben al REDONDEO".

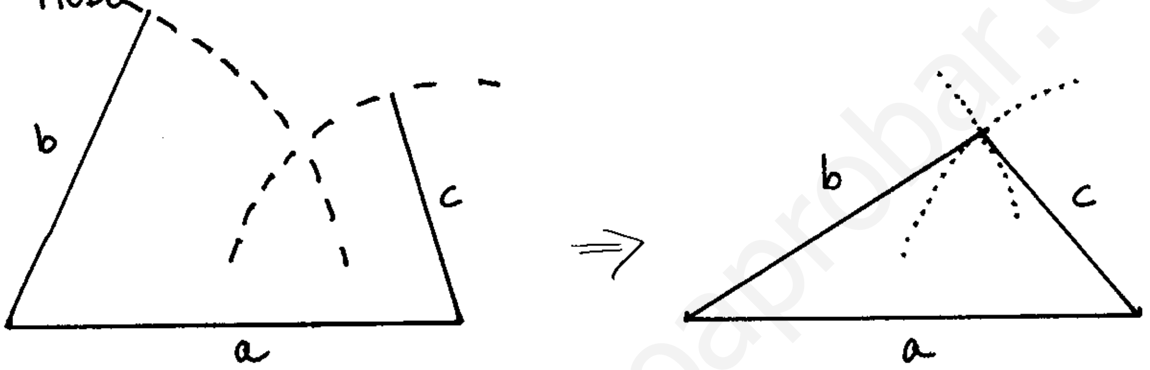
$\frac{5}{\text{sen } 34{,}19^\circ} = 8{,}897$ $\qquad$ $\frac{5{,}39}{\text{sen } 50^\circ} = 7{,}036$ $\qquad$ $\frac{7}{\text{sen } 95{,}81^\circ} = 7{,}036$

NO ES POSIBLE.

RESUMIENO: evitamos grandes complicaciones trabajando con el teorema del coseno y deberemos descartar soluciones si empleamos el teorema del seno para el cálculo de A ó B.

Caso III. Datos: 3 lados (a,b,c).

MODO GRÁFICO.



MODO ANALÍTICO.

La solución es ÚNICA.

$\boxed{\text{Datos } (a=5, b=7, c=10)}$

$a = 5$	$A = 27{,}66^\circ$
$b = 7$	$B = 40{,}54^\circ$
$c = 10$	$C = 111{,}18^\circ$

¿A? Teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \rightarrow$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\cos A} = \frac{7^2+10^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 10} \rightarrow \boxed{A \simeq 27{,}66^\circ}$$

¿B? Teorema del coseno

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{5^2+10^2-7^2}{2\cdot 5\cdot 10} \rightarrow \boxed{B \simeq 40{,}54^\circ}$$

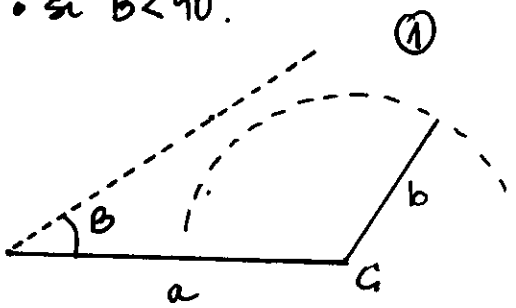
¿C? $\boxed{C} = 180^\circ - (A+B) \simeq \boxed{111{,}18^\circ}$.

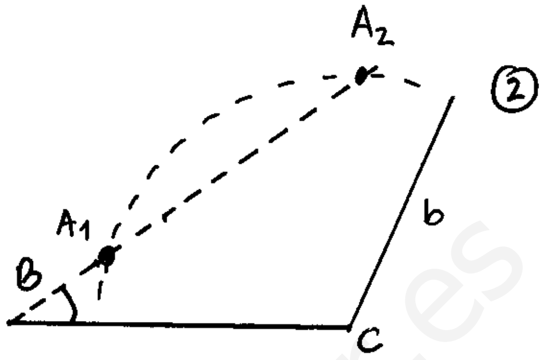
CASO IV. Datos: dos lados y un ángulo NO comprendido (a, b, B)

Este es el caso más "complejo" porque puede haber, dependiendo de los valores relativos de a, b y B, DOS soluciones, UNA solución o CERO soluciones.

MODO GRÁFICO.

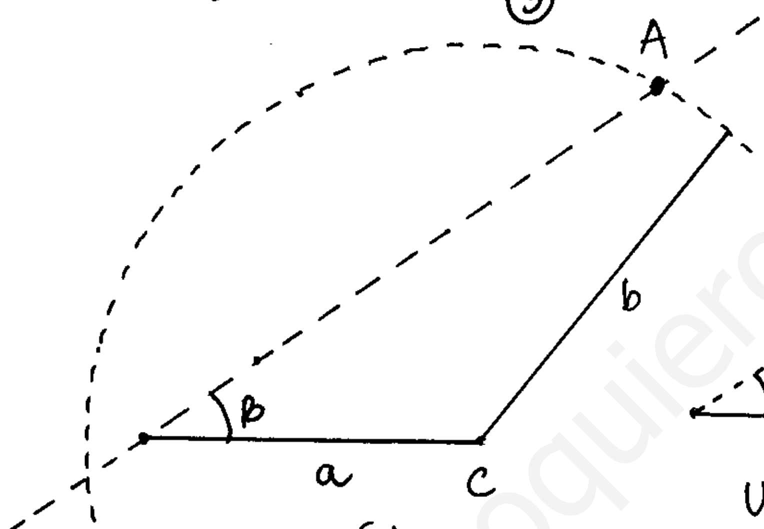
• si $B < 90°$.

