

**CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)**

(Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos)

- La continuidad, en el punto  $x = 0$ , de la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{px} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\cos x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se consigue cuando:

- a)  $p = 1$
  - b)  $p = \ln 2$
  - c) Ninguna de las anteriores.
- Los infinitésimos, en  $x = 1$ ,  $f(x) = px \ln x$  y  $g(x) = x - e^{1-x}$  son equivalentes.
    - a) Si  $p \neq 0$
    - b) Si  $p = 2$
    - c) Ninguna de las anteriores.
  - La función  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$  tiene en el intervalo  $[1, 3]$ :
    - a) Un máximo
    - b) Un mínimo.
    - c) Un punto de inflexión.
  - La ecuación de la recta tangente a  $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$  en el punto  $(0, f(0))$  es:
    - a)  $y = x - 1$
    - b)  $y = -2x$
    - c) Ninguna de las anteriores, su ecuación es: \_\_\_\_\_
  - La función  $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$  corta al eje OX:
    - a) Una sola vez.
    - b) Exactamente dos veces.
    - c) Ninguna de las anteriores.

- La función  $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$  tiene:

- a) Un máximo y un mínimo.
- b) Dos puntos de inflexión.
- c) Ninguna de las anteriores.

- La función  $f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x^2), & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ , en

el punto  $x = 0$ , es:

- a) Continua pero no derivable.
- b) Ni continua ni derivable.
- c) Continua y derivable.

- La integral  $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$ :

- a) Converge a  $3/8$
- b) Converge a  $-1/6$ .
- c) Ninguna de las anteriores.

- El área del recinto plano encerrado entre la curvas de ecuación  $y = \frac{x^2}{4} - x$ , y el eje

OX, vale:

- a)  $2/5$
- b)  $8/3$
- c) Ninguna de las anteriores, el área vale \_\_\_\_\_

- La función  $f(x) = x^4 e^{-x}$  verifica:

- a) Siempre es decreciente.
- b) Tiene un máximo y un mínimo.
- c) Tiene una asíntota vertical

### PROBLEMAS:

1. Se considera la curva definida por la función  $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ . Se pide:

- Dominio de definición, cortes con los ejes y simetrías. (0,5 puntos)
- Asíntotas. (0,5 puntos)
- Intervalos de crecimiento de la función. ¿Tiene extremos la función? (0,5 puntos)
- Representación aproximada de la curva. (0,5 puntos)

2. a) Halla el polinomio de Taylor de grado 3, en el punto  $x = 1$ , para la función  $f(x) = e^{1-x^2}$  (0,8 puntos)

b) Utilizando el polinomio hallado calcula el valor aproximado de  $f(1,1)$ . (0,2 puntos)

3. Calcula las siguientes integrales:

a)  $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx$  (0,3 puntos)

b)  $\int_0^2 (5 - x^2 - (x-1)^3) dx$  (0,3 puntos)

c)  $\int x^7 e^{x^4} dx$  (0,7 puntos)

d)  $\int \frac{1}{x^2 + x} dx$  (0,7 puntos)

1. La continuidad, en el punto  $x = 0$ , de la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - 1}{px} & \text{si } x < 0 \\ \frac{\cos x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

se consigue cuando:

- a)  $p = 1$
- b)  $p = \ln 2$**
- c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Para que una función sea continua en  $x = a$  es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.

Por la izquierda:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x - 1}{px} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \text{(aplicando la regla de L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^x \ln 2}{p} = \frac{\ln 2}{p} \end{aligned}$$

Por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Será continua cuando  $\frac{\ln 2}{p} = 1 \Rightarrow p = \ln 2$ .

2. Los infinitésimos, en  $x = 1$ ,  $f(x) = px \ln x$  y  $g(x) = x - e^{1-x}$  son equivalentes.

- a) Si  $p \neq 0$
- b) Si  $p = 2$**
- c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{px \ln x}{x - e^{1-x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = (L'H) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p \ln x + p}{1 + e^{1-x}} = \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow p = 2$$

3. La función  $f(x) = \frac{\text{sen } x}{2 - \cos x}$  tiene en el intervalo  $[1, 3]$ :

- a) Un máximo**
- b) Un mínimo.
- c) Un punto de inflexión.

