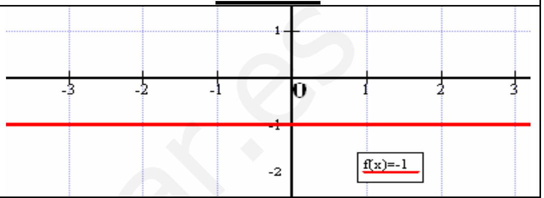
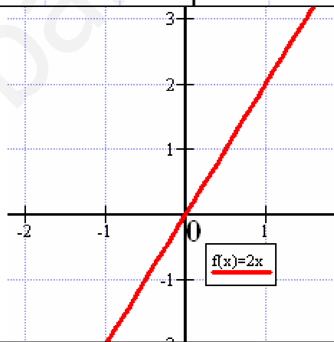
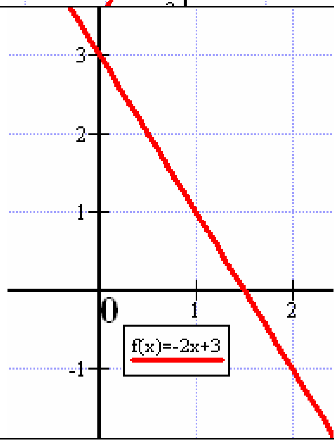
1. ***FUNCIONES AFINES Y LINEALES***

Son funciones cuya gráfica es una recta (como ya vimos en geometría). De manera general son de la forma $f(x) = mx + n$ ó $y = mx + n$. Ya sabemos por Geometría que:

m : pendiente de la recta, que es la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la recta con el eje OX positivo, $m = tg\alpha$

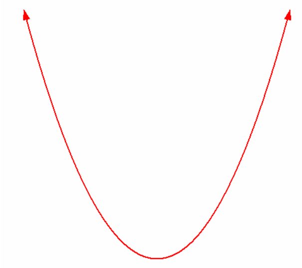
n : ordenada en el origen. La recta pasa por el punto $(0, n)$

Para representarlas gráficamente es suficiente con una tabla de valores.
En la siguiente tabla se representan los diferentes tipos:

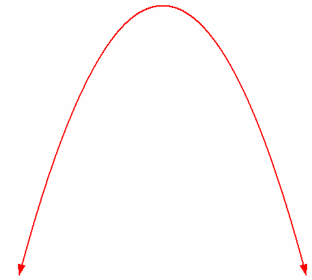
Tipo	**Ejemplo**	**Gráfica**
Constantes $f(x) = k$ Su gráfica es una recta horizontal $m = 0$	$y = -1$ Dom(y) = R Im(y) = {-1}	
Lineales $f(x) = mx$ Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas $n = 0$	$f(x) = 2x$ Dom(f) = R Im(f) = R	
Afines $f(x) = mx + n$ Su gráfica es una recta inclinada $m \neq 0$ y $n \neq 0$	$f(x) = -2x + 3$ Dom(f) = R Im(f) = R	

2. ***FUNCIONES CUADRÁTICAS***

Son funciones en las cuales su criterio es un polinomio de 2º grado, es decir, de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$
Su dominio es todo R y su gráfica es una parábola, que es una figura como la siguiente:



ó

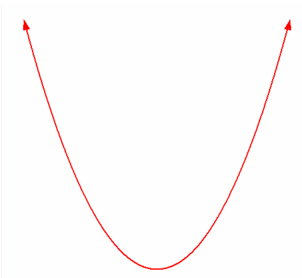


Para dibujarlas no es suficiente con una tabla de valores, sino que es necesario calcularle las siguientes propiedades, que las obtenemos a partir de su criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$:

a) <u>Estudio de la curvatura u orientación</u>

Lo calculamos a partir del signo del coeficiente a

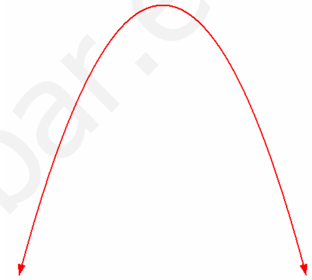
$a > 0$



Se dice que la parábola es CONVEXA

ó

$a < 0$



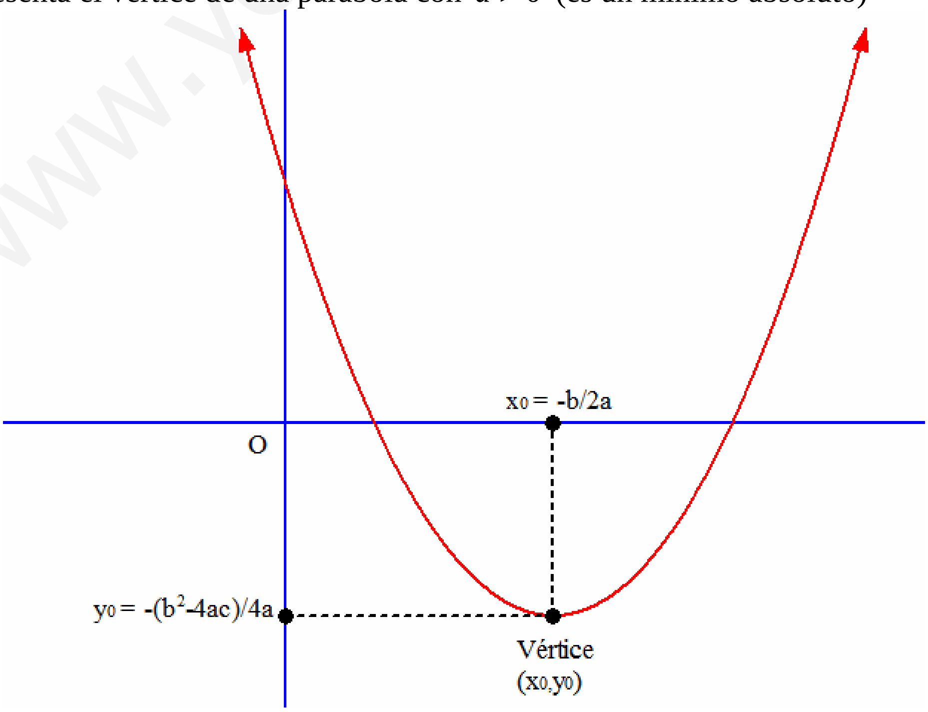
Se dice que la parábola es CÓNCAVA

b) <u>Cálculo del vértice</u>

El vértice es el punto máximo o mínimo de la función cuadrática (máximo cuando $a < 0$ y mínimo cuando $a > 0$)

El vértice V tiene por abscisa $x_0 = \frac{-b}{2a}$, y su ordenada y_0 se obtiene de la ecuación, resultando, para quien quiera saberlo de memoria $V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right)$.

En la figura se representa el vértice de una parábola con $a > 0$ (es un mínimo absoluto)



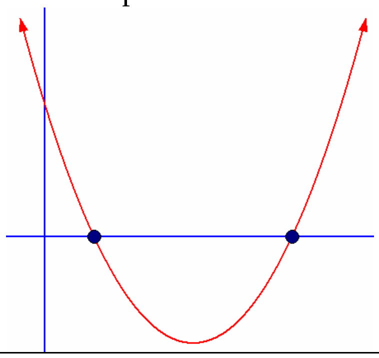
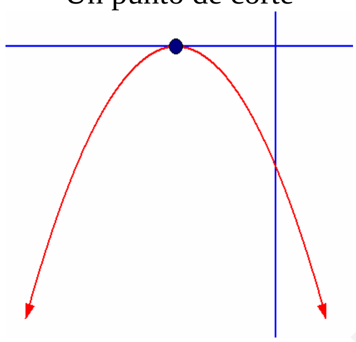
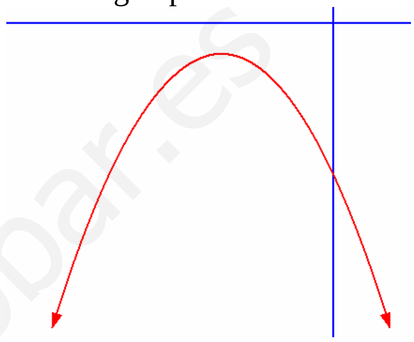
c) Puntos de corte con eje OX

Se trata de calcular los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas, por ello tenemos que resolver el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$, que nos lleva a la ecuación de 2º grado $ax^2 + bx + c = 0$, en la cual puede ocurrir que:

- *Tenga dos soluciones*: Hay dos puntos de corte con el eje OX
- *Tenga una única solución*: Hay un único punto de corte, la parábola es tangente al eje OX
- *No tenga ninguna solución*: No hay corte con el eje OX

Gráficamente, sería así:

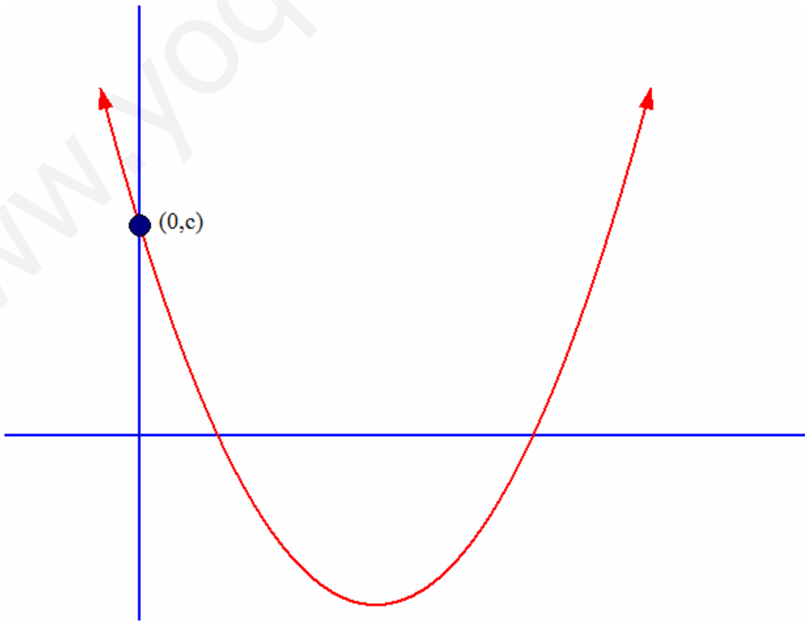
Dos puntos de corte	Un punto de corte	Ningún punto de corte
		

d) Punto de corte con eje OY

Se trata de calcular el punto de corte con el eje de ordenadas, que lo calculamos resolviendo el sistema asociado:

$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{cases}$, que es trivial de resolver y nos resulta $\begin{cases} y = c \\ x = 0 \end{cases}$. Por tanto, siempre es el punto $(0, c)$

Gráficamente,

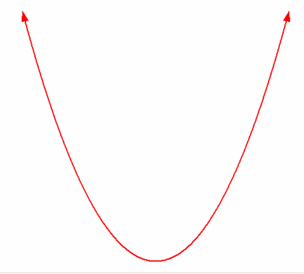


e) Tabla de valores

Poco que explicar en este punto, sólo que es conveniente darle valores próximos a la abscisa del vértice para que no nos salgan valores muy elevados

