1º Calcula de forma exacta:

a) tg15º b) sen195º c) cos75º d) sec(–15º)

2º Resuelve las ecuaciones:

a) $\cos 2x = 1 + senx$ b) $senx + \sqrt{2}\cos x = 1$

c) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = sen\left(-x + \frac{3\pi}{4}\right)$ d) $senx \cdot tgx + \frac{1}{2}\cos x = \frac{7}{4}$

3º Sabiendo que $\alpha \in II$ y que $tg\alpha = \frac{-3}{2}$ determina de forma exacta

$sen2\alpha, tg\frac{\alpha}{2}, \cos\left(90^{o} - \frac{\alpha}{2}\right)\ y\ sen\left(2\alpha + 45^{o}\right)$.

4º Resuelve los siguientes triángulos. Obtén su área (emplea al menos 3 procedimientos) y el radio de la circunferencia circunscrita.

a) a = 8, b = 7 y C = 48º.
b) a = 8, b = 6 y c = 12.
c) a = 3, b = 5 y A = 30º.
d) a = 7, A = 40º y C = 110º.

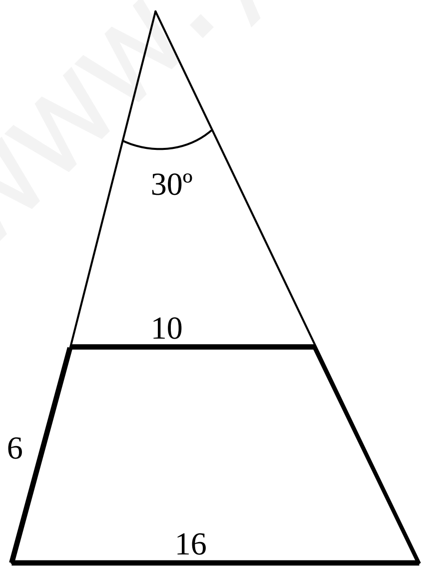
5º Indica qué triángulo es obtusángulo sin resolverlo:

a) 4, 6 y 8; b) 5, 7 y 8; c) 10, 13 y 20.

6º Desde los puntos C y D que distan 400 metros, y que están a un lado del río se observan dos puntos A y B que están al otro lado. Se miden los siguientes ángulos: ACD = 70º, BCD = 30º, ADC = 43º y BDC = 5º. Determina la distancia entre los puntos A y B.

7º La cima de un risco se observa desde el punto A con un ángulo de elevación de 45º, y dicha visual forma un ángulo de 70º con la visual del otro punto B situado 250 metros de A. Desde el punto B la visual de la cima forma un ángulo de 65º con la visual del punto A.. Halla la altura del risco sabiendo que A y B están a nivel del mar.

8º Calcula el área del trapecio:



1º

$tg\,15^\circ$

• Método 1.

Fórmulas $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

$tg\,45^\circ = 1 \quad tg\,30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

$$tg15^\circ = tg(45^\circ-30^\circ) = \frac{tg45^\circ - tg30^\circ}{1+tg45^\circ\cdot tg30^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{\cancel{3}}}{\frac{3+\sqrt{3}}{\cancel{3}}}$$

cuentas

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{3^2-2\cdot3\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{3^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}$$

$$= \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}. \Rightarrow \boxed{tg\,15^\circ = 2-\sqrt{3}}$$

• Método 2

Fórmulas $tg(\alpha-\beta)$, $tg\,60^\circ = \sqrt{3}$, $tg\,45^\circ = 1$.

$$tg\,15^\circ = tg(60-45^\circ) = \frac{tg60^\circ - tg45^\circ}{1+tg60^\circ\cdot tg45^\circ} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

racionalizando se llega a $2-\sqrt{3}$.

• Método 3

Fórmulas $tg\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, $tg\,30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$tg\,15^\circ = tg\frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos30^\circ}{1+\cos30^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{2+\sqrt{3}}{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$$

racionalizando el ~~de~~ radicando.

