Maite González Rodríguez

## EJERCICIOS BLOQUE 4: Funciones, límites, continuidad y derivadas

**EJERCICIO 1 Halla el dominio de las siguientes funciones :**

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$  b) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$  c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

**EJERCICIO 2 Dadas las funciones $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \frac{2x-1}{3-2x}$, $h(x) = \frac{2}{x}$, halla las expresiones simplificadas de :**

**a) (gof)(x)  b) (fog)(x)  c) (goh)(x)  d) (hoh)(x)  e) $g^{-1}(x)$**

**EJERCICIO 3 Representa la función que da la distancia en Km de Juan a su casa en función del tiempo medido en horas y, a partir del enunciado, da su expresión analítica :**

*Juan sale de su casa a las 8 h. Se aleja caminando durante 1,5 h a una velocidad constante de 4Km/h y se detiene durante media hora para tomar un café. Permanece media hora en la cafetería y luego vuelve a su casa invirtiendo en el trayecto una hora.*

**EJERCICIO 4 Expresa la función que da el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de radio 10 cm en función de su base. Halla el dominio de la función.**

**EJERCICIO 5 Expresa la función que da la longitud de la sombra de un hombre de 1,75 m de estatura que está situado frente a una farola de 4 m de altura. ¿Cuál es el dominio de esta función?**

**EJERCICIO 6 Representa la función**

$$F(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad x < -1 \\ 1 - x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

**Calcula** $\lim_{x\to -1^+} F(x)$, $\lim_{x\to -1^-} F(x)$, $\lim_{x\to -1} F(x)$, $\lim_{x\to\infty} F(x)$, $\lim_{x\to -\infty} F(x)$

**EJERCICIO 7 Halla los siguientes límites :**

a) $\lim_{x\to 4} \frac{x^3-64}{x^2-16}$  b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$  c) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2}{x} - x\right)$

d) $\lim_{x\to -2} \frac{2x-1}{|x+2|}$  e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$  f) $\lim_{t\to 0} \frac{(2+t)^2-4}{t^3+3t}$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-5}{2x}$  h) $\lim_{x\to 10^-} \frac{x^2-30x+200}{x-10}$  i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-3x+2}$

**EJERCICIO 8 Halla m y n para que la función f(x) sea continua en x= -2 y en x = 1. ¿Es f(x) globalmente continua?**

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+3) & si \quad x \leq -2 \\ mx + n & si \quad -2 < x < 1 \\ x + \ln x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

**EJERCICIO 9 Halla K para que la función sea continua en x = 3**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+6}-3} & \text{si} \quad x \neq 3 \\ K & \text{si} \quad x = 3 \end{cases}$$

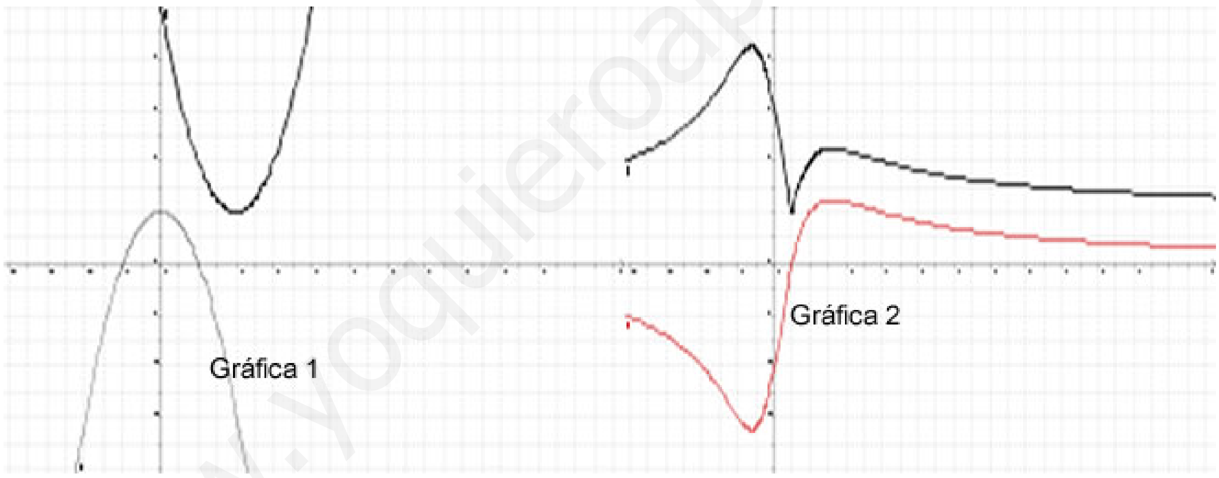
**EJERCICIO 10 Representa gráficamente la función f(x) y a partir de su gráfica, y sin dar nuevos valores, representa las gráficas de :**