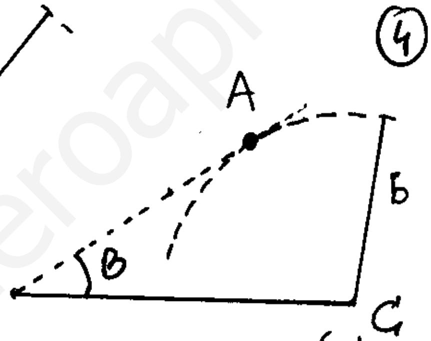




CERO SOLUCIONES

DOS SOLUCIONES $\triangle A_1BC_1$ y $\triangle A_2BC_2$

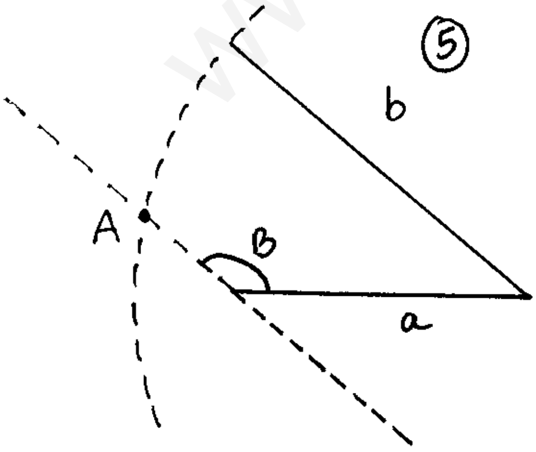


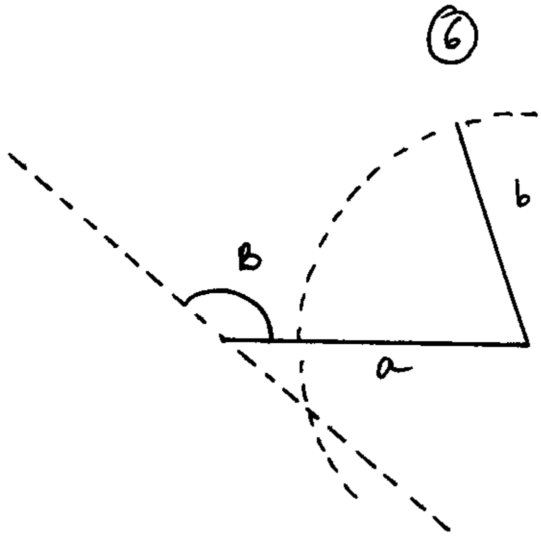


UNA SOLUCIÓN.

UNA SOLUCIÓN
$A = 90°$.

• si $B > 90°$





UNA SOLUCIÓN

CERO SOLUCIONES

MODO ANALÍTICO. $\boxed{(a=5,\ b=6,\ B=60^\circ)}$

- $a = 5 \quad A = 49{,}61^\circ$
  $b = 6 \quad B = 60^\circ$
  $c = 6{,}65. \quad C = 73{,}81^\circ$

  ¿A? Teorema del seno $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{6}$

  $\operatorname{sen} A = 0{,}72\ldots \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_1 = 46{,}19^\circ \\ A_2 = 180 - 46{,}19^\circ = 133{,}81^\circ \end{array}\right\}$ DOS SOLUCIONES POSIBLES.

  si $A_1 = 46{,}19^\circ \Rightarrow C_1 = 180^\circ - (A_1 + B) = 73{,}81^\circ$

  ¿c? Teorema del seno
  $\dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} \rightarrow c = \dfrac{b \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{6 \cdot \operatorname{sen} 73{,}81^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ} = 6{,}65$

  si $A_2 = 133{,}81^\circ \Rightarrow C_2$ no existe pues $A_2 + B > 180^\circ$.

  Tendríamos la situación (3) de la página 5/

- $\boxed{(a=5,\ b=4,\ B=60^\circ)}$

  $a = 5 \quad A =$
  $b = 4 \quad B = 60^\circ$
  $c = \quad C =$

  ¿A? Teorema del seno $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{4} = 1{,}08 > 1$

  $\Rightarrow$ NO HAY SOLUCIÓN.

