CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)
(Cada respuesta incorrecta resta 0,2 puntos)

- El $\lim_{x\to 0}(\text{sen}\, x \ln x)$ vale:

a) 0; b) −1
c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$ tiene:

a) Un máximo en x = 2.
b) Un punto de inflexión en x = 2.
c) Un punto de inflexión en x = −1.

- La función $f(x) = e^{-x} - senx$ cumple:

a) Corta al eje OX en algún punto x > π/2
b) Corta al eje OX en algún punto x < −π/2
c) Nunca corta al eje OX

- La función $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ tiene:

a) Una asíntota vertical y otra horizontal.
b) Sólo una asíntota horizontal.
c) No tiene asíntotas.

- El polinomio de Taylor de 4º grado de la función $f(x) = x\ln(1+x)$ en el punto $x = 0$ es:

a) $P(x) = (x+1) + \dfrac{(x+1)^2}{2!} + \dfrac{(x+1)^3}{3!} + \dfrac{(x+1)^4}{4!}$

b) $P(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$

c) $P(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{3}x^4$

- La integral $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{x^4}dx$ verifica:

a) No puede calcularse ya que uno de sus límites es ∞.
b) Converge a 3.
c) Converge a 1/3.

- Usando el polinomio de Taylor de grado dos de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se puede estimar que:

a) $\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{200} = 1{,}095$

b) $\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{250} = 1{,}096$

c) Ninguna de las anteriores.

- La ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

a) $y - 2 = 2(x-2)$

b) $y = \dfrac{1}{2}x + 2$

c) Ninguna de las anteriores,
dicha ecuación es: _____________

- La discontinuidad, en el punto $x = 0$, de la función $f(x) = \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$ puede evitarse definiendo:

a) $f(0) = 1/4$
b) $f(0) = 3/2$
c) Dicha discontinuidad no puede evitarse.

- La función $f(x) = \begin{cases} 5 + 2sen(ax) & \text{si } x \le 0 \\ ax^2 + bx + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ verifica:

a) Es continua en $x = 0$ cuando $a = 5/2$.
b) Es derivable en $x = 0$ cuando $b = 2a = 5$.
c) En $x = 0$ nunca puede ser derivable.

www.yoquieroaprobar.es

PROBLEMAS:

1. Haz un esbozo de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (0,75 puntos) y calcula el área encerrada entre la curva de $f(x)$ y el eje OX (0,75 puntos).

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$ (0,6 puntos) b) $\int 2\ln x dx$ (0,5 puntos)

c) $\int \frac{(x-3)^2}{4x} dx$ (0,4 puntos)

3. Dada la función $f(x) = \frac{(x+1)^2}{e^x}$, halla:

a) Dominio de definición y asíntotas. (0,3 puntos)
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,7 puntos)
c) Extremos locales y los puntos de inflexión. (0,5 puntos)
d) Un esbozo gráfico.(0,5 puntos)

www.yoquieroaprobar.es

PREGUNTAS DE TEST

1. El $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{sen} x \ln x)$ vale:

a) 0; b) –1 c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{senx}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-sen^2 x}{x\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2senx\cos x}{\cos x - xsenx} = \frac{0}{1} = 0$$

2. La función $f(x) = (x+3)(x-2)^4$ tiene:

a) Un máximo en x = 2.
b) Un punto de inflexión en x = 2.
c) Un punto de inflexión en x = –1.

Solución:

$$f(x) = (x+3)(x-2)^4 \Rightarrow f'(x) = (x-2)^4 + 4(x+3)(x-2)^3 = 5(x-2)^3(x+2)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 15(x-2)^2(x+2) + 5(x-2)^3 = 20(x-2)^2(x+1)$$

3. La función $f(x) = e^{-x} - senx$ cumple:

a) Corta al eje OX en algún punto x > π/2
b) Corta al eje OX en algún punto x < –π/2
c) Nunca corta al eje OX

Solución:

La función es continua en todo **R**; por tanto cumple el teorema de Bolzano desde –∞ hasta +∞.

Como $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} - sen\frac{\pi}{2} = \frac{1}{e^{\pi/2}} - 1 < 0$ y $f(\pi) = e^{-\pi} - sen\pi = \frac{1}{e^{\pi}} > 0 \Rightarrow$ la función se anula en algún entre π/2 y π.

4. La función $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ tiene:

a) Una asíntota vertical y otra horizontal.
b) Sólo una asíntota horizontal.
c) No tiene asíntotas.