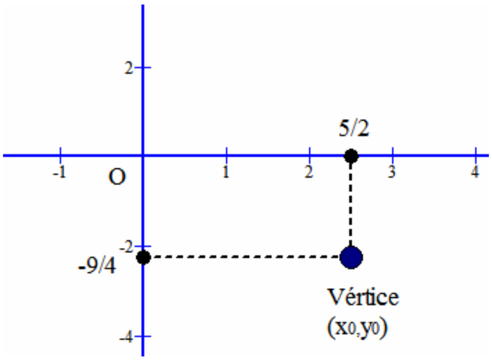
Ejemplo 1: Realizar la representación gráfica de la parábola $y = x^2 - 5x + 4$

Curvatura: Como $a = 1 > 0$, tenemos que la parábola es convexa

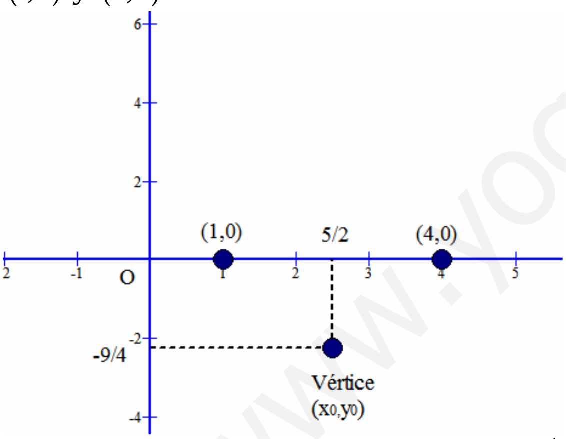


Vértice: $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-5)}{2\cdot 1} = \frac{5}{2}$ Calculamos el correspondiente $y_0 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\frac{5}{2} + 4 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4 = \frac{-9}{4}$ (sustituyendo en la fórmula o criterio de la función)

El vértice es $V\left(\frac{5}{2}, \frac{-9}{4}\right)$



Cortes eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y = x^2 - 5x + 4 \\ y = 0 \end{cases}$ → $x^2 - 5x + 4 = 0$ → $x = \begin{cases} 1 \\ 4 \end{cases}$ Por tanto, los puntos de corte son: $(1,0)$ y $(4,0)$



Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c) = (0,4)$

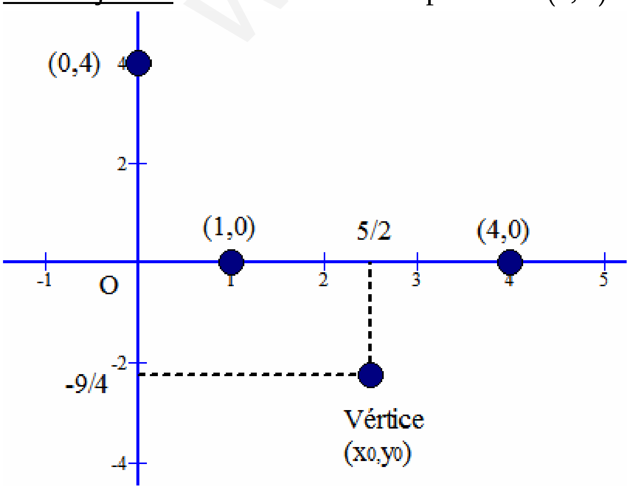
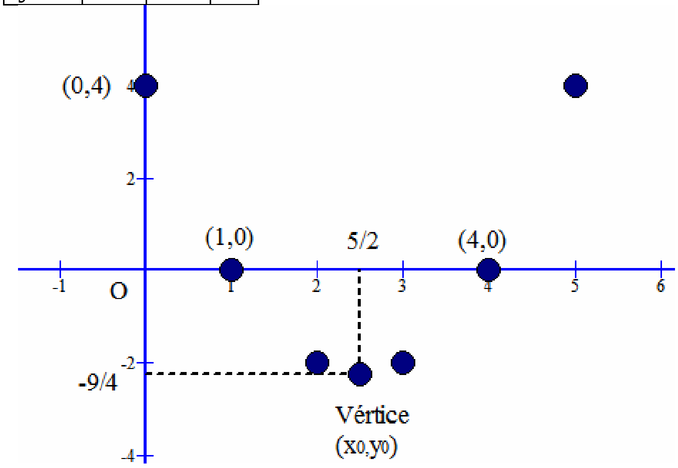
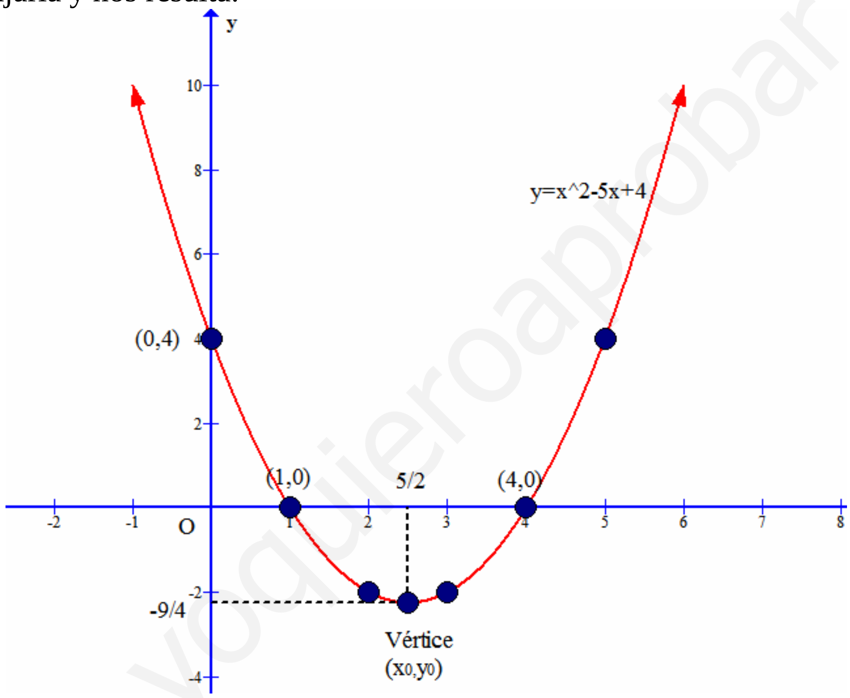


Tabla de valores: En este caso damos pocos valores, pues tenemos suficiente información para dibujarla ya:

x	2	3	5
y	-2	-2	4



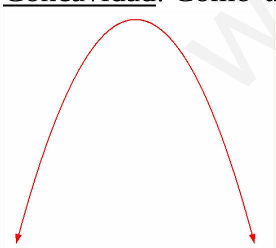
Ya procedemos al dibujarla y nos resulta:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\operatorname{Re}corr(f) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty\right)$

Ejemplo 2: Lo mismo para la función $y = -2x^2 - 1$

Concavidad: Como $a = -2 < 0$, es cóncava



Vértice: $x_0 = \frac{-0}{2\cdot(-2)} = 0 \rightarrow y_0 = -1$

Luego $V(0,-1)$

Corte eje OX: Resolvemos $\begin{cases} y = -2x^2 - 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$

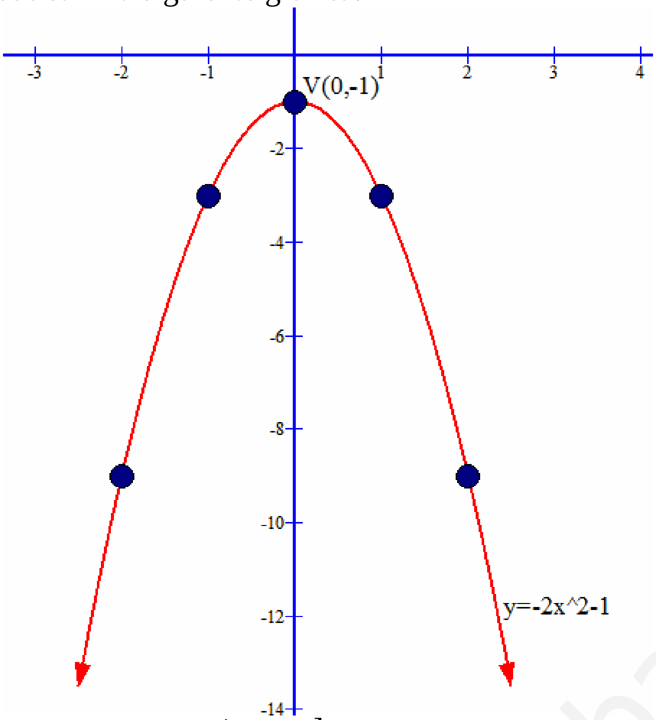
$-2x^2 - 1 = 0 \rightarrow$ No existen soluciones, no hay cortes

Corte eje OY: Como sabemos el punto es $(0,c) = (0,-1)$. Coincide con el vértice

Tabla de valores:

x	1	-1	2	-2	3	-3
y	-3	-3	-9	-9	-19	-19

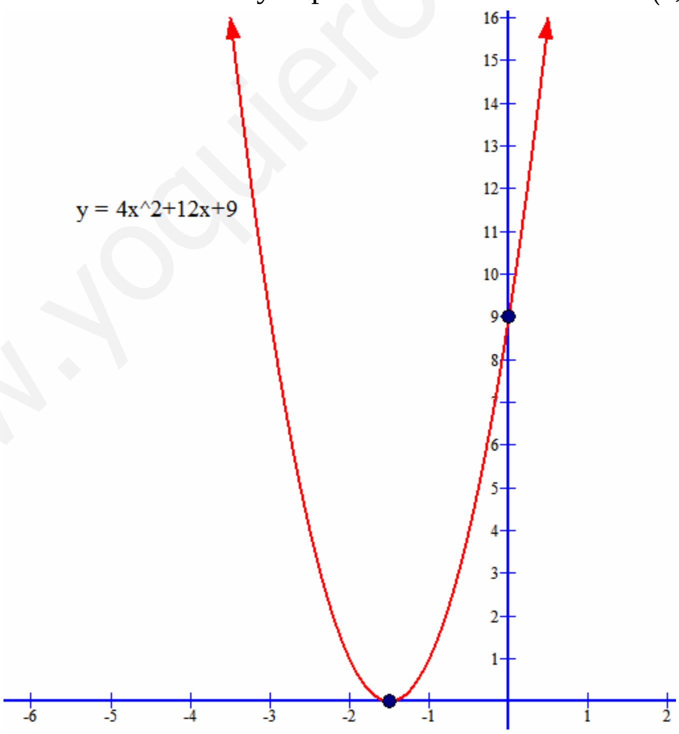
Con los datos anteriores nos debe salir la siguiente gráfica:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Im}(f)=(-\infty,-1]$

