Análisis Matemático I EXAMEN FINAL

CUESTIONARIO DE RESPUESTA MÚLTIPLE (50%)

- La función $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{si } x\le 0\\ x-ax^2 & \text{si } x>0\end{cases}$ es derivable en toda la recta real:

a) Para cualquier valor de a.
b) Sólo si $a = -1$
c) Ninguna de las anteriores.

- El área encerrada entre las gráficas de la recta y = x + 2 y la parábola $y = x^2$, vale:

a) $\frac{7}{4}$ u^2 (unidades cuadradas) b) $\frac{11}{4}$ u^2
c) Ninguna de las anteriores, su valor es:

- La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, en el punto P de la curva de abscisa x = 3, es:

a) y = –5x + 22 b) y = –3x + 15
c) Ninguna de las anteriores.

- La integral $\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}dx$ vale:

a) 2/3
b) Es divergente
c) Ninguna de las anteriores.

- La gráfica de la función $f(x)=\frac{m}{1+x^2}$ tiene:

a) Un mínimo relativo si m > 0.
b) Dos puntos de inflexión si m ≠ 0.
c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x)=2+2x-e^x$, en el intervalo (0, 1), cumple:

a) Corta una vez al eje OX.
b) Tiene un máximo.
c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x)=\frac{2x-2}{x^2-px+1}$:

a) Es continua para todo valor de p >1.
b) Tiene una discontinuidad evitable si p = 2.
c) Ninguna de las anteriores.

- Los infinitésimos en x = 0, $f(x)=x\sin x$ y $g(x)=1-\cos x$ son:

a) Equivalentes.
b) Del mismo orden
c) Ninguna de las anteriores.

- La función $f(x)=xe^x$ es cóncava (∩) en el intervalo:

a) (–∞, –2)
b) (–∞, 2]
c) [2, +∞)

- La función $f(x)=x^5-5x^3$ tiene:

a) Dos máximos relativos.
b) Tres puntos de inflexión.
c) Ninguna de las anteriores.

PROBLEMAS:

1. Dada la función $f(x)=\frac{x^2+2x}{x-1}$

a) Indica su dominio, los puntos de corte con los ejes y sus asíntotas. (0,7 p).
b) Estudia su crecimiento y decrecimiento (0,5 p)
c) Sus máximos y mínimos; así como su concavidad y convexidad. (0,4 p)
d) Haz su representación gráfica. (0,4 p)

2. Calcula el polinomio de Taylor, de grado 3, de la función $f(x)=sen(x-1)$, en el punto x = 1. Utiliza el polinomio hallado para calcular aproximadamente sen 0,2. ¿Puede asegurarse que el error cometido es menor que $1/(24\cdot 5^4)$? ((1 punto)

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int\frac{x^3+3x^2-1}{2x^4}dx$ (0,3 p)

b) $\int xe^{2x}dx$ (0,7 p)

c) $\int(\text{sen } 2x-\cos 3x)dx$ (0,3 p)

d) $\int\frac{4}{x^2+x-2}dx$ (0,7 p)

SOLUCIONES

1. La función $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{si } x\le 0\\ x-ax^2 & \text{si } x>0\end{cases}$

es derivable en toda la recta real:

a) Para cualquier valor de a.
b) Sólo si $a = -1$.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. El único punto que presenta dificultades es x = 0.

- Continuidad en x = 0 (para que una función sea derivable es necesario que sea continua):

  Si x $\to 0^-$, f(x) = sen x $\to$ 0

  Si x $\to 0^+$, $f(x)=x-ax^2 \to 0$

Como los límites laterales coinciden, la función es continua para cualquier valor de a.

- Derivabilidad.

Salvo para x = 0, la función derivada es $f'(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x<0\\ 1-2ax & \text{si } x>0\end{cases}$

  Si x $\to 0^-$, f'(x) = cos x $\to$ 1

  Si x $\to 0^+$, $f'(x)=1-2ax \to 1$

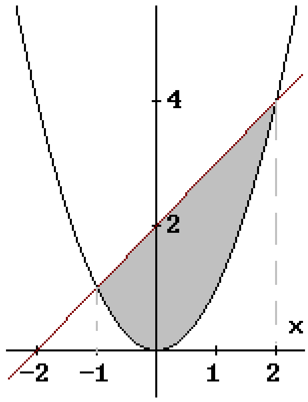
Como las derivadas laterales coinciden, independientemente del valor de a, la función dada es derivable siempre.

2. El área encerrada entre las gráficas de la recta y = x + 2 y la parábola $y=x^2$, vale:

a) $\frac{7}{4}$ u^2 (unidades cuadradas)   b) $\frac{11}{4}$ u^2 c) Ninguna de las anteriores, su valor es:

Sol. El área encerrada entre ambas curvas es la sombreada en la siguiente figura.

La parábola y la recta se cortan en los puntos las soluciones del sistema $\begin{cases}y=x+2\\ y=x^2\end{cases}$, que son (–1, 1) y (2, 4); puntos de abscisas x = –1 y x = 2.