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{2^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3} = 7-4\sqrt{3}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{7-4\sqrt{3}}.$$

Observa que $7-4\cdot\sqrt{3} = 4+3-4\cdot\sqrt{3} = 2^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^2$.

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg} 15^\circ = \sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}}.$$

b) sen 195°.

observa que $195^\circ = 180+15^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 195^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ+15^\circ) = -\operatorname{sen} 15^\circ$.

Fórmula: $\operatorname{sen}(\alpha+180^\circ) = -\operatorname{sen}\alpha$.

¿sen 15°? Ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}\frac{30^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}.$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} 195^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

c) cos 75°.

Fórmulas. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen} 45^\circ \quad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ+45^\circ) = \cos 30^\circ\cdot\cos 45^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ\cdot\operatorname{sen} 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

d) $\sec(-15^\circ) = \dfrac{1}{\cos(-15^\circ)}$

Fórmulas:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. $\quad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}} \quad \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sec(-15^\circ) = \frac{1}{\cos(-15^\circ)} = \frac{1}{\cos 15^\circ}$$

$$\cos 15^\circ = +\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = +\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

(se toma el signo + porque 15° está en el 1er cuadrante).

$$\Rightarrow \sec(-15^\circ) = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

racionalizando: $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dfrac{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$.

$$= \frac{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \sec(-15^\circ) = 2\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3}) = 2\cdot\sqrt{\underbrace{(2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})}_{4-3=1}\cdot(2-\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sec(-15^\circ) = 2\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

2º

a) fórmulas: $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ (ángulo doble)

$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ (relación fundamental de la trigonometría)

$$\boxed{\cos 2x = 1 + \operatorname{sen} x} \iff \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen} x \iff$$

$$\underbrace{1 - \operatorname{sen}^2 x}_{\cos^2 x} - \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen} x \iff 1 - 2\cdot \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen} x \iff$$

$$(1) \quad \boxed{-2\cdot \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x} \iff$$

$$2\cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 0 \iff \boxed{\operatorname{sen} x \cdot (2\cdot \operatorname{sen} x + 1) = 0.} \quad (2)$$

Un producto es cero cuando algún factor es cero, por lo tanto, la ecuación (2) conduce a 2 ecuaciones:

$$\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = 0 + 2\pi k \text{ ó } \pi + 2\pi k \iff \pi k. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$2\cdot \operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\pi/6 + 2\pi k \text{ y } \pi - (-\pi/6) + 2\pi k.$$

Soluciones:

$$x_1 = \pi \cdot k$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observación: si en la ecuación (1) simplificamos sen x eliminamos un conjunto de soluciones: aquellas que hacen $\boxed{\operatorname{sen} x = 0}$

2º

b) $\boxed{\operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cdot\cos x = 1.}$

Se transforma la ecuación en un sistema añadiendo la identidad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \sqrt{2}\cdot\cos x &= 1 \\ \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 - \sqrt{2}\cdot\cos x \qquad \text{(sustitución)}$$

$$\cos^2 x + (1-\sqrt{2}\cdot\cos x)^2 = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x + \cancel{1} - 2\sqrt{2}\cdot\cos x + 2\cdot\cos^2 x = \cancel{1}$$

$$\boxed{3\cdot\cos^2 x - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos x = 0} \quad (1)$$

Factor común a $\cos x$.

$$\cos x\cdot\left(3\cdot\cos x - 2\sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 3\cdot\cos x - 2\sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \pi/2 + 360\cdot k \quad y \quad x = -90^\circ + 360\cdot k.$$

$$3\cdot\cos x - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow x \simeq 19^\circ + 360\cdot k \quad y \quad -19^\circ + 360\cdot k.$$

Soluciones:

$x_1 = 90 + 360k$

$x_2 = -90 + 360k$

$x_3 \simeq 19 + 360k$

$x_4 = -19 + 360\cdot k \qquad k\in\mathbb{Z}.$

Si en la ecuación (1) hubiésemos simplificado el "$\cos x$" habríamos eliminado todas las soluciones de $\cos x = 0$.