Sol.

$$f'(x) = \frac{2 \cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0 \Rightarrow 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 0,5 \Rightarrow x = \pi/3$$

$$f''(x) = \frac{2\operatorname{sen}x(\cos x + 1)}{(\cos x - 2)^3} \rightarrow f''(\pi/3) = \frac{2\operatorname{sen}(\pi/3)(\cos(\pi/3) + 1)}{(\cos(\pi/3) - 2)^3} = \frac{(+)}{(-)} < 0 \Rightarrow$$

Máximo

4. La ecuación de la recta tangente a  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$  en el punto  $(0, f(0))$  es:

- a)  $y = x - 1$
- b)  $y = -2x$
- c) **Ninguna de las anteriores, su ecuación es:  $y = 2x$**

Sol

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

Se tiene:  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 2$ .

La recta tangente será:  $y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$

5. La función  $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$  corta al eje OX:

- a) **Una sola vez.**
- b) Exactamente dos veces.
- c) Ninguna de las anteriores.

Sol.

Como  $f(0) = -1$  y  $f(1) = 2$ , por el teorema de Bolzano se deduce que la función corta al eje OX en el intervalo  $(0, 1)$ . Luego la ecuación  $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$  tiene una raíz entre 0 y 1.

Como  $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$  para todo  $x$ , la función será siempre creciente. En consecuencia, sólo corta una vez al eje OX. Luego la ecuación  $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$  sólo tiene una raíz real.

6. La función  $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$  tiene:

- a) Un máximo y un mínimo.
- b) **Dos puntos de inflexión.**
- c) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Derivadas:

$$\begin{aligned} f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 &\Rightarrow f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 \\ &\Rightarrow f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x \end{aligned}$$

Puntos singulares:

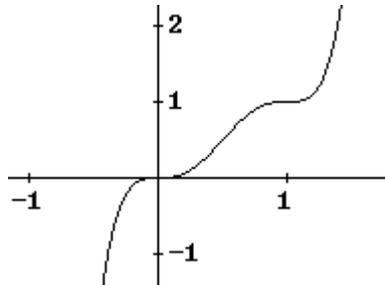
$$\begin{aligned} f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2 = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow x = 0, x = 1 \end{aligned}$$

Como  $f''(0) = 0$  y  $f''(1) = 0$ , en  $x = 0$  y  $x = 1$  puede haber puntos de inflexión. Para determinarlo hay que estudiar la derivada tercera, que es:

$$f'''(x) = 360x^2 - 360x + 60$$

Como  $f'''(0) = 60 \neq 0$  y  $f'''(1) = 60 \neq 0$ , en  $x = 0$  y en  $x = 1$  se tienen sendos puntos de inflexión (con tangente horizontal). En consecuencia, esta función no tiene máximos ni mínimos.

La función es así:



7. La función  $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x^2), & x > 0 \\ x^2, & x \leq 0 \end{cases}$ , en el punto  $x = 0$ , es:

- a) Continua pero no derivable.
- b) Ni continua ni derivable.
- c) **Continua y derivable.**

Solución:

La función dada está definida siempre. También es continua y derivable en todos los puntos, salvo, quizás, en  $x = 0$ .

Estudiamos la continuidad en  $x = 0$ .

$$\text{Si } x \rightarrow 0^-, f(x) = x^2 \rightarrow 0$$

$$\text{Si } x \rightarrow 0^+, f(x) = \ln(1+x^2) \rightarrow 0$$

Como ambos límites coinciden, la función es continua en  $x = 0$ .

Estudiamos la derivabilidad en  $x = 0$ .

Salvo en  $x = 0$ , su derivada vale:  $f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2}, & x > 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$

$$\text{Si } x \rightarrow 0^-, f'(x) = 2x \rightarrow 0$$

$$\text{Si } x \rightarrow 0^+, f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \rightarrow 0$$

Como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable también en  $x = 0$ .