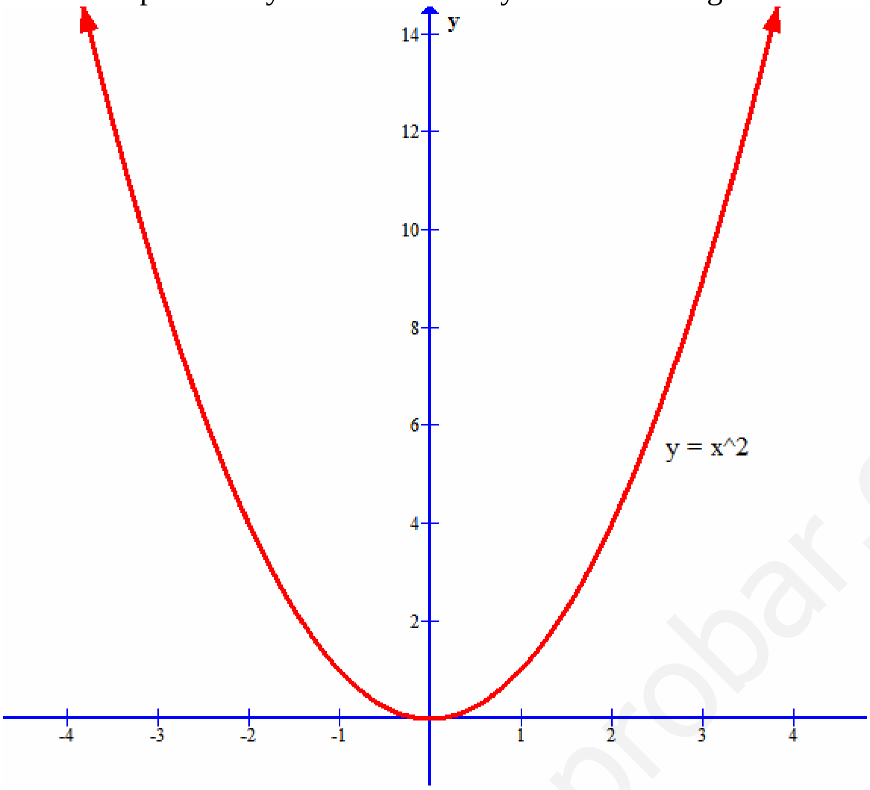
Ejemplo 3: Idem para $y=4x^2+12x+9$

Este ejemplo os lo dejo a vosotros el estudio detallado, pero resulta que es convexa, tiene vértice en $\left(\frac{-3}{2},0\right)$, que coincide con el único punto de corte con OX y el punto de corte con OY es $(0,9)$. La gráfica es:



Además, como ya tenemos la gráfica: $\mathrm{Re}\,corr(f)=[0,+\infty)$

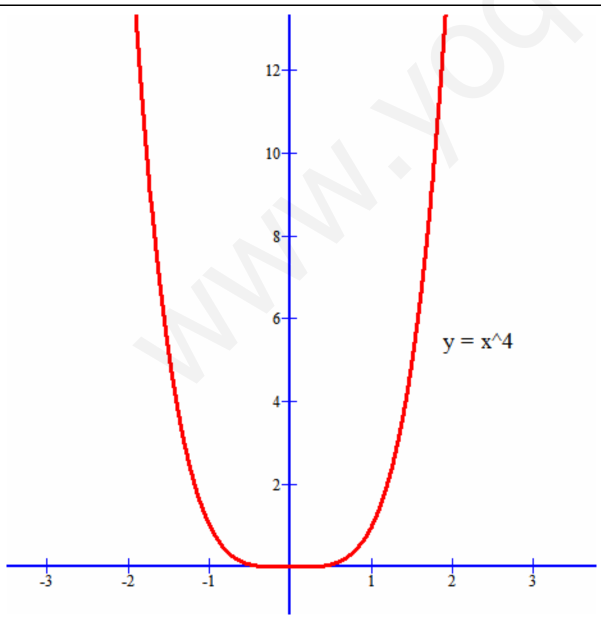
NOTA: Hay una parábola especial conocida como parábola canónica que es $f(x)=x^2$, que es la más simple de todas ellas y la más fácil de representar y se suele usar muy a menudo. La gráfica es la siguiente:

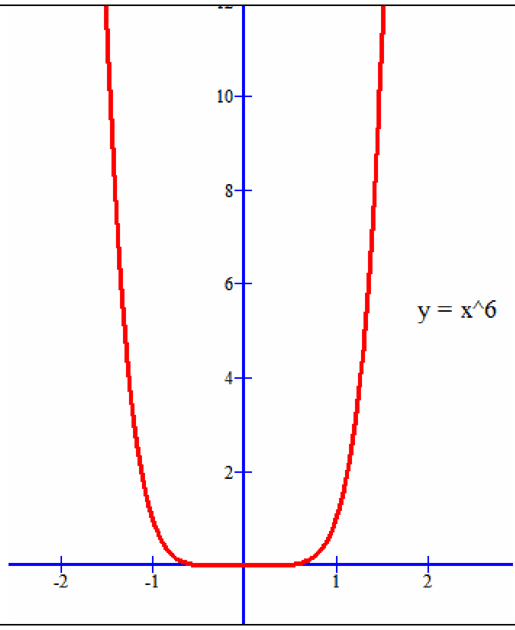


3. ***FUNCIONES POTENCIALES DE EXPONENTE NATURAL***

a) Funciones potenciales de exponente natural par

Son funciones de la forma $f(x)=x^n$ donde $n\in N$ y es par, por ejemplo como $y=x^2$, $y=x^4$, $y=x^6$, etc. Su dominio es todo R al ser polinómicas y su gráfica es muy parecida a la de una parábola. Aquí tenéis la grafica de dos de ellas:



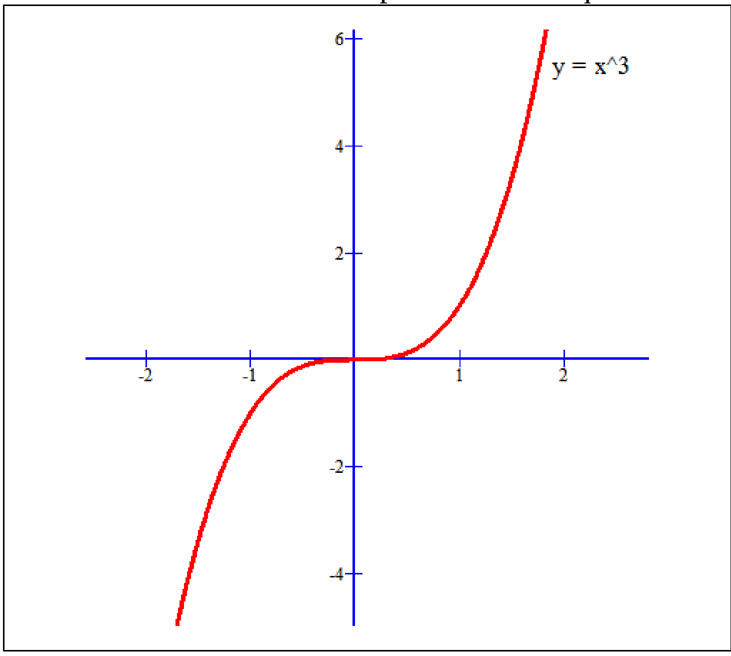


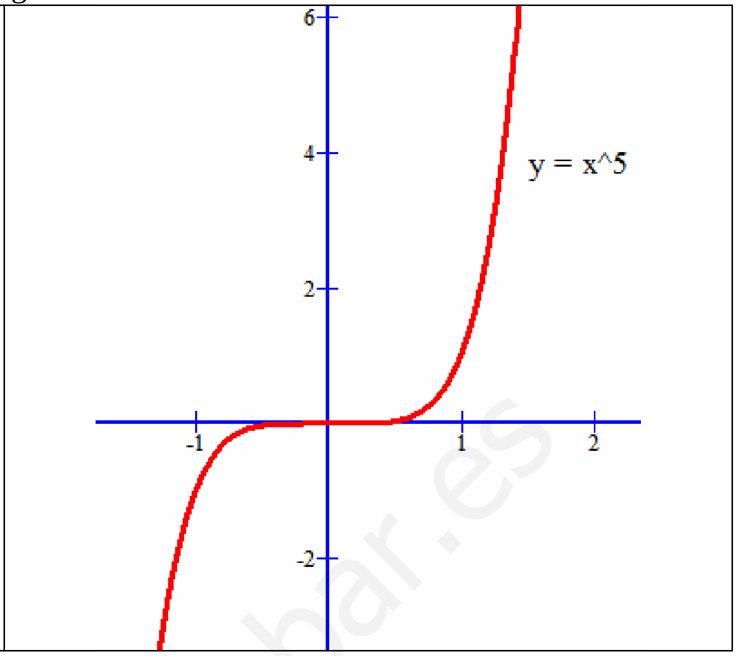
Presentan simetría par (simétricas respecto del eje de ordenadas) $f(x)=f(-x)$

Están acotadas inferiormente. Su imagen es $\mathrm{Im}(f)=[0,+\infty)$

b) Funciones potenciales de exponente natural impar

Son funciones de la forma $f(x)=x^n$ donde $n\in N$ y es impar, por ejemplo como $y=x^3$, $y=x^5$, $y=x^7$, etc. Su dominio es todo R al ser polinómicas. Aquí tenéis la grafica de dos de ellas:





Presentan simetría impar (simétricas respecto del origen de coordenadas) $f(x)=-f(-x)$

No están acotadas. Su imagen es todo R

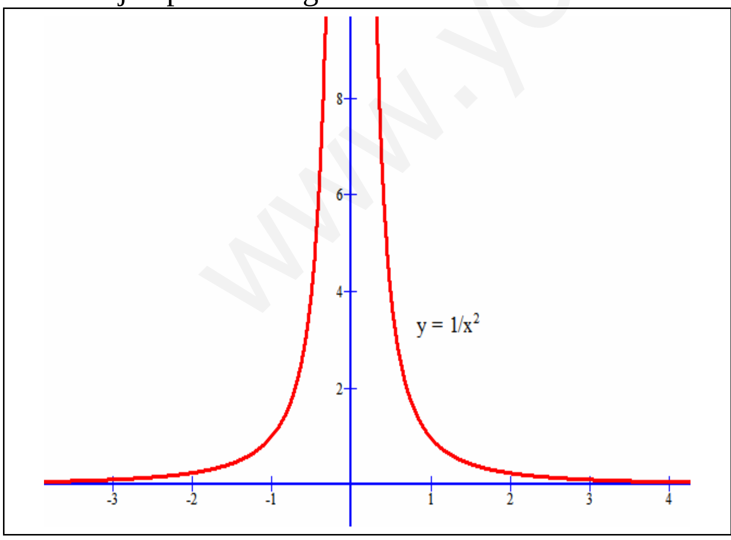
4. *FUNCIONES POTENCIALES DE EXPONENTE ENTERO NEGATIVO*

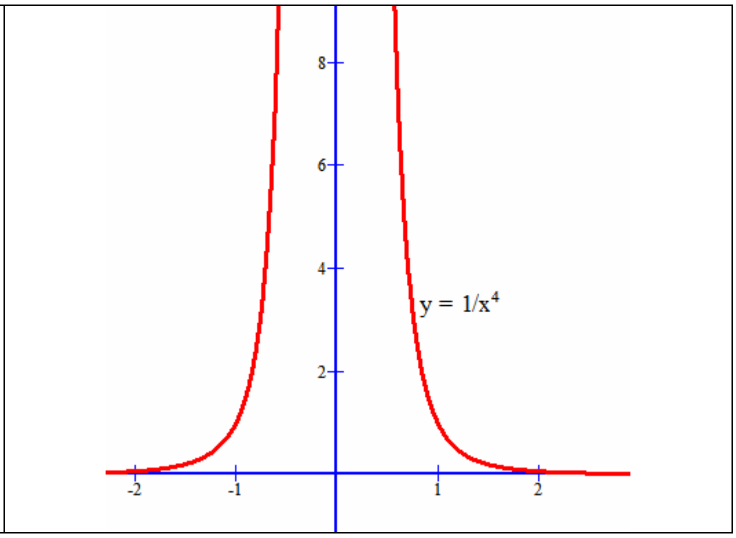
a) Funciones potenciales de exponente entero negativo y par

Son funciones de la forma $f(x)=x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ donde $n\in N$ y es par, por ejemplo como $y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2}$, $y=x^{-4}=\dfrac{1}{x^4}$, etc.