**a) $|f(x-1)|$ b) $-f(|x|)$ c) $f(-x)+1$**

$$f(x) = \begin{cases} 3+x & si \quad x \leq -3 \\ -2 & si \quad -3 < x < 2 \\ 3-2x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

**EJERCICIO 11 Halla la expresión algebraica de las funciones representadas con trazo más fuerte a partir de la gráfica y de la expresión algebraica de las funciones representadas en trazo más fino ( Gráfica a :**

**Gráfica 1 : $y = 1 - x^2$** **Gráfica 2: $y = \dfrac{4x-2}{x^2+1}$**




**EJERCICIO 12 a) Completa la tabla de valores y representa la función $y = 1{,}5^x$**

| x | 0 | 1 | -1 | 2 | -2 | 3 | -3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y=1{,}2^x$ | | | | | | | | |

**b) A partir de la gráfica de $y = 1{,}5^x$ y sin hacer tabla de valores representa, en el mismo sistema de coordenadas, las gráficas de :**

**a) $y = 1{,}5^{|x+1!}$ b) $y = \log_{1,5} x$**

**EJERCICIO 13 : Haz una representación aproximada de las siguientes funciones a partir de su dominio, de los cortes con los ejes y de sus asíntotas :**

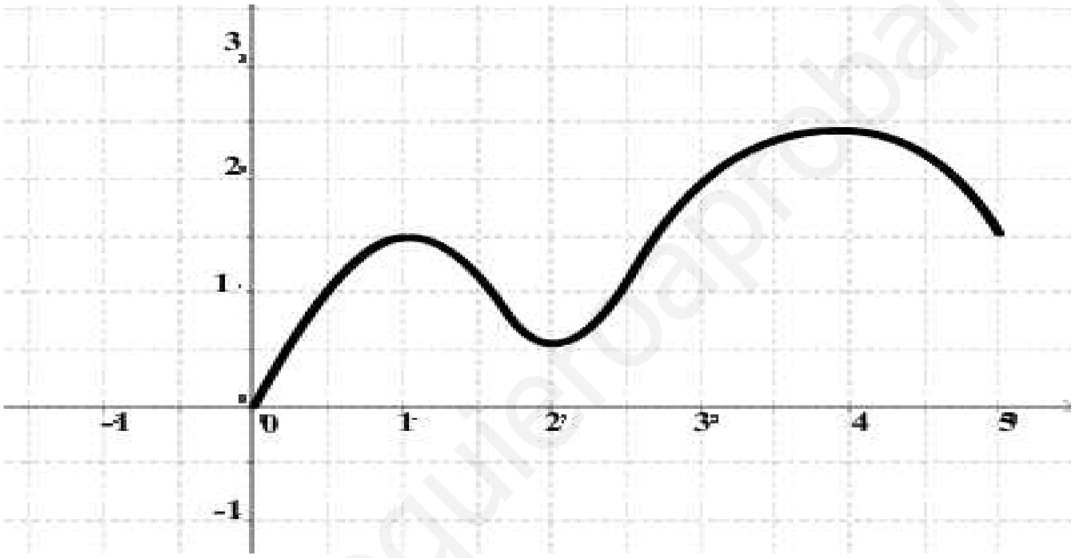
**a) y = $\frac{4x^2}{1+x^2}$ b) y = $\frac{x-1}{x^2-3x}$ c) y = $\frac{x^3}{x^2+x-12}$ d) y = $\frac{x^2-4}{x+1}$**

**EJERCICIO 14 : A partir de la gráfica calcula :**

**a) TVM ( [ 0 , 5 ]) b) TVM ([1,2]) c) TVM ([2,4])**

**b) Basándote en la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente, halla de forma más aproximada posible:**

**a)f' (1) b) f' (0,5) c) f' (2) d) f' (3)**




**EJERCICIO 15**

**Halla la derivada de las siguientes funciones utilizando su definición como límite :**

**a) f(x) = $x^2 - 4x + 3$ b) g (x) = $\sqrt{2x-1}$ c) h (x) = $\frac{2}{x-1}$**

**EJERCICIO 16 Halla la derivada de las siguientes funciones utilizando las reglas de derivación y simplifica el resultado :**