Por tanto, el área pedida viene dada por la integral

$$\int_{-1}^{2}\left(x+2-x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=2+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}$$

3. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, en el punto P de la curva de abscisa x = 3, es:

a) y = –5x + 22   b) y = –3x + 15   c) Ninguna de las anteriores.

Sol. La ecuación de la recta tangente a f(x) en el punto (a, f(a)) es: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-2}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{2(x-2)-(2x+1)}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}$$

Se tiene: $f(3) = 7$, $f'(3) = -5$.

La recta tangente será: y – 7 = –5(x – 3) $\Rightarrow$ y = –5x + 22

4. La integral $\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx$ vale:

a) 2/3 b) Es divergente c) Ninguna de las anteriores.

Sol. La función es discontinua en x = 0. Por tanto:

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2} dx + \int_{0}^{3} \frac{1}{x^2} dx = \underset{c\to 0^-}{lím} \int_{-1}^{c} x^{-2} dx + \underset{c\to 0^+}{lím} \int_{c}^{3} x^{-2} dx =$$

$$\underset{c\to 0^-}{lím} \left.\frac{-1}{x}\right|_{-1}^{c} + \underset{c\to 0^+}{lím} \left.\frac{-1}{x}\right|_{c}^{3} = \underset{c\to 0^-}{lím}\left(-\frac{1}{c}-1\right) + \underset{c\to 0^+}{lím}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{c}\right) = \infty + \infty = \infty$$

5. La gráfica de la función $f(x) = \frac{m}{1+x^2}$ tiene:

a) Un mínimo relativo si m > 0.
b) Dos puntos de inflexión si m ≠ 0.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $f(x) = \frac{m}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2mx}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2m(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

- La derivada primera se anula si x = 0, independientemente del valor de m.

Si m > 0, $f''(0) < 0 \to$ se tendría un máximo.
Si m < 0, $f''(0) > 0 \to$ se tendría un mínimo.

- Si m ≠ 0, la derivada segunda se anula en $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y en $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Por tanto, hay dos puntos de inflexión.

6. La función $f(x) = 2 + 2x - e^x$, en el intervalo (0, 1), cumple:

a) Corta una vez al eje OX.
b) Tiene un máximo.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $f(x) = 2 + 2x - e^x \Rightarrow f'(x) = 2 - e^x \Rightarrow f''(x) = -e^x$

La derivada primera se anula si x = ln 2 ∈ (0, 1). Como $f''(\ln 2) < 0$, la función tendrá un máximo en x = ln 2.

7. La función $f(x) = \frac{2x-2}{x^2 - px + 1}$:

a) Es continua para todo valor de p >1.
b) Tiene una discontinuidad evitable si p = 2.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. Es discontinua en los ceros del denominador: $x^2 - px + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{p \pm \sqrt{p^2-4}}{2}$

Por tanto, si p > 2 o p < –2, la función tiene dos discontinuidades; si p = ±2, tiene una discontinuidad; en caso contrario es continua para todo x.

Para p = 2, la función es: $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+1}$, que es discontinua en x = 1.

Como $\underset{x\to 1}{lím} \frac{2x-2}{x^2-2x+1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \underset{x\to 1}{lím} \frac{2}{2x-2} = \infty$, la discontinuidad no puede evitarse.

8. Los infinitésimos en x = 0, $f(x) = x \sin x$ y $g(x) = 1 - \cos x$ son:

a) Equivalentes. b) Del mismo orden. c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ = (L´Hôpital) = $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right]$ = (L´Hôpital) =

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x - x\sin x}{\cos x} = 2$

9. La función $f(x) = xe^x$ es cóncava ($\cap$) en el intervalo:

a) $(-\infty, -2)$ b) $(-\infty, 2]$ c) $[2, +\infty)$

Sol. $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = (1+x)e^x \Rightarrow f''(x) = (2+x)e^x$

$f''(x) = 0$ si x = –2 ⇒ en x = –2 hay P.I.

Si x < –2, $f''(x) < 0$ ⇒ la función es cóncava ($\cap$)

Si x > –2, $f''(x) > 0$ ⇒ la función es convexa ($\cup$)

10. La función $f(x) = x^5 - 5x^3$ tiene:

a) Dos máximos relativos.
b) Tres puntos de inflexión.
c) Ninguna de las anteriores.

Sol. $f(x) = x^5 - 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 15x^2 \Rightarrow f''(x) = 20x^3 - 30x$

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 0 \Rightarrow$ x = 0; $x = \pm\sqrt{3}$

$f''(x) = 20x^3 - 30x = 0 \Rightarrow$ x = 0; $x = \pm\sqrt{3/2}$ ⇒ Hay tres punto de inflexión, pues

$f'''(x) = 60x^2 - 30 \neq 0$ en esos tres puntos.