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{senx}{1} = 0 \Rightarrow \text{No hay A.V.}$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1-\cos x}{x} = 0 \Rightarrow \text{y = 0 es una asíntota horizontal.}$$

www.yoquieroaprobar.es

5. El polinomio de Taylor de 4º grado de la función $f(x) = x\ln(1+x)$ en el punto $x = 0$ es:

a) $P(x) = (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \frac{(x+1)^4}{4!}$

b) $P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

c) $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$

Solución:

$$f(x) = x\ln(1+x) \Rightarrow \ f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \ \Rightarrow \ f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f'''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \ \Rightarrow \ \Rightarrow \ f^{(4}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{6}{(1+x)^8}$$

Luego: $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = 2$; $f'''(0) = -3$; $f^{(4}(x) = 8$

Por tanto, $P(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4$

6. La integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}dx$ verifica:

a) No puede calcularse ya que uno de sus límites es ∞.
b) Converge a 3.
c) Converge a 1/3.

Solución:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4}dx \ = \ \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^4}dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{3x^3} \right)\Bigg|_1^t = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{-1}{3t^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

7. Usando el polinomio de Taylor de grado dos de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ se puede estimar que:

a) $\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{200} = 1{,}095$

b) $\sqrt{1{,}2} \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{250} = 1{,}096$

c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Calculamos el polinomio de Taylor de grado 2 $f(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow \ f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \ \Rightarrow$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} \Rightarrow$

Luego: $f(0) = 1$; $f'(0) = \frac{1}{2}$; $f''(0) = -\frac{1}{4}$;

Por tanto, $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^2$

Para $x = 0{,}2 = 1/5$, se tiene $f(0{,}2) = \sqrt{0{,}2+1} = \sqrt{1{,}2} \approx P(0{,}2) = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2$

www.yoquieroaprobar.es

8. La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$ es:

a) $y-2=2(x-2)$

b) $y=\dfrac{1}{2}x+2$

c) Ninguna de las anteriores, dicha ecuación es: ____________

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente a la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ viene dada por la expresión: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

En este caso: $f(x)=\dfrac{4}{x} \Rightarrow f(2)=2$; $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2} \Rightarrow f'(2)=-1$.

Por tanto, la recta tangente es: $y-2=-(x-2) \Rightarrow y=-x+4$

9. La discontinuidad, en el punto $x = 0$, de la función $f(x)=\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$ puede evitarse definiendo:

a) $f(0)=1/4$ b) $f(0)=3/2$

c) Dicha discontinuidad no puede evitarse.

Solución:

La discontinuidad se evita definiendo $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}+3e^{-3x}}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Luego $f(0)=3/2$

10. La función $f(x)=\begin{cases}5+2sen(ax) & \text{si } x\le 0\\ ax^2+bx+b & \text{si } x>0\end{cases}$ verifica:

a) Es continua en $x = 0$ cuando $a = 5/2$.

b) Es derivable en $x = 0$ cuando $b=2a=5$.

c) En x = 0 nunca puede ser derivable.

Solución:

Continuidad en $x = 0$:

Si $x\to 0^-$, $f(x)\to 5$

Si $x\to 0^+$, $f(x)\to b \Rightarrow b=5$.

Por tanto, $f(x)=\begin{cases}5+2sen(ax) & \text{si } x\le 0\\ ax^2+5x+5 & \text{si } x>0\end{cases}$.

Derivabilidad:

Salvo en $x = 0$, $f'(x)=\begin{cases}2a\cos(ax) & \text{si } x<0\\ 2ax+5 & \text{si } x>0\end{cases}$

Si $x\to 0^-$, $f'(x)\to 2a$

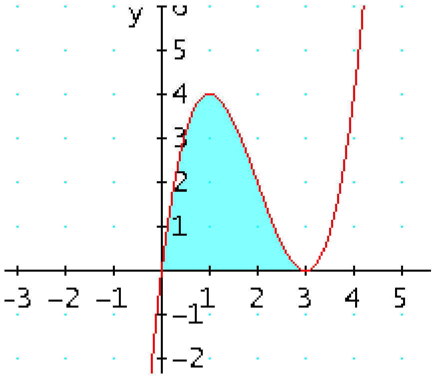
Si $x\to 0^+$, $f'(x)\to 5 \Rightarrow 2a=5 \Rightarrow a=\dfrac{5}{2}$.

www.yoquieroaprobar.es

PROBLEMAS:

1. Haz un esbozo de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ (0,75 puntos) y calcula el área encerrada entre la curva de $f(x)$ y el eje OX (0,75 puntos).