**16.1) y = $\frac{x^2-1}{2x}$ 16.2) y = $xe^{2x}$ 16.3) y = sen3xcos3x 16.4) y = $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$**

**16.5) y =ln $\frac{x^2}{x+1}$ 16.6) y = log(senx) 16.7) y = Arctg$\frac{x}{x+2}$ 16.8) y = $\frac{2^x}{x}$**

**16.9) y = $\frac{x^3}{(x-2)^2}$ 16.10) y = $sen^3(3x-2)$ 16.11) y = $\frac{1+senx}{1-senx}$**

**16.12)** y = $\frac{lnx^2}{x}$ **16.13)** y = $\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$ **16.14)** y = xlnx **16.15)** y = Secx

**16.16** y = Arcsen$e^x$ **16.17)** y = $\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}$ **16.18)** y = $\frac{cosx-2}{cosx+2}$ **16.19)** y = $\sqrt{senx}$

**EJERCICIO 17** Halla B' (-8) , B' (8) , B' (1) y B' (-1) para la función

$$B(x) = \begin{matrix} x^3 & si & x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x} & si & x > 1 \end{matrix}$$

**EJERCICIO 18** Halla la ecuación de las rectas tangente y normal a :

a) y = xcosx en x = π

b) y = $\frac{2x}{x-1}$ en x = 2

**EJERCICIO 19** Encuentra las dos tangentes a la parábola y = $x^2$ + 4 que pasan por el origen de coordenadas.

**EJERCICIO 20** Halla a para que la recta tangente a y = $ax^3 - x + 2$ en el punto de abscisa x = -2 sea paralela a la recta 3x + y = 2 .

**EJERCICIO 21** ¿En qué punto es la tangente a y = $x^2$ - 4x + 3 paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

**EJERCICIO 22** ¿En que punto es la tangente a y = $\frac{x^2+1}{x}$ horizontal?

**EJERCICIO 23** Representa gráficamente las siguientes funciones indicando dominio, cortes con los ejes, asíntotas, monotonía, extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión :

23.1 y = $\frac{x^4}{4} + x^3$ 23.2 y = $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ 23.3 y = $x^2 - x^4$

23.4 y = $x^4 - 3x^3$ 23.5 y = $\frac{6-6x}{x^2}$ 23.6 y = $\frac{5}{x^2+1}$

23.7 y = $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 23.8 y = $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ 23.9 y = $\frac{x^3}{3-x^2}$

**EJERCICIO 24** Encuentra el máximo y el mínimo absolutos para las funciones dadas en el correspondiente intervalo :

a) y = $x^3 - 3x + 5$ en [ 0 , 2 ] c) y = x – cosx en [ 0 , π]

b) y = $\frac{x^2}{x-1}$ en [ - 1, 1/2] d) y = $xe^x$ en [ 0 , 3]

**EJERCICIO 25 La función y = $x^3$ + ax + b tiene un mínimo relativo en ( 2 , 3). Halla a y b**

**EJERCICIO 26 Halla a, b, c y d para que la función y = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en M( 0, 4) y un mínimo en m ( 2, 0)**

**EJERCICIO 27 Halla a, b y c para que la función y = $ax^3 + bx^2 + c$ tenga un punto de inflexión en P ( 0, 2) y pase por el punto A ( - 1, 3 )**

**EJERCICIO 28 Halla un número positivo que sumado con su inverso de suma mínima.**

**EJERCICIO 29 De todos los rectángulo de perímetro 30 cm, ¿cuál tiene máxima área?**

**EJERCICIO 30 De todos los rectángulos de 16 $m^2$ de área, ¿cuál tiene peímetro mínimo?**

**EJERCICIO 31 Un rectángulo de 60 cm de perímetro gira en torno a uno de sus lados. Halla sus dimensiones para que el volumen del cilindro generado tenga área máxima.**