8. La integral  $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$ :

- a) Converge a  $3/8$
- b) Converge a  $-1/6$ .
- c) **Ninguna de las anteriores.**

Solución:

Es una integral impropia, pues la función tiene una discontinuidad infinita en  $x = 1$ .

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^3} dx + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{-1}{2(x-1)^2} \Big|_0^t + \lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{-1}{2(x-1)^2} \Big|_t^3 = \lim_{t \rightarrow 1^-} \left( \frac{-1}{2(t-1)^2} + \frac{1}{2} \right) + \lim_{t \rightarrow 1^+} \left( \frac{-1}{8} + \frac{1}{2(t-1)^2} \right) \rightarrow \zeta?$$

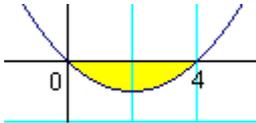
9. El área del recinto plano encerrado entre la curva de ecuación  $y = \frac{x^2}{4} - x$ , y el eje OX, vale:

OX, vale:

- a) 2/5
- b) 8/3**
- c) Ninguna de las anteriores, el área vale \_\_\_\_\_

**Solución:**

El área encerrada curvas es la sombreada.



$$A = - \int_0^4 \left( \frac{x^2}{4} - x \right) dx = \left( -\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^4 = -\frac{64}{12} + 8 = \frac{8}{3}$$

10. La función  $f(x) = x^4 e^{-x}$  verifica:

- a) Siempre es decreciente.
- b) Tiene un máximo y un mínimo.**
- c) Tiene una asíntota vertical

**Solución:**

Hacemos la derivada:

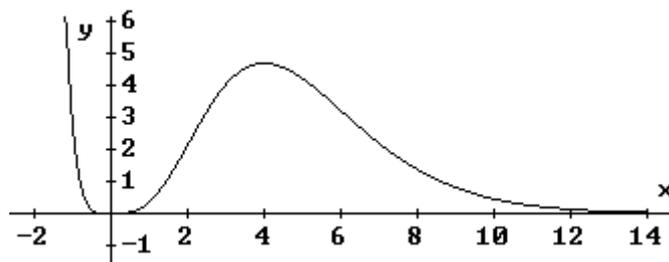
$$f(x) = x^4 e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3 e^{-x} (4 - x)$$

La derivada se anula cuando  $x = 0$  y  $x = 4$ , por tanto debemos estudiar lo que pasa en los intervalos:  $x < 0$ ;  $0 < x < 4$ ;  $x > 4$ .

- si  $x < 0$ ,  $f'(x) < 0 \Rightarrow f$  es decreciente;
- si  $0 < x < 4$ ,  $f'(x) > 0 \Rightarrow f$  es creciente;
- si  $x > 4$ ,  $f'(x) < 0 \Rightarrow f$  es decreciente;

Como la derivada se anula en  $x = 0$ , es decreciente si  $x < 0$  y creciente cuando  $x > 0$ , en  $x = 0$  la función tiene un mínimo. De manera análoga concluimos que en  $x = 4$  se da un máximo.

Su gráfica es así:



## Problemas

1. Se considera la curva definida por la función:  $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ . Se pide:
- Dominio de definición, cortes con los ejes y simetrías. (0,5 puntos)
  - Asíntotas. (0,5 puntos)
  - Intervalos de crecimiento de la función. ¿Tiene extremos la función? (0,5 puntos)
  - Representación aproximada de la curva. (0,5 puntos)

Solución:

a). La función está definida siempre, pues el denominador no se anula en ningún caso.  
Corte ejes:

$$\text{si } x = 0 \Rightarrow y = 0 \rightarrow \text{punto } (0, 0)$$

$$\text{si } y = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \text{se obtiene el mismo punto.}$$

La función es simétrica respecto del origen de coordenadas (impar), pues

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x^3}{x^2 + 1} = -f(x)$$

b) Tiene una asíntota oblicua ( $y = mx + n$ ), pues:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 + 1)} = 1 \text{ y}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0$$

La asíntota es la recta  $y = x$ .