  Tendríamos la situación (1) de la página 5/

- $\boxed{(a=8,\ b=4,\ B=30^\circ)}$

  ¿A? Teorema del seno $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{8 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{A = 90^\circ}$

  ¿C? $C = 180^\circ - (A + B) = 60^\circ$

  ¿c? Teorema del seno
  $\dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} \rightarrow \boxed{c = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{8 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 90^\circ} \simeq 6{,}93}$

$a = 8 \quad A = 90^\circ$
$b = 4 \quad B = 30^\circ$
$c = 6{,}93 \quad C = 60^\circ$

Tendríamos la situación ④ de la página 5/

- $\boxed{(a = 8,\ b = 4{,}2,\ B = 30^\circ)}$

¿A? Teorema del seno: $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{8 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ}{4{,}2}$

$\Rightarrow \boxed{A_1 = 72{,}25^\circ} \longrightarrow \boxed{C_1 = 180^\circ - (A_1 + B) = 77{,}75^\circ}$

$\Rightarrow$ ¿c? Teorema del seno

$\boxed{c_1 = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{8 \cdot \operatorname{sen} 77{,}75^\circ}{\operatorname{sen} 72{,}25^\circ} = 8{,}21}$

$\Rightarrow \boxed{A_2 = 180^\circ - 72{,}25^\circ = 107{,}75^\circ} \longrightarrow \boxed{C_2 = 180^\circ - (A_2 + B) = 42{,}25^\circ}$

$\Rightarrow$ ¿c? Teorema del seno

$\boxed{c_2 = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{8 \cdot \operatorname{sen} 42{,}25}{\operatorname{sen} 107{,}75^\circ} \simeq 5{,}65}$

Tendríamos DOS soluciones.

$$\left.\begin{array}{ll} a = 8 & A = 72{,}25^\circ \\ b = 4{,}2 & B = 30^\circ \\ c = 8{,}21 & C = 77{,}75^\circ \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{ll} a = 8 & A = 107{,}75^\circ \\ b = 4{,}2 & B = 30^\circ \\ c = 5{,}65 & C = 42{,}25^\circ \end{array}\right\}$$

Tendríamos la situación ② de la página 5/

- $\boxed{(a = 8,\ b = 5,\ B = 130^\circ)}$

¿A? Teorema del seno: $\operatorname{sen} A = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{8 \cdot \operatorname{sen} 130^\circ}{5} = 1{,}22 > 1$

$\Rightarrow$ no tiene solución.

Tendríamos la situación ⑥ de la página 5/

- $\boxed{(a=8,\ b=13,\ B=130^\circ)}$

¿A? Teorema del seno: $\text{sen}\,A = \dfrac{a\cdot \text{sen}\,B}{b} = \dfrac{8\cdot \text{sen}\,130^\circ}{13} \Rightarrow$

$A_1 = 28{,}13^\circ \rightarrow$ ¿C? $\boxed{C = 180-(A+B) = 21{,}87^\circ}$

$\rightarrow$ ¿c? Teorema del seno

$$\boxed{c = \frac{a\cdot \text{sen}\,C}{\text{sen}\,A} = \frac{8\cdot \text{sen}\,21{,}87^\circ}{\text{sen}\,28{,}13^\circ} \simeq 6{,}32}$$

$A_2 = 180 - 28{,}13^\circ = 151{,}87^\circ \Rightarrow$ no hay solución pues $A+B > 180^\circ$.

Tendremos 1 solución.

Tendríamos la situación 5 de la página 5/

OBSERVACIÓN.

He comenzado en todas las posibilidades de este caso calculando A mediante el teorema del coseno; otra opción sería emplear el teorema del coseno para calcular el lado c.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c \cos B$$

dado que conocemos a, b y B se generaría una ecuación de 2º grado en c y podríamos tener 0, 1 ó 2 soluciones.

$(a=8,\ b=4{,}2\ \ B=30^\circ)$

$$4{,}2^2 = 8^2 + c^2 - 2\cdot 8\cdot c\cdot \cos 30^\circ \iff \boxed{c^2 - 13{,}86c + 46{,}36 = 0}$$

$$\Rightarrow c = \frac{13{,}86 \pm \sqrt{13{,}86^2 - 4\cdot 1\cdot 46{,}36}}{2} = \begin{cases} c_1 = 5{,}64 \\ c_2 = 8{,}22 \end{cases}$$ DOS SOLUCIONES

si $c_1 = 5{,}64 \Rightarrow$ ¿C_1? Teorema del coseno

$$\cos C_1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{8^2+4{,}2^2-5{,}64^2}{2\cdot 8\cdot 4{,}2} \rightarrow \boxed{C_1 = 42{,}14^\circ}$$

$$\rightarrow \boxed{A_1 = 180^\circ - (B+C_1) = 107{,}86^\circ}$$

si $c_2 = 8{,}22 \Rightarrow$ ¿C? $\cos C_2 = \dfrac{8^2+4{,}2^2-8{,}22^2}{2\cdot 8\cdot 4{,}2} \longrightarrow \boxed{C_2 = 77{,}91^\circ}$

$$\rightarrow \boxed{A_2 = 180^\circ - (B+C_2) = 72{,}09^\circ}$$

Que es lo mismo que lo obtenido en la página 7/8