**EJERCICIO 32 Dos fuentes de luz están separadas por una distancia de 12 m. La intensidad de la luz en un punto situado entre las dos luces viene dada por la función I = $\frac{8}{x^2} + \frac{1}{(12-x)^2}$ donde x es la distancia entre el punto y la fuente de luz más brillante. ¿Para qué valor de x es la intensidad de la luz menor?**

**EJERCICIO 33 Encuentra el punto de la recta y = 4x + 3 que está más próximo al punto P ( 2, -6) . Comprueba el resultado utilizando para la resolución del ejercicio métodos geométricos.**

**EJERCICIO 34 El coste de producir x bidones de un cierto compuesto químico viene dado por la función C (x) = $x^3$ + 100x + 1500. Si cada bidón se vende a 400 euros, calcula cuántos bidones hay que producir para maximizar el beneficio y calcula éste.**

**EJERCICIO 35 Encuentra el punto de la curva y = $\sqrt{x}$ que está más próximo al punto (1, 0 )**

**EJERCICIO 36 Se tiene un ortoedro de base cuadrada y volumen V = 1000 $cm^3$ . Halla sus dimensiones para que la cantidad de cartón utilizado en su construcción sea mínima.**

**EJERCICIO 37 Determina dos números cuya suma sea 24 y tal que el producto de uno por el cubo del otro sea máximo.**

**EJERCICIO 38 Se quiere vallar un terreno rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 8 euros el metro y la de los otros lados cuesta 1 euro el metro, calcula el área máxima que puede vallarse con 2880 euros.**

**EJERCICIO 39 Un determinado fármaco que se usa para controlar la temperatura se inyecta por vía intramuscular. Su efecto (en horas) es dado en función de x (mg de dosis) por E = $\frac{74x}{8x+3}$ .¿Qué cantidad de dosis se debe inyectar para que el fármaco tenga un efecto de más de 4 horas y menos de 4 horas?**

**EJERCICIO 40 Para que cualquier medicamento tenga un efecto benéfico, su concentración en el torrente sanguíneo debe exceder un cierto valor llamado *nivel terapeútico mínimo.* Supongamos que la concentración C de un fármaco al transcurrir t horas después de su ingesta es C = $\frac{20t}{t^2+4}$ mg/l . Si el nivel terapeútico mínimo es 4 mg/l, determina cuándo se ha excedido este nivel.**

**EJERCICIO 41 Para realizar un scaner a los enfermos crónicos de pulmón se suministra a los pacientes un líquido de contraste cuyo porcentaje residual en el cuerpo en función del tiempo medido en horas es p = $-2t^2 + 8t$. Se requiere una concentración mínima de un 6% para poder realizar el examen. Si se le administra el contraste a las 12:00 A.M. , ¿ entre qué horas es posible es realizar el examen?**

**EJERCICIO 42 Una persona se ha intoxicado accidentalmente al ingerri un medicamento caducado. Se estima que el porcentaje de sangre contaminada t horas después de ocurrida la intoxicación es P = $18t - t^2 + 6$ . Se considera el paciente en riesgo vital cuando el porcentaje de sangre contaminada supera el 62%. ¿En qué intervalo de tiempo ocurre esta situación?**

**EJERCICIO 43 Se ha establecido que el virus sinsicial respiratorio que ataca preferentemente a los niños se debe a dos factores que son, primero, la posibolidad de contagio C = $2x^2 - 5x + 4$ y, segundo, la disminución de ciertas vitamina en el organismo V = $x^2 + 6x - 8$. Ambas expresiones dependen de la edad, x. Se estima que los mayores trastornos se producen cuando la diferencia entre ambos factores es menor que 12 ¿Cuáles son las edades de mayor riesgo para contraer la enfermedad?**

**EJERCICIO 44 Los biólogos hallaron que la velocidad de la sangre en una arteria es una función de la distancia de la sangre al eje central de la arteria. De acuerdo con la ley de Poiseuille, la velocidad ( en cm por segundo) de la sangre que está a r cem del eje central de una arteria está dada por la función $S(r) = C ( R^2 - r^2)$ donde C es una constante y R el radio de la arteria. Para cierta arteria C = $1{,}76 . 10^5$ y R = $1{,}2 . 10^{-2}$ cm. a) Halla la velocidad de la sangre en la parte central de la arteria b)Halla la velocidad de la sangre equidistante de la pared arterial y del eje central c) Representa la función e interpreta los resultados.**