Solución:
$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = 3.$
Si x < 1, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece.
Si 1 < x < 3, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece $\Rightarrow$ En x = 1 hay máximo.
Si x > 3, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece $\Rightarrow$ En x = 3 hay mínimo.
Algunos valores: (–1, –1), (0, 0), (1, 4), (3, 0), (4, 4)
El esbozo es el siguiente.



La función corta al eje en los puntos x = 0 y x = 3; por tanto, el área pedida vale

$$S = \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{27}{4}$$

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$ (0,6 puntos) b) $\int 2\ln x dx$ (0,5 puntos) c) $\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx$ (0,4 puntos)

Solución:
a) Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$1 = A(x+3) + B(x-2)$

si $x = 2$: 1 = 5A $\Rightarrow$ A = 1/5

si $x = -3$: 1 = –5B $\Rightarrow$ B = –1/5

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 6} = \int \left(\frac{1/5}{x-2} - \frac{1/5}{x+3}\right)dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2}dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{1}{5}\ln(x-2) - \frac{1}{5}\ln(x+3) + c$$

b) Una primitiva de esa función puede calcularse por el método de partes.

Tomando: $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

se tiene que,

$$2\int \ln x dx = 2\left(x\ln x - \int dx\right) = 2(x\ln x - x) + c$$

c) Operando:

$$\int \frac{(x-3)^2}{4x}dx = \int \frac{x^2 - 6x + 9}{4x}dx = \int \frac{1}{4}xdx - \int \frac{3}{2}dx + \int \frac{9}{4x}dx = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\ln x + c$$

www.yoquieroaprobar.es

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{e^x}$, halla:

a) Dominio de definición y asíntotas. (0,3 puntos)
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,7 puntos)
c) Extremos locales y los puntos de inflexión. (0,5 puntos)
d) Un esbozo gráfico.(0,5 puntos)

Solución:
a) Dominio = **R**: el denominador nunca se anula.

Tiene una asíntota horizontal, pues: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x+1)}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$

La asíntota es la recta $y = 0$.

b) Derivando:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}}=\frac{(x+1)(1-x)}{e^x}$$

La derivada se anula en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.
Si $x < -1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece.
Si $-1 < x < 1$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ crece. En consecuencia, en $x = -1$ se tiene un mínimo.
Si $x > 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decrece. Por tanto, en $x = 1$ se tiene un máximo.

c) (Para la determinación de máximos y mínimos también puede utilizarse la derivada segunda.)

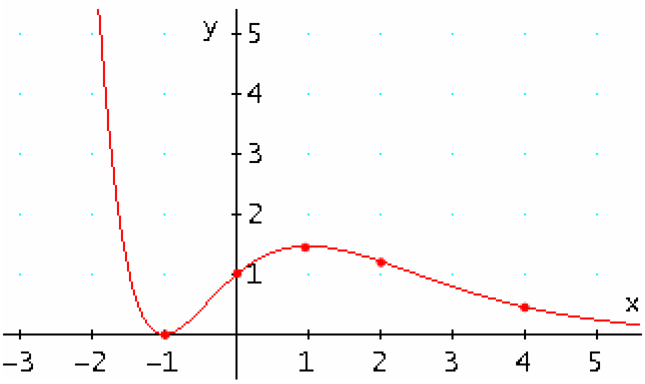
$$f''(x)=\frac{-2xe^x-(1-x^2)e^x}{e^{2x}}=\frac{x^2-2x-1}{e^x}$$

Como $f''(-1) = 2/e^2 > 0$, en $x = -1$ hay un mínimo.
Por ser $f''(1) = -2/e^2 < 0$, en $x = 1$ se tiene un máximo.
La derivada segunda se anula cuando $x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1+\sqrt{2}$ y $x=1-\sqrt{2}$. Para esos valores de x se tienen sendos puntos de inflexión.

d) Calculando el valor de $f(x)$ en algunos puntos se puede hacer un esbozo de la curva.

x	-1	0	1	2	4
$f(x)$	0	1	4/e = 1,47	$8/e^2$ = 1,08	$25/e^4$ = 0,46

Con todo lo anterior se traza la siguiente curva.



www.yoquieroaprobar.es