Su dominio es $R-\{0\}$.

Como ejemplo de sus gráficas son:





Presentan simetría par (simétricas respecto del eje de ordenadas) $f(x)=f(-x)$

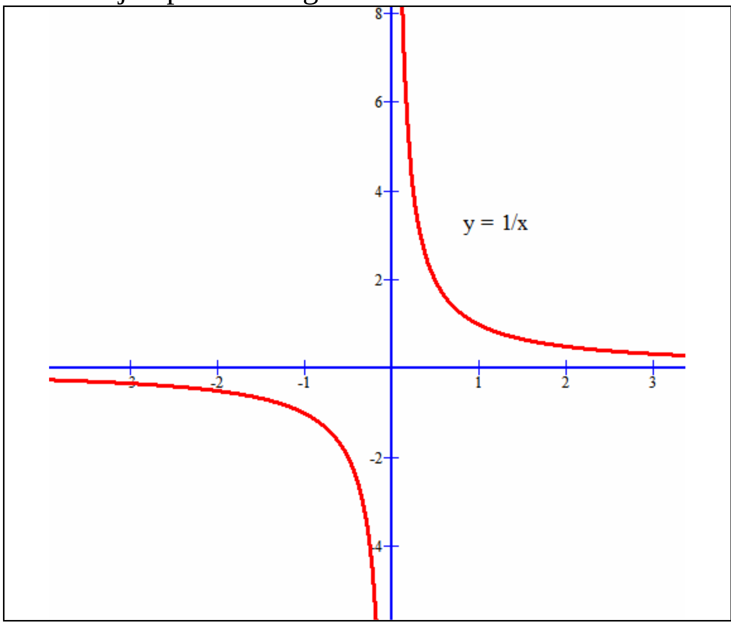
Están acotadas inferiormente. Su imagen es $\mathrm{Im}=(0,+\infty)$

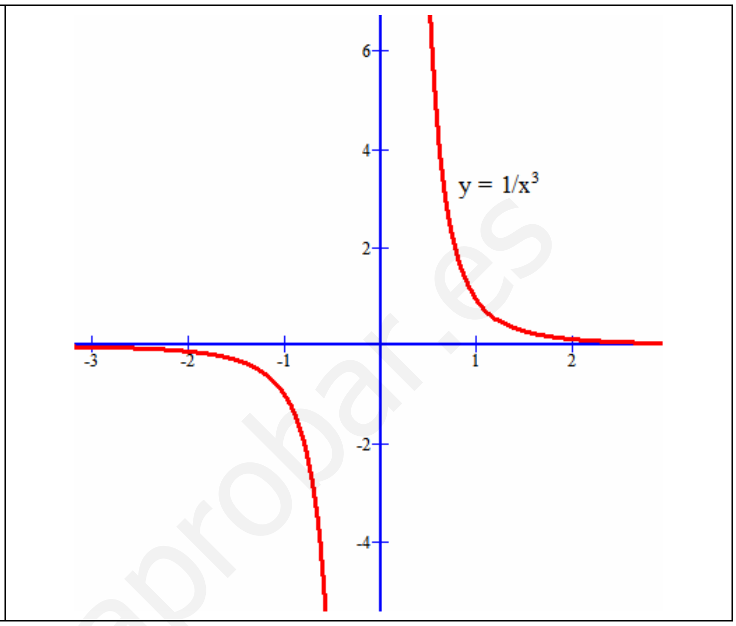
b) <u>Funciones potenciales de exponente entero negativo e impar</u>

Son funciones de la forma $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ donde $n \in N$ y es impar, por ejemplo como $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, $y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$, etc.

Su dominio es $R - \{0\}$.

Como ejemplo de sus gráficas son:





Presentan simetría impar (simétricas respecto del origen de coordenadas) $f(x) = -f(-x)$

No están acotadas. Su imagen es $R - \{0\}$

El caso particular $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es una hipérbola equilátera

5. <u>FUNCIONES EXPONENCIALES</u>

Son funciones de la forma $f(x) = a^x$ donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Su dominio es todo R y van a estar acotadas inferiormente

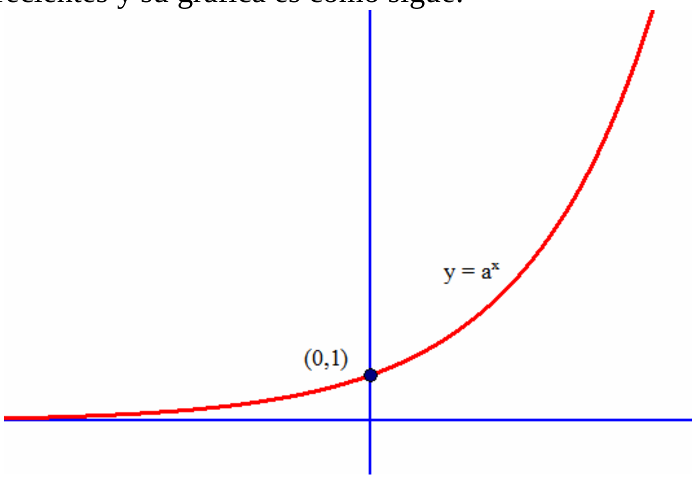
Todas pasan por el punto $(0,1)$

Su imagen es $\text{Im}(a^x) = (0,+\infty)$

Vamos a distinguir dos casos:

a) <u>La base</u> a <u>mayor que 1</u> $(a > 1)$

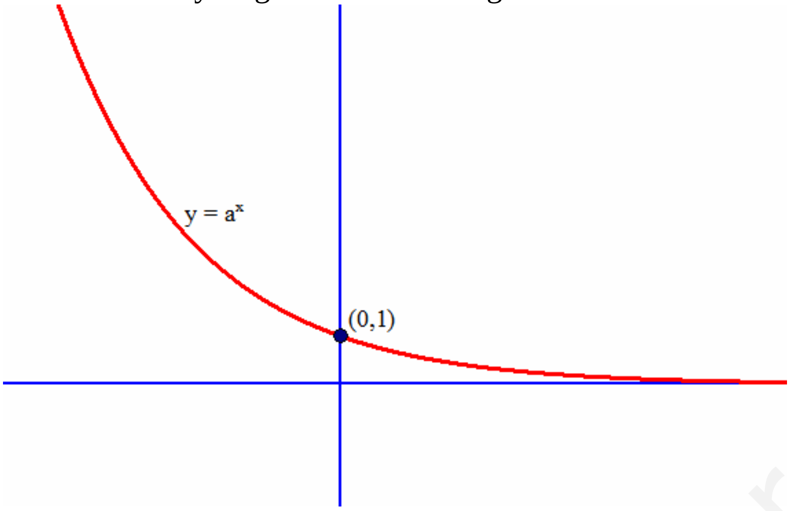
En este caso son funciones crecientes y su gráfica es como sigue:



Como ejemplo, podéis dibujar la exponencial $y = 2^x$, que os saldrá similar a la anterior

b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



Como ejemplo, podéis dibujar la exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x} = 2^{-x}$, que os saldrá similar a la anterior

6. *FUNCIONES LOGARÍTMICAS*

Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Como sabemos el argumento ha de ser estrictamente positivo, por tanto $Dom(\log_a) = (0, +\infty) = R^+$

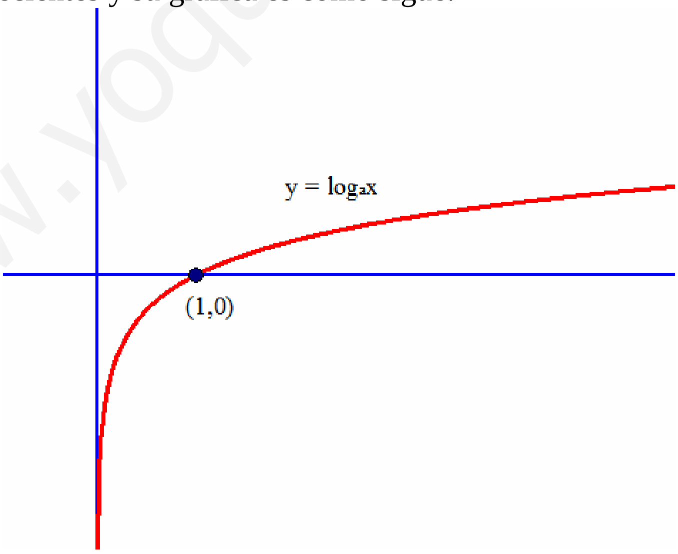
Todas pasan por el punto $(1,0)$

Su imagen es todo R

Vamos a distinguir dos casos:

a) La base a mayor que 1 $(a > 1)$

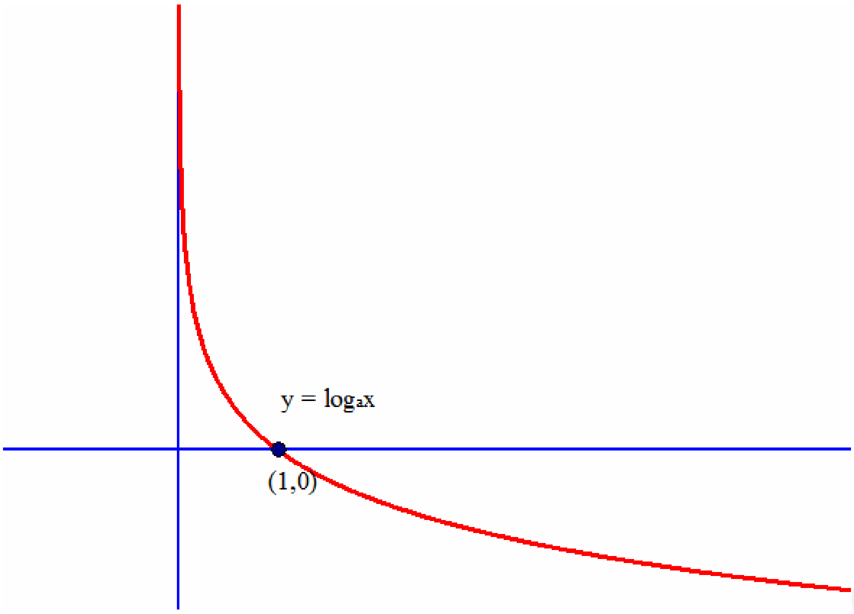
En este caso son funciones crecientes y su gráfica es como sigue:



Como ejemplo, podéis dibujar las logarítmicas $y = \log_2 x$ ó $y = \ln(x)$, que os saldrá similar a la anterior

b) La base a entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$

En este caso son funciones decrecientes y su gráfica es como sigue:



Como ejemplo, podéis dibujar la logarítmica $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ que os saldrá similar a la anterior