Al comprobar las soluciones verás que son válidas todas salvo x_3

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)$$

La idea será buscar una ecuación equivalente del tipo $\cos\alpha = \cos\beta$ ó $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$.

Recuerda:

- $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ó $\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

  (el coseno de un ángulo coincide con el seno de su suplementario y viceversa).

- $\cos x = \cos y \Rightarrow \begin{cases} x = y + 2\pi k \\ x = -y + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$ HAY DOS FAMILIAS DE SOLUCIONES

  $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y \Rightarrow \begin{cases} x = y + 2\pi k \\ x = \pi - y + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$

Para nuestro problema (elijo el COSENO).

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]. \Rightarrow$$

$$3x-\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}-\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)+2\pi k \qquad (1)$$

$$3x-\frac{\pi}{5} = -\left[\frac{\pi}{2}-\left(-x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]+2\pi k \qquad (2).$$

Ecuación (1):

$$3x-\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}+x-\frac{3\pi}{4}+2\pi k \iff 2x = \frac{-\pi}{20}+2\pi k \Rightarrow x = \frac{-\pi}{40}+\pi k$$

Ecuación (2)

$$3x-\frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{2}-x+\frac{3\pi}{4}+2\pi k \iff 4x = \frac{9\pi}{20}+2\pi k \Rightarrow x = \frac{9\pi}{80}+\frac{\pi k}{2}.$$

Soluciones:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{-\pi}{40}+\pi k \\ x &= \frac{9\pi}{80}+\frac{\pi}{2}k, \quad k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{7}{4}}$$

Eliminamos los denominadores multiplicando ambos miembros por 4.

$$4\cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x + 2\cos x = 7 \iff$$

$$4\cdot \operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2\cos x = 7 \iff$$ multiplicamos por $\cos x$ en ambos miembros.

$$\boxed{4\cdot \operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 7\cdot\cos x.} \quad (1)$$

Empleamos la relación fundamental de la trigonometría $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ para expresar la ecuación (1) en términos de una sola razón trigonométrica.

$$4\cdot(1-\cos^2 x) + 2\cdot\cos^2 x = 7\cdot\cos x \iff$$

$$4 - 4\cdot\cos^2 x + 2\cos^2 x = 7\cdot\cos x \iff$$

$$-2\cdot\cos^2 x - 7\cdot\cos x + 4 = 0 \iff \boxed{2\cdot\cos^2 x + 7\cdot\cos x - 4 = 0} \quad (2)$$

La ecuación (2) es de 2º grado siendo la incógnita $\boxed{\cos x}$:

$$\cos x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2} = \frac{-7\pm\sqrt{81}}{4} = \frac{-7\pm 9}{4} = \begin{cases} \frac{-7+9}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-7-9}{4} = -4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad \text{y} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}.}$$

$\cos x = -4 \Rightarrow$ no tiene pues $-1 \leq \cos x \leq +1$.

$$\boxed{\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha.}$$

Necesitamos averiguar el seno y el coseno de α.

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{4}{13}}.$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{-2\sqrt{13}}{13}}$$, (se toma el signo $\ominus$ pues $\alpha \in \text{II}$).

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \longrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{\frac{9}{13}} = +\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = +\frac{3\sqrt{13}}{13}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{-2\sqrt{13}}{13} = \frac{-12}{13} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{-12}{13}}$$

Comprobación con la calculadora.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3}{2} \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-3}{2}\right) = -56{,}31^\circ \quad y \quad -56{,}31 + 180 = 123{,}69^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 123{,}69^\circ}$$

$\operatorname{sen} 2\alpha = -0{,}92$.

$$\boxed{\cos\left(90-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

¿SIGNO?

si $\alpha\in \text{II} \Leftrightarrow 90^\circ<\alpha<180^\circ \Leftrightarrow \frac{90^\circ}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{180^\circ}{2} \Leftrightarrow \boxed{45^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}>0$ pues $\frac{\alpha}{2}\in \text{I}$.

