1º Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}, \alpha \in \left(\pi/2, \pi\right)$, calcula de forma exacta $\cos\alpha, \operatorname{tg}2\alpha$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

2º Resuelve la ecuación $\operatorname{tg}\left(3x + 45º\right) = \sqrt{3}$. Indica las soluciones en [0º, 360º].

3º Resuelve el sistema $\left.\begin{array}{r} \cos x - \operatorname{sen} y = 0 \\ \cos x + \operatorname{sen}^2 y = \frac{3}{4} \end{array}\right\}$

4º Demuestra que si A, B y C son los ángulos de un triángulo entonces
$\operatorname{tg}A + \operatorname{tg}B + \operatorname{tg}C = \operatorname{tg}A \cdot \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{tg}C$

5º Resuelve el triángulo ABC sabiendo que a=55 cm, b=70 cm y B=103º. Calcula su área, el radio de la circunferencia circunscrita, la mediana del vértice A y la altura del lado c.

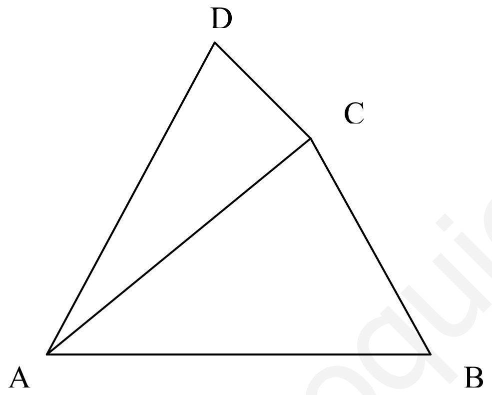
6º Observa la siguiente figura

Sabiendo que:

En ABC: A=30º y C=70º

En ACD: C=90º, A=20º y CD=10 cm

Calcula el resto de los elementos de cada triángulo y el área del polígono ABCD.



SOLUCIONES

1º Aplicando la relación fundamental de la trigonometría

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{-\sqrt{8}}{3} = \frac{-2\sqrt{2}}{3},$$

se toma el signo negativo porque α pertenece al segundo cuadrante.

Aplicando la fórmula del ángulo doble $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$, con

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\frac{-\sqrt{2}}{4}}{1-\left(\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\frac{-4\sqrt{2}}{7}$$

Aplicando la fórmula del ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{2}}=+\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}},$$

se toma el signo positivo porque si $\alpha\in\left(\pi/2,\pi\right)\Rightarrow\frac{\alpha}{2}\in\left(\pi/4,\pi/2\right)$.

Con la calculadora $\alpha=19,471^{\circ}$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha=\operatorname{sen}\left(180^{\circ}-\alpha\right)\Rightarrow\alpha=180^{\circ}-19,471^{\circ}=196,529^{\circ}=\frac{2\pi}{360^{\circ}}196,529^{\circ}=2,801\text{ rad}.$$

2º

$$\operatorname{tg}\left(3x+45^{\circ}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow 3x+45^{\circ}=60^{\circ}+360k,\ k\in Z,\Rightarrow x=\frac{15+360k}{3}=5+120k$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=0\Rightarrow x_0=5^{\circ}\\ k=1\Rightarrow x_1=125^{\circ}\\ k=2\Rightarrow x_2=245^{\circ}\end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\left(3x+45^{\circ}\right)=\sqrt{3}\Rightarrow 3x+45^{\circ}=180^{\circ}+60^{\circ}+360k,\ k\in Z,\Rightarrow x=\frac{195+360k}{3}=65+120k$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=0\Rightarrow x_0=65^{\circ}\\ k=1\Rightarrow x_1=185^{\circ}\\ k=2\Rightarrow x_2=305^{\circ}\end{cases}$$

3º

$$\cos x=\operatorname{sen}y\Rightarrow\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}^2y=\frac{3}{4}\Rightarrow\operatorname{sen}^2y+\operatorname{sen}y-\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow 4\operatorname{sen}^2y+4\operatorname{sen}y-3=0\Rightarrow$$

.

$$\operatorname{sen}y=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{8}=\begin{cases}\frac{1}{2}\\ \frac{-12}{8}=\frac{-3}{2}\end{cases}$$

la segunda solución no es válida pues es >-1.

$$\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k\\ y_2=\pi-\frac{\pi}{6}+2\pi k=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{cases}$$

$$\cos x=\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{\pi}{3}+2\pi k\\ x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi k\end{cases}$$, las soluciones del sistema serían:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, \begin{cases} x_1 = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ y_2 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$$

4º

Recuerda que $\mathrm{tg}(A+B) = \dfrac{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B}{1 - \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B}$

$$\boxed{\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B} = (1 - \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B) \cdot \mathrm{tg}(A+B) = (1 - \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B) \cdot \mathrm{tg}(180 - C) = (1 - \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B) \cdot (-\mathrm{tg}C)$$

$$= \boxed{-\mathrm{tg}C + \mathrm{tg}A \cdot \mathrm{tg}B \cdot \mathrm{tg}C}$$

5º

Aplicando el teorema del seno para calcular A

$$\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} \Rightarrow \mathrm{sen}A = \frac{a \cdot \mathrm{sen}B}{b} = \frac{55 \cdot \mathrm{sen}105^{\circ}}{70} = 0,765 \Rightarrow A = \begin{cases} A = 49,95^{\circ} \\ A' = 180 - A = 130,05^{\circ} \end{cases}$$

La 2^{a} solución no es válida pues A'+B=103º+130,05º > 180º.