Como: $f''(+\sqrt{3}) > 0$, en $x = +\sqrt{3}$ se tiene un máximo;

$f''(-\sqrt{3}) < 0$, en $x = -\sqrt{3}$ se tiene un mínimo;

PROBLEMAS

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x-1}$

a) Indica su dominio, los puntos de corte con los ejes y sus asíntotas. (0,7 p).
b) Estudia su crecimiento y decrecimiento (0,5 p)
c) Sus máximos y mínimos; así como su concavidad y convexidad. (0,4 p)
d) Haz su representación gráfica. (0,4 p)

Sol.

a) Dom = **R** – {1}

Si x = 0, $f(0) = 0$. Punto (0, 0)

Si $f(x) = 0$ ⇒ $x^2 + 2x = 0$ ⇒ x = 0, x = –2. Puntos (0, 0) y (–2, 0).

→ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 + 2x}{x-1} = \infty$, la recta x = 1 es asíntota vertical.

→ Tiene una asíntota oblicua:

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2 - x} = 1$; $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = 3$

La recta y = x + 3 es la asíntota oblicua.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1} \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$

Con esto:

Si $x < 1 - \sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece.

Si $1 - \sqrt{3} < x < 1$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece.

Si $1 < x < 1 + \sqrt{3}$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decrece.

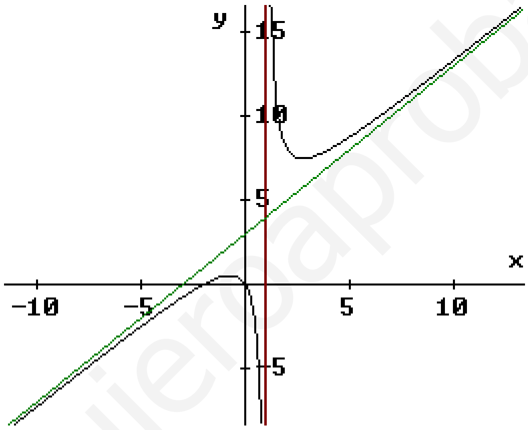
Si $x > 1 + \sqrt{3}$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ crece.

c) $f''(x) = \dfrac{6}{(x-1)^3}$, que no se anula en ningún punto de su dominio.

Si x < 1, $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava ($\cap$). En consecuencia, en $x = 1 - \sqrt{3}$ hay máximo.

Si x > 1, $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es convexa ($\cup$). En consecuencia, en $x = 1 + \sqrt{3}$ hay mínimo

d) La gráfica es:



2. Calcula el polinomio de Taylor, de grado 3, de la función $f(x) = sen(x-1)$, en el punto x = 1. Utiliza el polinomio hallado para calcular aproximadamente sen 0,2. ¿Puede asegurarse que el error cometido es menor que $1/(24 \cdot 5^4)$? (1 punto)

Sol.

$f(x) = sen(x-1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f'(x) = \cos(x-1) \Rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -sen(x-1) \Rightarrow f''(1) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x-1) \Rightarrow f'''(1) = -1$

$f^{iv)}(x) = sen(x-1) \Rightarrow \quad f^{iv)}(x_0) = sen(x_0 - 1)$

Luego: $P(x) = (x-1) - \dfrac{(x-1)^3}{6}$ (0,5 puntos)

Por tanto: $sen(0{,}2) = sen(1{,}2 - 1) \approx P(1{,}2) = 0{,}2 - \dfrac{0{,}2^3}{6}$ = 0,198666… = 149/750 (0,3 puntos)

El error exacto es $R(x) = \dfrac{sen(x_0 - 1)}{4!}(x-1)^4 <$ (para x = 1,2) $< \dfrac{1}{24}(1{,}2-1)^4 = \dfrac{1}{24} \cdot \dfrac{1}{5^4}$ (0,2 puntos)

3. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^3+3x^2-1}{2x^4}dx$ (0,3 p) b) $\int xe^{2x}dx$ (0,7 p)

c) $\int (\text{sen } 2x - \cos 3x)dx$ (0,3 p) d) $\int \frac{4}{x^2+x-2}dx$ (0,7 p)

Sol.

a) $\int \frac{x^3+3x^2-1}{2x^4}dx =$

$$\int\left(\frac{1}{2x}+\frac{3}{2x^2}-\frac{1}{2x^4}\right)dx = \int\left(\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x^{-2}-\frac{1}{2}x^{-4}\right)dx = \frac{1}{2}\ln x - \frac{3}{2x}+\frac{1}{6x^3}+c$$

b) Tomando: u = x $\Rightarrow$ du = dx

$$e^{2x}dx = dv \Rightarrow \int e^{2x}dx = \int dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Luego: $\int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}+c$

c) $\int (\text{sen } 2x - \cos 3x)dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\text{sen } 3x + c$

d) La primitiva de la función se halla por descomposición en fracciones simples.

$$\frac{4}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)} \Rightarrow 4 = A(x-1)+B(x+2)$$

Para x = 1: 4 = 3B $\Rightarrow$ B = 4/3

Para x = –2: 4 = –3A $\Rightarrow$ A = –4/3

Con esto:

$$\int \frac{4}{x^2+x-2}dx = \int\left(\frac{-4/3}{x+2}+\frac{4/3}{x-1}\right)dx = -\frac{4}{3}\ln(x+2)+\frac{4}{3}\ln(x-1)+c$$