El $\cos\alpha$ se obtuvo en el otro apartado.

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\frac{-2\sqrt{13}}{13}}{2}}=+\sqrt{\frac{13+2\sqrt{13}}{26}}}$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha+45^\circ)=\operatorname{sen}2\alpha\cdot\cos45^\circ+\cos2\alpha\cdot\operatorname{sen}45^\circ=$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(2\alpha+45^\circ)=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos45^\circ+(\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha)\cdot\operatorname{sen}45^\circ.}$$

sustituyendo valores

$$\operatorname{sen}(2\alpha+45^\circ)=\cancel{2}\cdot\frac{3\cancel{\sqrt{13}}}{\cancel{13}}\cdot\frac{-2\cancel{\sqrt{13}}}{13}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}+\left(\frac{4}{13}-\frac{9}{13}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{-6\sqrt{2}}{13}-\frac{5\sqrt{2}}{26}=\frac{-12\sqrt{2}}{26}-\frac{5\sqrt{2}}{26}=\frac{-17\sqrt{2}}{26}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(2\alpha+45^\circ)=\frac{-17\sqrt{2}}{26}}$$

Caso: dos lados y un ángulo comprendido. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{1 solución}}$

$a = 8 \qquad A = 74{,}48^\circ$.

$b = 7 \qquad B = 57{,}52^\circ$

$c = 6{,}17 \qquad C = 48^\circ$.

¿c? Teorema del coseno: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow$

$$c^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 48^\circ \rightarrow \boxed{c = \sqrt{38{,}057\ldots} \simeq 6{,}17}$$

¿A? Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \Rightarrow \operatorname{sen} A = \frac{a \cdot \operatorname{sen} C}{c} = 0{,}963\ldots \Rightarrow A = \operatorname{arcsen} 0{,}9\ldots =$$

dos soluciones: $A_1 = 74{,}48^\circ$

$A_2 = 180 - 74{,}48^\circ = 105{,}52^\circ$.

¿B? Tendríamos, en principio, dos posibilidades:

si $A = 74{,}48^\circ \longrightarrow B = 180 - A - C = 57{,}52^\circ$.

si $A = 105{,}52^\circ \longrightarrow B = 180 - A - C = 26{,}48^\circ$.

esta segunda posibilidad es incompatible con el triángulo:

$B < C$ y $b > c$.

Solución: la escrita al inicio.

Área: $S = \frac{1}{2} ab \cdot \operatorname{sen} C \simeq 20{,}81\ u^2$.

Caso: conocidos los 3 lados. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{1 solución.}}$

$a = 8 \quad A = 36{,}34^\circ$
$b = 6 \quad B = 26{,}38^\circ$
$c = 12 \quad C = 117{,}28^\circ.$

¿A? Teorema del coseno.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0{,}805\ldots$$

$$\Rightarrow A = \arccos(0{,}805\ldots) \simeq 36{,}34^\circ.$$

¿B? Teorema del coseno

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 0{,}895\ldots$$

$$\Rightarrow B = \arccos(0{,}895\ldots) \simeq 26{,}38^\circ.$$

¿C? $C = 180 - A - B = 117{,}28^\circ.$

Área: $S = \dfrac{abc}{4R}$

$\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R.$

$$\left.\begin{matrix} S = \dfrac{abc}{4R} \\ \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R \end{matrix}\right\} R = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{sen} A} = \frac{8}{2 \cdot \operatorname{sen} 36{,}34^\circ} \simeq 6{,}75.$$

$$\Rightarrow S = \frac{8 \cdot 6 \cdot 12}{4 \cdot 6{,}75} \simeq 21{,}33 \ u^2$$

Caso: dos lados y un ángulo no comprendido. $\Rightarrow$ $\boxed{0, 1 \text{ ó } 2 \text{ soluciones}}$

$a = 3$	$A = 30°$	$a = 3$	$A = 30°$
$b = 5$	$B = 56{,}44°$	$b = 5$	$B = 123{,}56°$
$c = 5{,}99$	$C = 93{,}56°$	$c = 2{,}67$	$C' = 26{,}44°$

¿B? teorema del seno.