$$\text{Como } y = \frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1},$$

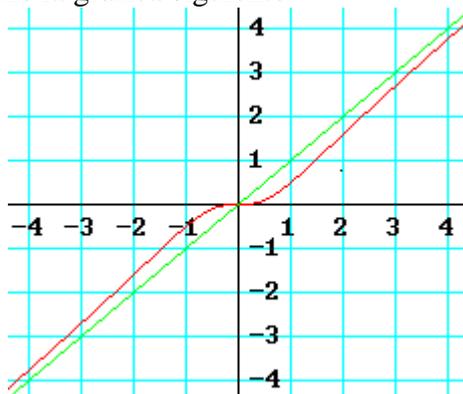
cuando  $x \rightarrow +\infty$ , la curva va por debajo de la asíntota ( $-\frac{x}{x^2 + 1}$  resta)

cuando  $x \rightarrow -\infty$ , la curva va por encima de la asíntota ( $-\frac{x}{x^2 + 1}$  suma)

$$\text{c) Derivamos: } y' = \frac{3x^2(x^2 + 1) - (x^3 \cdot 2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Salvo en  $x = 0$ , la derivada siempre es positiva  $\Rightarrow$  la función es creciente siempre. En consecuencia no tiene extremos. En  $x = 0$  hay un punto de inflexión con tangente horizontal.

d) Algunos valores de la curva son:  $(0, 0)$ ,  $(1, \frac{1}{2})$ ,  $(2, \frac{8}{5})$ ,  $(3, \frac{27}{10})$ , y sus simétricos. Representándolos se obtiene la gráfica siguiente.



2. (1 punto) Halla el polinomio de Taylor de grado 3, en el punto  $x = 1$ , para la función

$$f(x) = e^{1-x^2} \quad (0,8 \text{ puntos})$$

Utilizando el polinomio hallado calcula el valor aproximado de  $f(1,1)$ . (0,2 puntos)

Solución:

$$f(x) = e^{1-x^2} \Rightarrow f(1) = 1$$

$$f'(x) = -2xe^{1-x^2} \Rightarrow f'(1) = -2$$

$$f''(x) = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = (4x^2 - 2)e^{1-x^2} \Rightarrow f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = (12x - 8x^3)e^{1-x^2} \Rightarrow f'''(1) = 4$$

$$\text{Por tanto, } P(x) = 1 - 2(x-1) + \frac{2}{2}(x-1)^2 + \frac{4}{6}(x-1)^3 = 1 - 2(x-1) + (x-1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3$$

$$\bullet \quad f(1,1) \approx P(1,1) = 1 - 2 \cdot 0,1 + 0,1^2 + \frac{2}{3} \cdot 0,1^3 = 0,810666\dots$$

3. Calcula las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx \quad \text{b) } \int_0^2 (5 - x^2 - (x-1)^3) dx$$

$$\text{c) } \int x^7 e^{x^4} dx \quad \text{d) } \int \frac{1}{x^2 + x} dx$$

Solución:

$$\text{a) } \int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \frac{2}{10} \int \frac{10x}{2\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + c$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_0^2 (5 - x^2 - (x-1)^3) dx &= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2 - 3x + 6) dx = \\ &= \left[ -\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = -4 + \frac{16}{3} - 6 + 12 = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \int x^7 e^{x^4} dx$$

Por partes:

$$u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$$

$$dv = x^3 e^{x^4} dx \Rightarrow v = \frac{1}{4} e^{x^4}$$

Por tanto:

$$\int x^7 e^{x^4} dx = x^4 \frac{1}{4} e^{x^4} - \int x^3 e^{x^4} dx = x^4 \frac{1}{4} e^{x^4} - \frac{1}{4} e^{x^4} + c$$

$$\text{d) } \int \frac{1}{x^2 + x} dx$$

$$\frac{1}{x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \Rightarrow 1 = A(x+1) + Bx \Rightarrow B = -1; A = 1$$

Por tanto:

$$\int \frac{1}{x^2 + x} dx = \int \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln x - \ln(x+1) + c$$