C=180−A−B=27,05º

Aplicando el teorema del seno para calcular c:

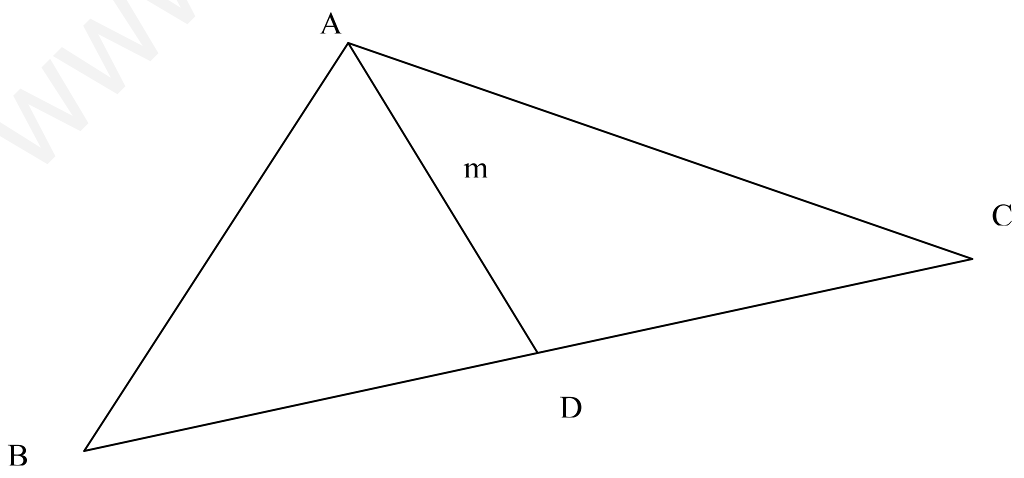
$$\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{c}{\mathrm{sen}C} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \mathrm{sen}C}{\mathrm{sen}A} = \frac{55 \cdot \mathrm{sen}27,05^{\circ}}{\mathrm{sen}49,95^{\circ}} \approx 32,47\mathrm{cm}$$

El área, S, del triángulo ABC es $S = \dfrac{1}{2} a \cdot b \cdot \mathrm{sen}C = \dfrac{1}{2} 55 \cdot 70 \cdot \mathrm{sen}27,05 \approx 875,428\ \mathrm{cm}^2$

El radio de la circunferencia circunscrita, R, es

$$\frac{a}{\mathrm{sen}A} = \frac{b}{\mathrm{sen}B} = \frac{c}{\mathrm{sen}C} = 2 \cdot R \Rightarrow R = \frac{a}{2 \cdot \mathrm{sen}A} = \frac{55}{2 \cdot \mathrm{sen}49,95} \approx 35,925\mathrm{cm}$$

La mediana del vértice A. Observa el dibujo:



En el triángulo BDA $a = \frac{BC}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5\text{cm}$ y aplicando el teorema del coseno en el triángulo BDA sobre el ángulo B:

$$m_a{}^2 = 27{,}5^2 + 32{,}67^2 - 2 \cdot 27{,}5 \cdot 32{,}67 \cdot \cos 103^\circ \Rightarrow m_a = 47{,}199\text{cm}$$

La altura del lado c, h_c, se calcula aplicando la fórmula del área

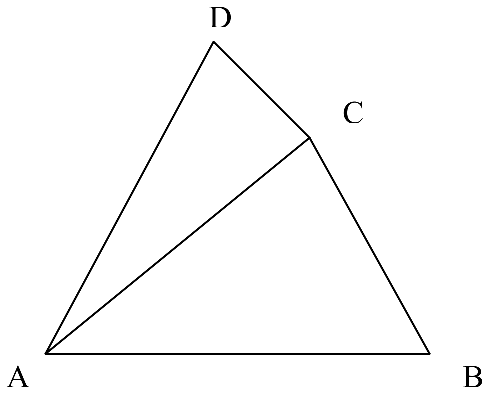
$$S = \frac{1}{2} c \cdot h_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 875{,}428}{32{,}47} = 53{,}922\text{cm}.$$

6º Observa la siguiente figura

Sabiendo que:

En ABC: A=30º y C=70º

En ACD: C=90º, A=20º y CD=10 cm



Calcula el resto de los elementos de cada triángulo y el área del polígono ABCD.

Triángulo ACD

El triángulo ACD es recto en C: $\text{sen}A = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \text{sen}20 = \frac{10}{AD} \Rightarrow AD = \frac{10}{\text{sen}20} = 29{,}238\text{cm}$

D=180-A-C=180-20-90=70º.

$$\cos A = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC = AD\cos A = 29{,}238\cos 20 = 27{,}474\text{cm}$$

Área de ACD, S1, $S_1 = \frac{1}{2} AC \cdot CD = \frac{1}{2} 27{,}474 \cdot 10 = 137{,}37\text{cm}^2$

Triángulo ABC

B=180-A-C=180-30-70=80º.

AB y BC se obtienen directamente mediante el teorema del seno, pues AC es 27,474 cm.

$$\frac{BC}{\text{sen}A} = \frac{AC}{\text{sen}B} \Rightarrow BC = \frac{AC \cdot \text{sen}A}{\text{sen}B} = \frac{27{,}474 \cdot \text{sen}30}{\text{sen}80} = 13{,}948\text{cm}$$

$$\frac{AB}{\text{sen}C} = \frac{AC}{\text{sen}B} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \text{sen}C}{\text{sen}B} = \frac{27{,}474 \cdot \text{sen}70}{\text{sen}80} = 26{,}215\text{cm}$$

Área de ACD, S2, $S_2 = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \text{sen}A = \frac{1}{2} 26{,}215 \cdot 27{,}474 \cdot \text{sen}30^\circ = 180{,}057\text{cm}^2$

El área de la figura ABCD es $S_1 + S_2 = 317{,}427\text{cm}^2$