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \Rightarrow \operatorname{sen} B = \frac{b \cdot \operatorname{sen} A}{a} = 0{,}8\hat{3} \Rightarrow B = \operatorname{arcsen}(0{,}8\hat{3})$$

$\rightarrow$ hay 2 soluciones:

$B = 56{,}44°$. y $B' = 180 - B = 180° - 56{,}44° = 123{,}56°$.

- si $B = 56{,}44° \rightarrow C = 180 - A - B = 93{,}56°$.

  $\rightarrow$ ¿c? $\dfrac{c}{\operatorname{sen} C} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} \rightarrow c = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \simeq 5{,}99$.

- si $B' = 123{,}56° \rightarrow C' = 180 - A - B' = 26{,}44°$.

  $\rightarrow$ ¿c? $\dfrac{c}{\operatorname{sen} C'} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} \rightarrow c = \dfrac{a \cdot \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A} \simeq 2{,}67$

Ambas soluciones son posibles.

$$S = \frac{b^2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C}{2 \cdot \operatorname{sen} B} \simeq 7{,}49 \text{ u}^2.$$

$$S' = \frac{b^2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C'}{2 \cdot \operatorname{sen} B'} \simeq 3{,}34 \text{ u}^2.$$

Caso: un lado y dos ángulos $\rightarrow$ $\boxed{\text{1 solución}}$

$a = 7 \quad A = 40^\circ$

$b = 10{,}23 \quad B = 110^\circ$

$c = 5{,}45 \quad C = 30^\circ$

¿C? $C = 180 - A - B = 30^\circ$.

¿b? teorema del seno

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \Rightarrow b = \frac{a \cdot \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \simeq 10{,}23.$$

¿c? teorema del seno

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{a}{\operatorname{sen} A} \Rightarrow c = \frac{a \cdot \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \simeq 5{,}45.$$

Área. Fórmula de Herón:

$$\left.\begin{array}{l} S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b)(p-c)} \\ p = \frac{a+b+c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{S = 17{,}90\ u^2.}$$

Argumentos:

① Teorema del coseno

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \boxed{\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}$$

② El signo del coseno indica qué tipo de ángulo es:

$$\cos A = \begin{cases} >0 \rightarrow A \text{ es agudo } (A \in \mathrm{I}) \\ =0 \rightarrow A \text{ es recto.} \\ <0 \rightarrow A \text{ es obtuso. } (A \in \mathrm{II}) \end{cases}$$

③ A mayor lado mayor ángulo opuesto. ⇒ basta calcular el coseno del mayor ángulo.

a) 4, 6 y 8: mayor lado 8. $\Rightarrow \cos A = \dfrac{4^2+6^2-8^2}{2\cdot 4\cdot 6} = \dfrac{-12}{48} < 0$

⇒ obtusángulo

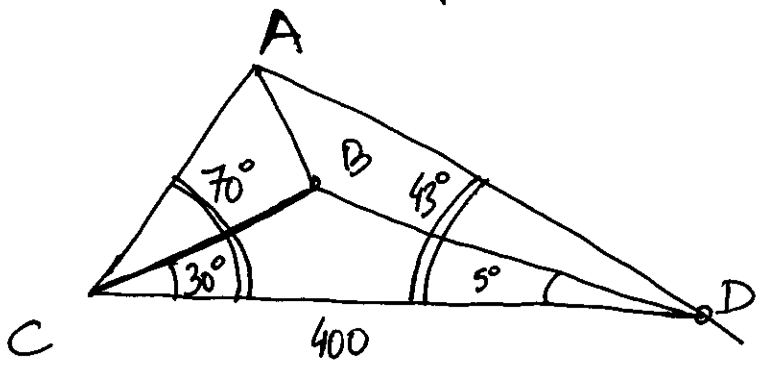
b) 5, 7 y 8: mayor lado 8. $\Rightarrow \cos A = \dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot 7\cdot 6} = \dfrac{20}{84} > 0$