7. ***FUNCIONES CIRCULARES Y SUS INVERSAS***

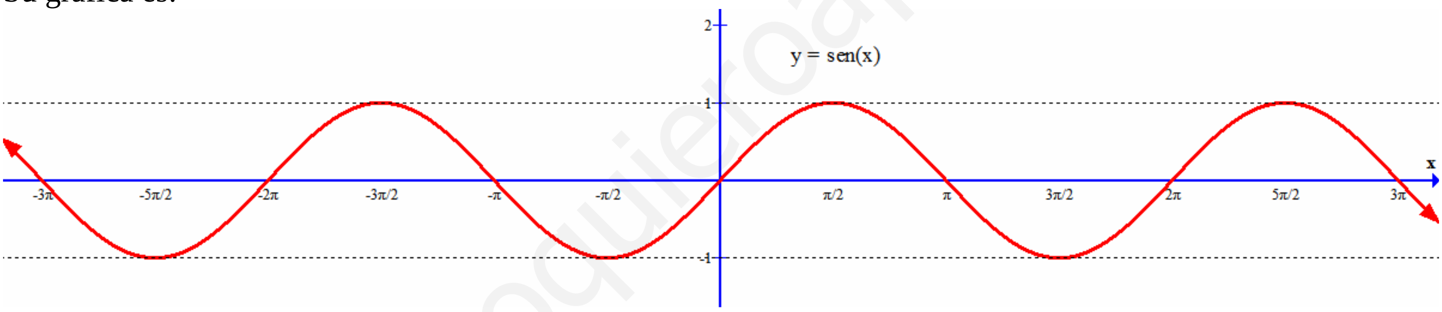
a) Función seno

Se trata de la función $f(x) = sen(x)$, cuyo dominio es todo R

Tiene simetría impar y es periódica de periodo 2π

Su imagen es: $\mathrm{Im}(sen) = [-1,1]$

Su gráfica es:



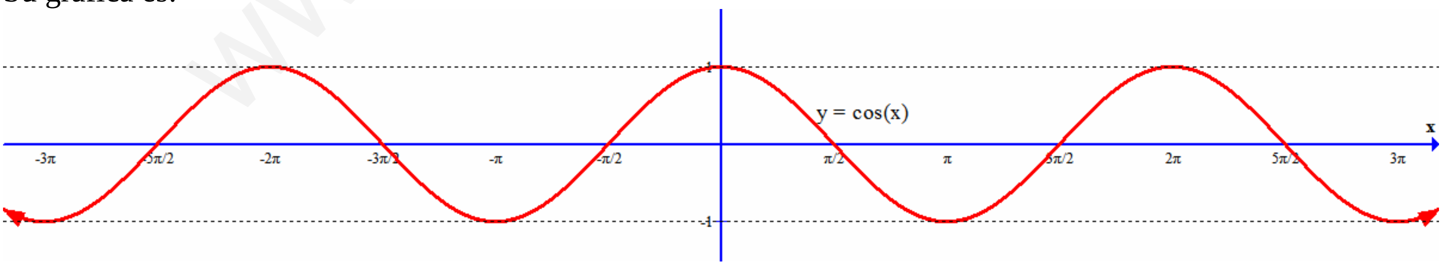
b) Función coseno

Se trata de la función $f(x) = \cos(x)$, cuyo dominio es todo R

Tiene simetría par y es periódica de periodo 2π

Su imagen es: $\mathrm{Im}(\cos) = [-1,1]$

Su gráfica es:



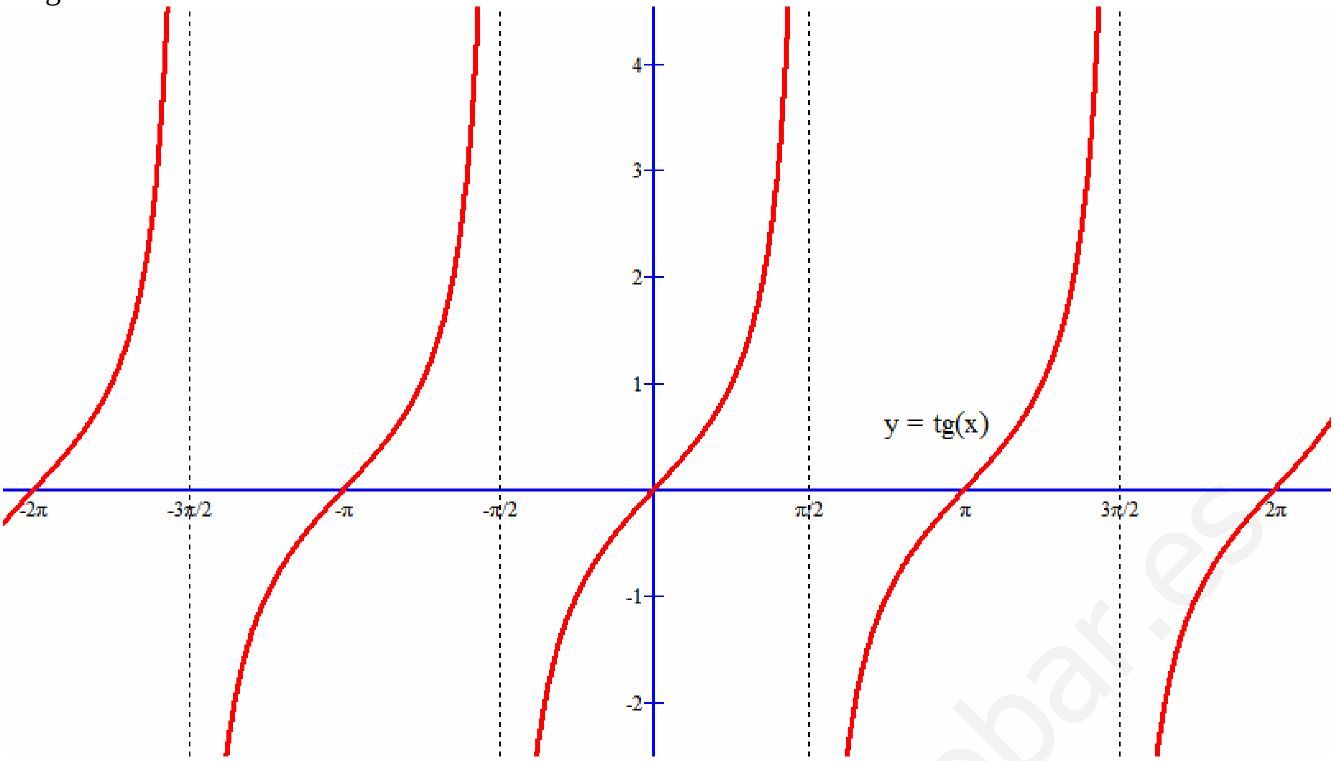
c) Función tangente

Se trata de la función $f(x) = tg(x)$, cuyo dominio es todo R salvo los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$

Matemáticamente se escribe así: $Dom(tg) = R - \left\{ x \in R,, x = (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2},, k \in Z \right\}$

Tiene simetría impar y es periódica de periodo π

Su gráfica es:

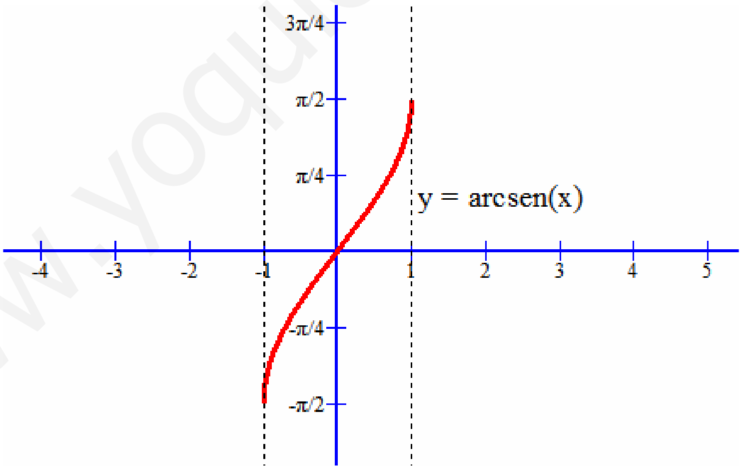


Su imagen es todo R: $\operatorname{Im}(tg) = R$

d) <u>Función arco seno</u>

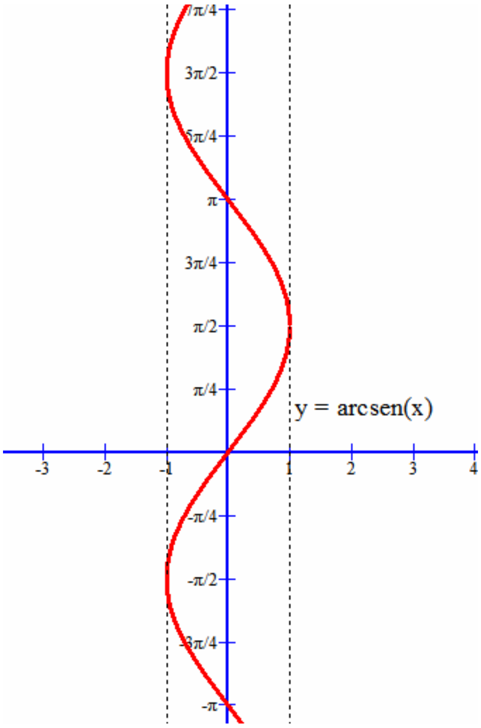
La función $f(x) = arcsen(x)$, devuelve el ángulo comprendido entre $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es x. Se restringe a este intervalo la imagen para que $f(x) = arcsen(x)$ se pueda considerar una función (un original,x, tiene una sóla imagen)

Su dominio es: $Dom(arcsen(x)) = [-1,1]$ y su gráfica es:



Como vemos es impar y creciente.

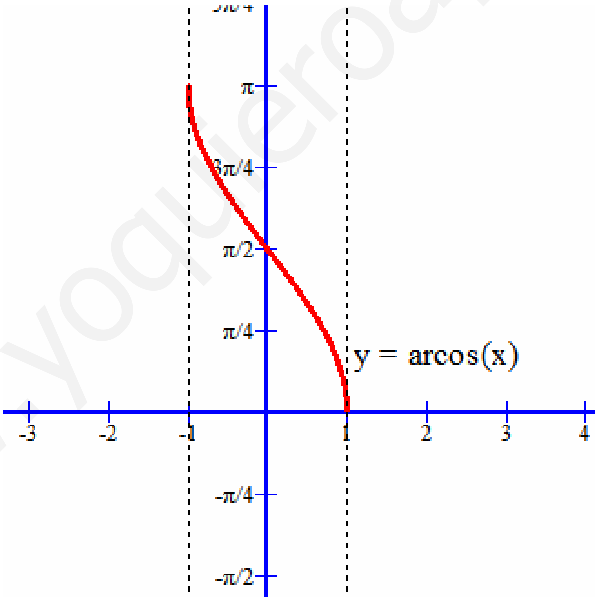
Ahora bien sabemos que por ejemplo $arcsen(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, si dibujásemos todas las posibilidades o soluciones ya no sería una función, pero aún así es interesante conocerla y la gráfica es como sigue:



e) <u>Función arco coseno</u>

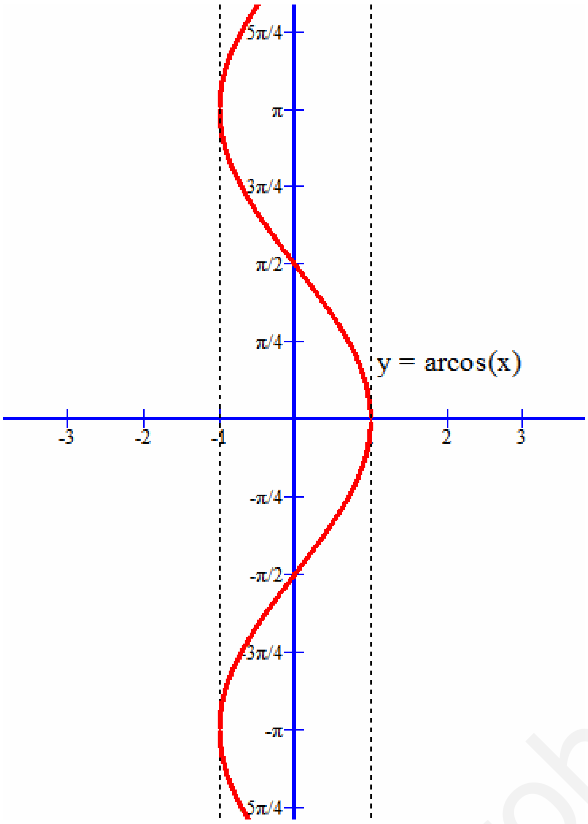
La función $f(x) = ar\cos(x)$, devuelve el ángulo comprendido entre $[0,\pi]$ cuyo coseno es x. Se restringe a este intervalo la imagen para que $f(x) = ar\cos(x)$ se pueda considerar una función (un original,x, tiene una sóla imagen)

Su dominio es: $Dom(ar\cos(x) = [-1,1]$ y su gráfica es:



Como vemos es decreciente.