⇒ acutángulo.

c) 10, 13 y 20: mayor lado 20: $\rightarrow \cos A = \dfrac{10^2+13^2-20^2}{2\cdot 10\cdot 13} = \dfrac{-131}{260} < 0$

⇒ obtusángulo.

Con los datos del problema la situación sería la siguiente:

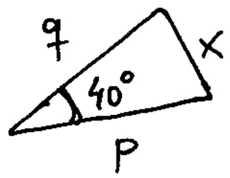


Llamaremos $AB = x$ (distancia problema)

$CB = p$, $AC = q$.

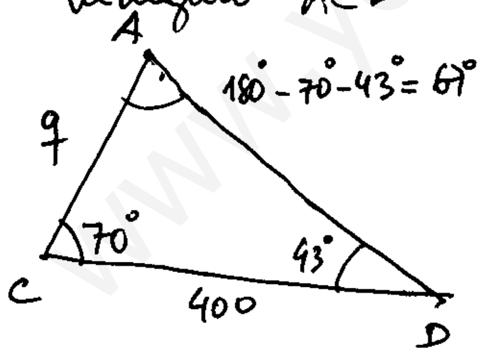
Procedimiento:

triángulo $\widehat{CAB}$

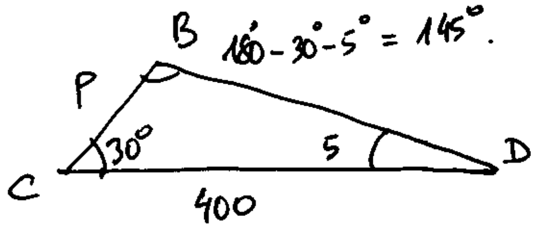


si conociera p y q se obtendría x mediante el teorema del coseno.

triángulo $\widehat{ACD}$



triángulo $\widehat{BCD}$



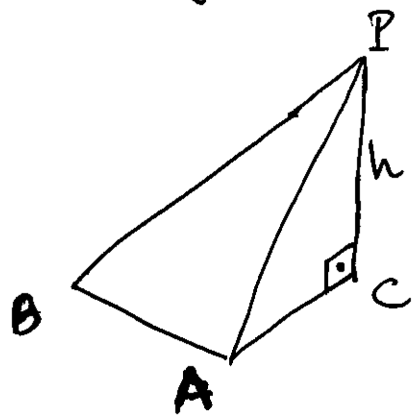
$$\frac{q}{\operatorname{sen} 43°} = \frac{400}{\operatorname{sen} 67°} \rightarrow \boxed{q \simeq 30{,}31 \text{ m}}$$

$$\frac{p}{\operatorname{sen} 5°} = \frac{400}{\operatorname{sen} 145°} \rightarrow p \simeq 60{,}78.$$

$\Rightarrow$ en el triángulo $\widehat{CAB}$ se aplica el teorema del coseno.

$$x^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cdot \cos 40 \longrightarrow x^2 \simeq 1790{,}42\ldots \Rightarrow \boxed{x \simeq 42{,}31 \text{ m}}$$

Se corresponde con el caso de la altura de un punto inaccesible.
Un dibujo de la situación podría ser el siguiente:



P = cima del risco (inaccesible)
C ≡ proyección de P sobre el plano de nivel del mar (inaccesible)

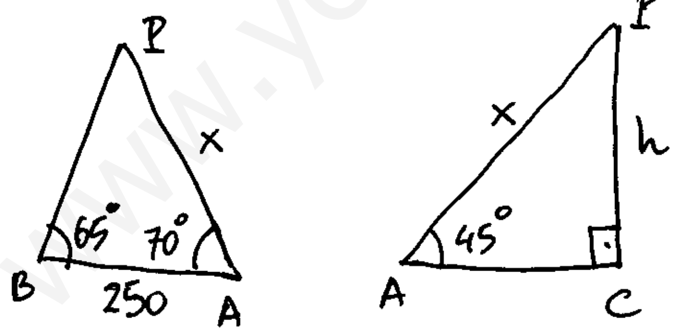
Datos:

$AB = 250$ m $\quad PAC = 45^\circ \quad PBA = 65^\circ \quad BAP = 70^\circ$.

Como C está en el plano del "nivel del mar", donde están A y B el ángulo $ACP = 90^\circ$.

Observa los triángulos

$\widehat{ABP}$



h = altura del risco.

Si en el triángulo $\widehat{ABP}$ obtengo el valor de x podría hallar h en el triángulo $\widehat{ACP}$.

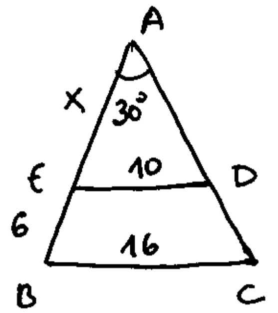
¿x? en $\widehat{ABP}$ el ángulo P es $180 - A - B = 180^\circ - 65^\circ - 70^\circ = 45^\circ$.

$\Rightarrow$ teorema del seno

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 65^\circ} = \frac{250}{\operatorname{sen} 45^\circ} \rightarrow x = \frac{250 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ}{\operatorname{sen} 45^\circ} \simeq 320{,}43 \text{ m}.$$

¿h? $\cos 45^\circ = \dfrac{h}{x} \rightarrow \boxed{h = x \cdot \cos 45^\circ = 320{,}43 \cdot \cos 45^\circ \simeq 226{,}58 \text{ m}}$

Calculemos 1º las dimensiones del triángulo $\widehat{ABC}$

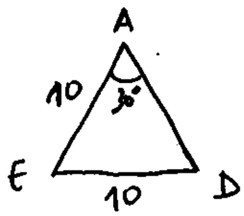


Observa que $\widehat{ABC} \sim \widehat{AED}$ pues $ED \parallel BC$

llamemos $x = AE$.

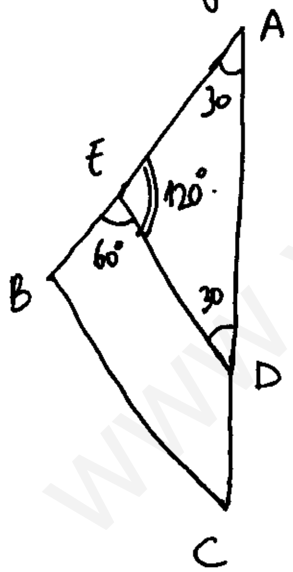
$$\frac{16}{10} = \frac{6+x}{x} \Rightarrow 16x = 60 + 10x \Rightarrow 6x = 60 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\widehat{AED} \text{ es isósceles}}$ y además está mal dibujado (!)

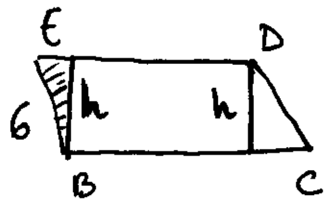


$\Rightarrow \hat{D} = 30° \Rightarrow E = 120°$. (!) obtuso.

Un dibujo más realista sería:



Extraigamos el trapecio $\overline{EBDC}$



$$\text{sen}\, 60° = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \text{sen}\, 60°.$$

En el triángulo sombreado h es la altura del trapecio.

El área del trapecio será:

$$\boxed{S = \frac{16+10}{2} \cdot 6 \cdot \text{sen}\, 60° = 39\sqrt{3}\ u^2}$$