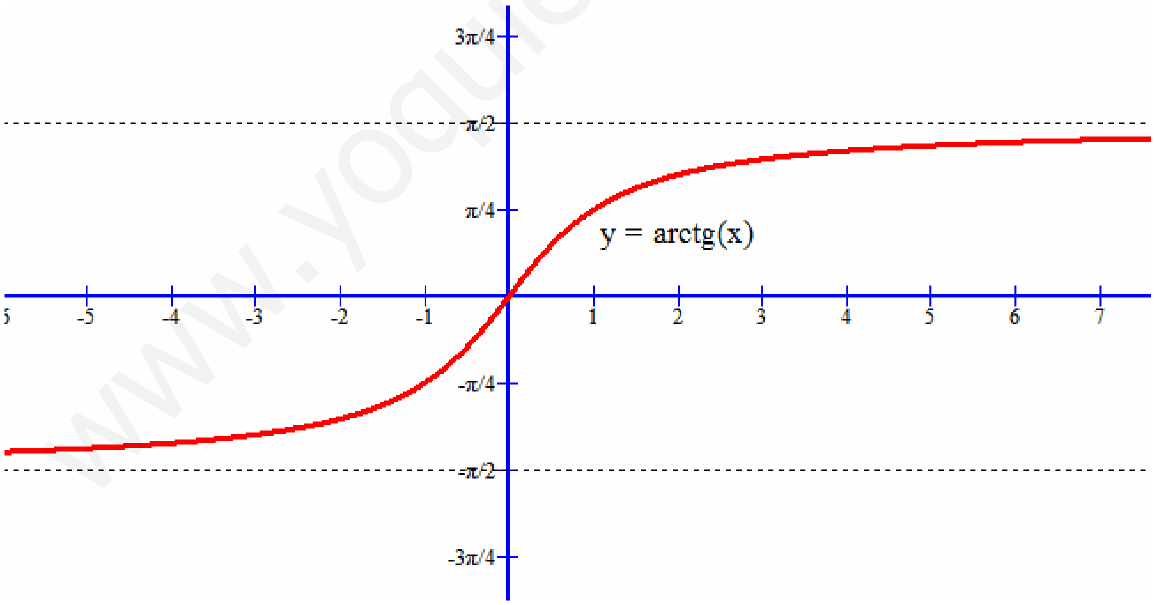
Ahora bien sabemos que por ejemplo $ar\cos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, si dibujásemos todas las posibilidades o soluciones ya no sería una función, pero aún así es interesante conocerla y la gráfica es como sigue:



f) <u>Función arco tangente</u>

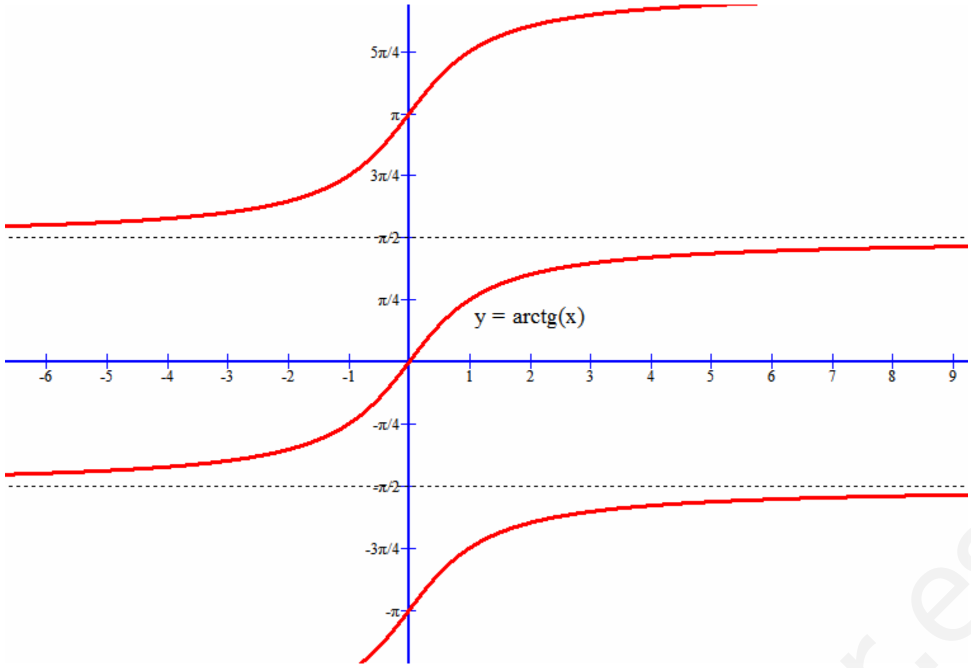
La función $f(x) = arctg(x)$, devuelve el ángulo comprendido entre $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ cuya tangente es x. Se restringe a este intervalo la imagen para que $f(x) = arctg(x)$ se pueda considerar una función (un original,x, tiene una sóla imagen)

Su dominio es: $Dom(arctg(x) = R$ y su gráfica es:



Como vemos es creciente.

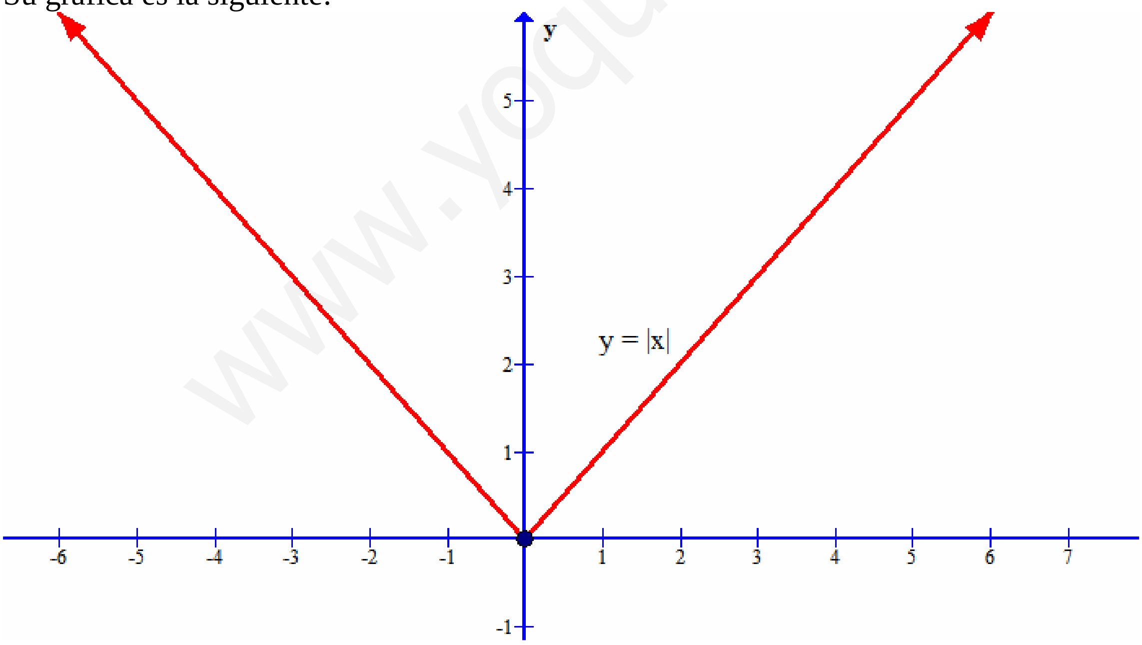
Ahora bien sabemos que por ejemplo $arctg(1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$, si dibujásemos todas las posibilidades o soluciones ya no sería una función, pero aún así es interesante conocerla y la gráfica es como sigue:



8. ***FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO***

La función valor absoluto se define por partes de la siguiente forma: $|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x & si \quad x > 0 \end{cases}$. Es decir, es la función que toma un nº real y devuelve el nº positivo correspondiente. Ejemplos: $|5| = 5$, $|0| = 0$, $|-7| = 7$, $\left|\frac{-6}{7}\right| = \frac{6}{7}$

Tenemos que su dominio es todo R.
Su gráfica es la siguiente:



Y como vemos su imagen es $\mathrm{Im}(|x|) = [0,+\infty)$

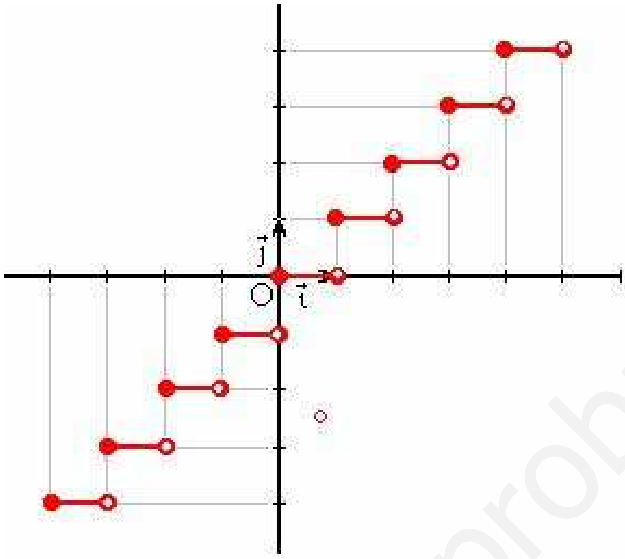
Está acotada inferiormente pero no superiormente, teniendo un mínimo absoluto en O(0,0).
Cumple además que:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \qquad\qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

9. *FUNCIÓN PARTE ENTERA Y PARTE DECIMAL*

a) Función parte entera

Es la función $f(x) = E(x) =$ mayor de todos los enteros menores o iguales a x.
Su dominio es todo R.
Así, unos ejemplos de valores, E(2’3) = 2, E(0’45) = 0, E(7) = 7, E(-1’3) = -2, E(-5,2) = -6, E(-8) = -8
Su representación gráfica es parecida a una escalera:



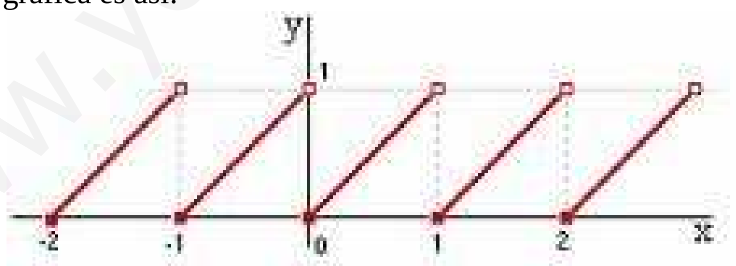
Y tenemos que Im(E(x)) = Z

b) Función parte decimal

Se define como Dec(x) = x - E(x).
Su dominio es todo R
Algunos ejemplos de valores:

x	2’1	8’234	5	-2	-12’34	-7’8	-9’7
Dec(x)	0’1	0’234	0	0	0’66	0’2	0’3

Su dominio es todo R y su gráfica es así:



Luego Im(Dec(x)) = [0, 1)

10. *FUNCIÓNES DEFINIDAS A TROZOS O POR PARTES*

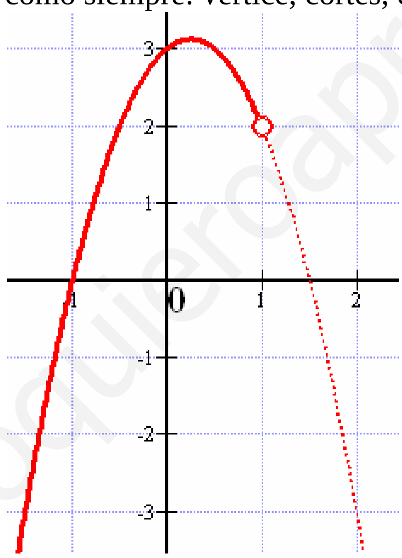
Estas funciones se caracterizan porque su criterio o fórmula varía según la variable independiente “x” pertenezca a un conjunto de valores o a otro. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 4: Sea $f(x)=\begin{cases} -2x^2+x+3 & si \quad x<1 \\ 2x-1 & si \quad 1\le x<3 \\ \ln x & si \quad x>3 \end{cases}$ Vamos a estudiar su dominio, su representación gráfica y su imagen. Esta función también se podía poner así usando intervalos $f(x)=\begin{cases} -2x^2+x+3 & si \quad x\in(-\infty,1) \\ 2x-1 & si \quad x\in[1,3) \\ \ln x & si \quad x\in(3+\infty) \end{cases}$

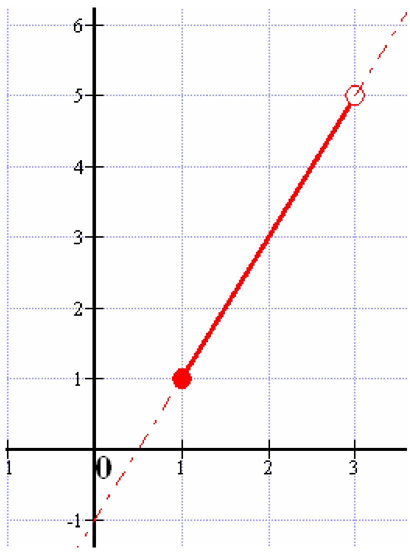
Podéis usar la que más os guste, es totalmente indiferente.
Como vemos tiene 3 partes:

- Si $x<1$ (o bien, $x\in(-\infty,1)$), está definida por un polinomio de grado 2, que siempre tiene sentido, en particular en la restricción $x<1$. Tendremos un trozo de parábola
- Si $1\le x<3$, está definida por un polinomio de grado 1 (función afín), que siempre tiene sentido, y su gráfica será una recta. Tendremos un trozo de recta (una semirrecta o un segmento)
- Si $x>3$, está definida por un logaritmo neperiano que tiene sentido siempre que su argumento (en este caso la "x") sea positivo. Como x > 3, no hay problema y tiene sentido.

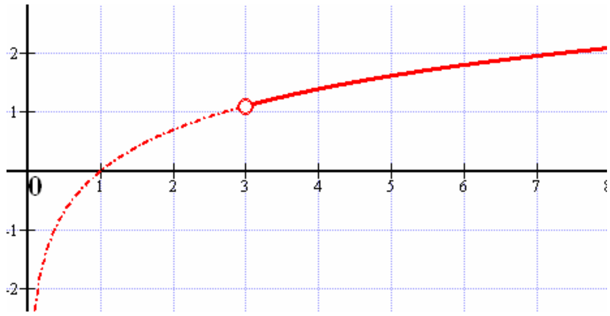
Pero hay un valor dónde la función no está definida, en x = 3. Por tanto, $Dom(f)=R-\{3\}$
Pasamos a representarla gráficamente, para ello dibujamos cada parte por separado y en línea discontinua se representa la parte que habrá que borrar en el gráfico final
La parábola sería así (vosotros lo hacéis como siempre: vértice, cortes, etc.)



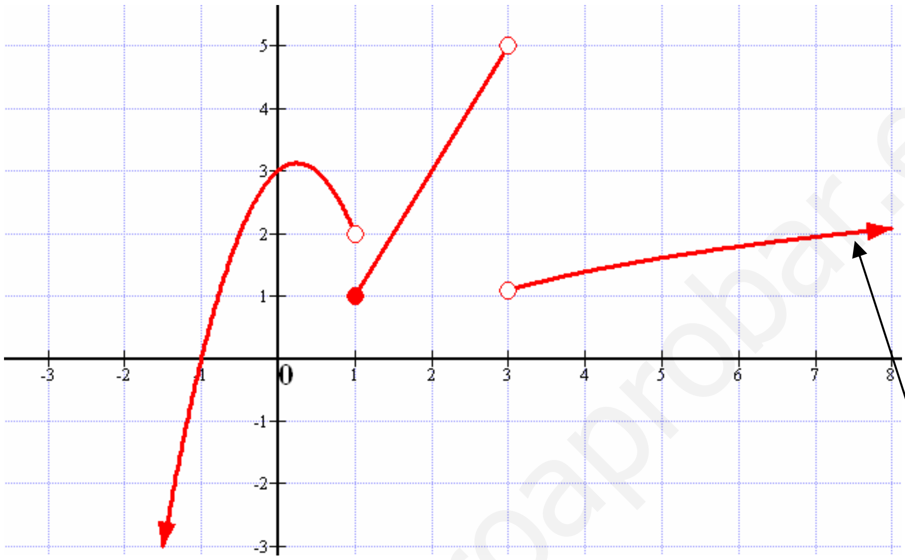
La recta



Y el logaritmo neperiano



Y todo unido y quitando las líneas punteadas, nos queda la gráfica de $f(x)$

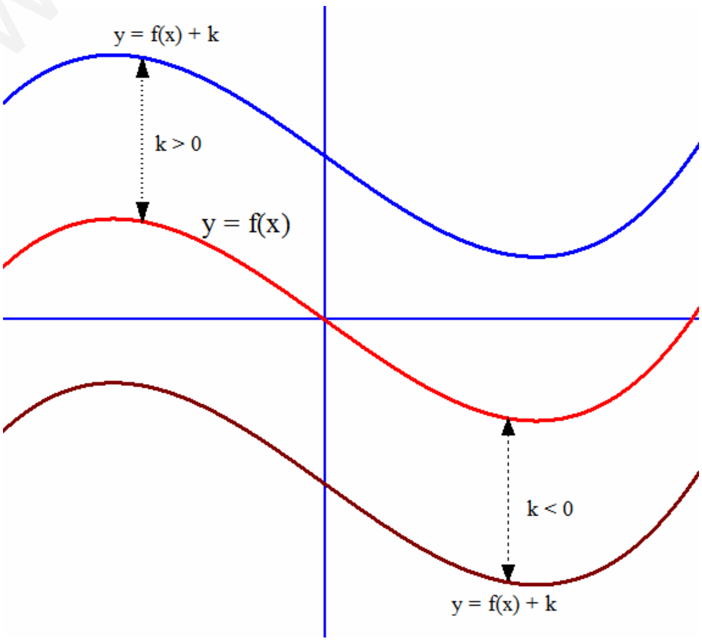


Y tenemos que $\mathrm{Im}(f) = R$, pues el logaritmo neperiano va creciendo (aunque lentamente) hacia el infinito

11. TRASLACIONES DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

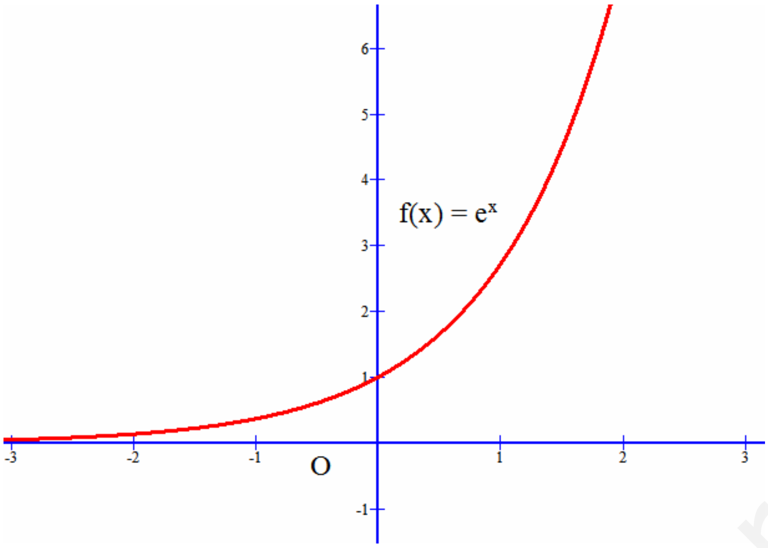
a) Traslaciones verticales

Dada una función del tipo $y = f(x) + k$, su gráfica se obtiene de trasladar verticalmente k unidades hacia arriba la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k > 0$ y k unidades hacia abajo la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k < 0$

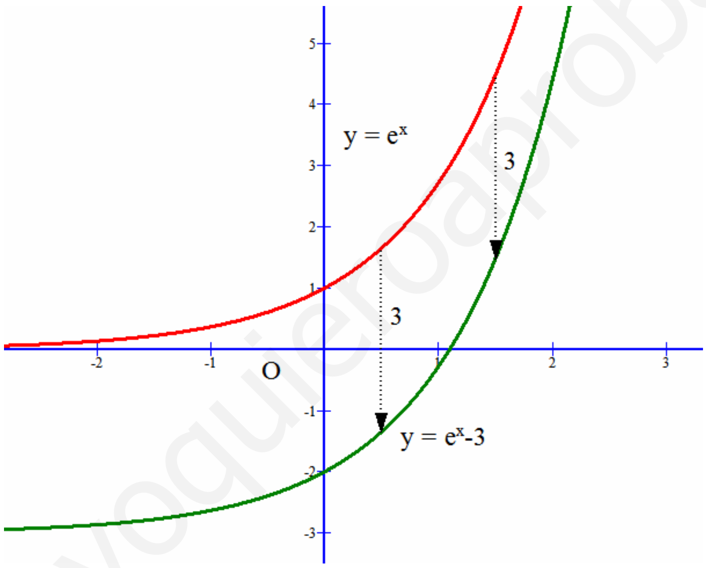


Ejemplo 5: Representa gráficamente la función $y = e^x - 3$

En primer lugar, dado que tenemos función exponencial $f(x) = e^x$ con base $e > 1$, su gráfica es como sigue:

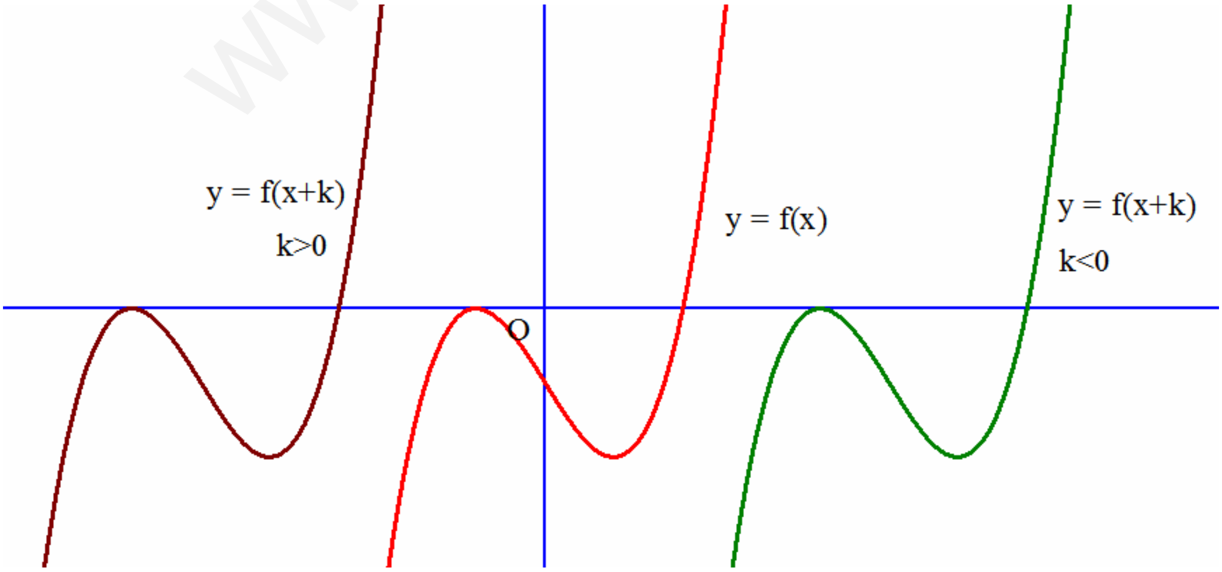


Basta desplazar la función 3 ($k = -3$) unidades hacia abajo y ya tenemos la función pedida



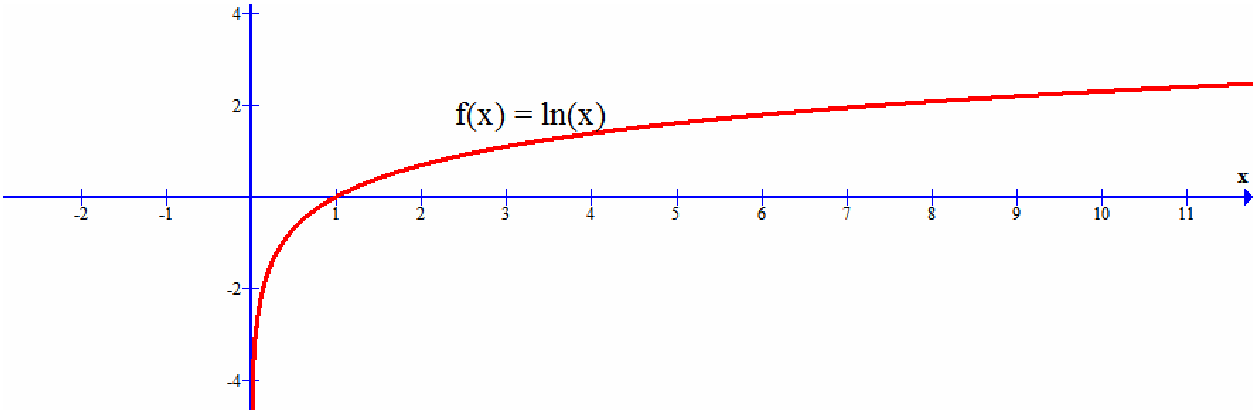
b) Traslaciones horizontales

Dada una función del tipo $y = f(x+k)$, su gráfica se obtiene de trasladar horizontalmente k unidades hacia la izquierda la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k > 0$ y k unidades hacia la derecha la gráfica de la función $y = f(x)$ si $k < 0$

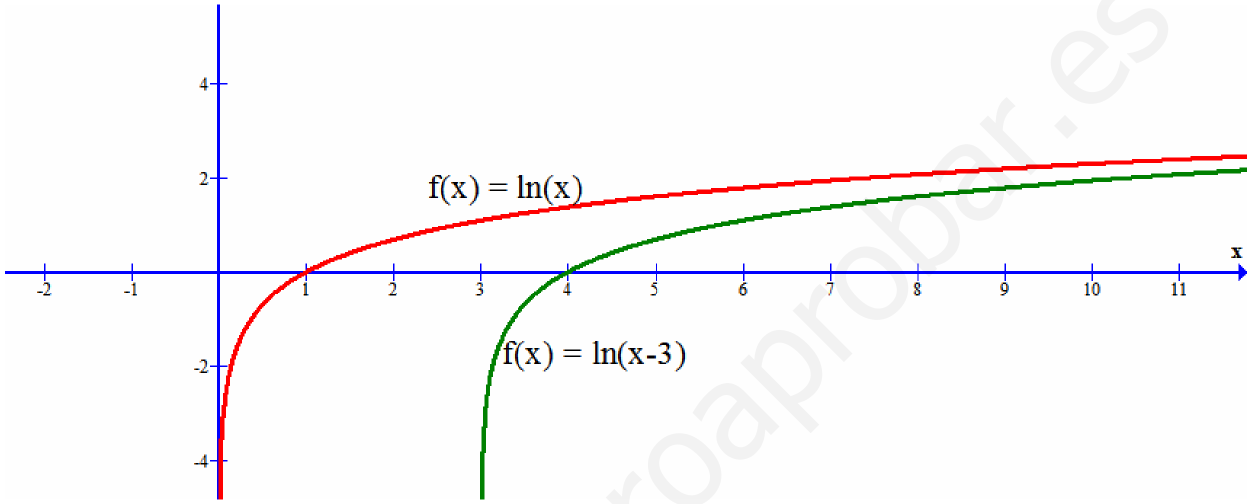


Ejemplo 6: Representa gráficamente la función $y = \ln(x-3)$

En primer lugar, dado que tenemos función logarítmica $f(x) = \ln(x)$ con base $e > 1$, su gráfica es como sigue:



Basta dezplazar horizontalmente 3 unidades a la derecha la gráfica ($k = -3$), y ya tenemos la función pedida.

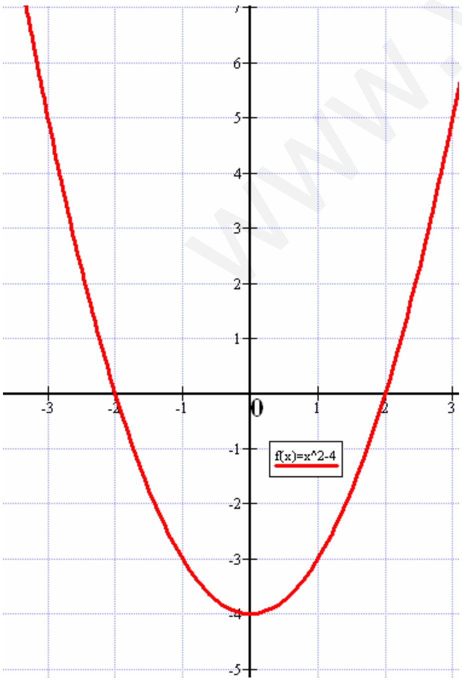


Ejemplo 7.- Dada la función $f(x) = |x^2 - 4|$-3, vamos a calcular su dominio, su representación gráfica y su imagen.

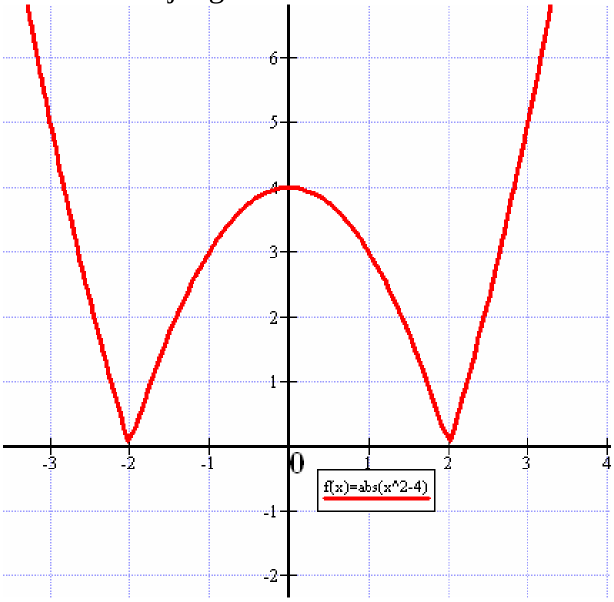
El dominio de $|g(x)|$ es igual al de $g(x)$, por lo que en nuestro caso como tenemos un polinomio cuadrático en el valor absoluto y depués restamos 3, podemos concluir que $Dom(f) = R$.

Vamos a representarla gráficamente mediante 3 pasos:

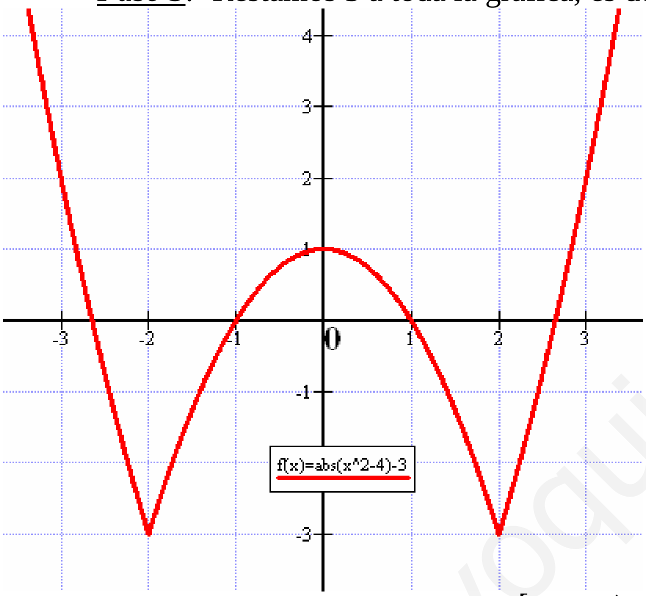
Paso1: Dibujamos la parábola $g(x) = x^2 - 4$, como sabemos, con curvatura, vértice, cortes, etc



Paso 2.- El valor absoluto lo que hace es poner positivo los valores de $x^2 - 1$ que son negativos y los demás los deja igual



Paso 3.- Restamos 3 a toda la gráfica, es decir, trasladamos la representación 3 unidades hacia abajo



Ya podemos concluir que $\operatorname{Re} corr(f) = [-3, +\infty)$