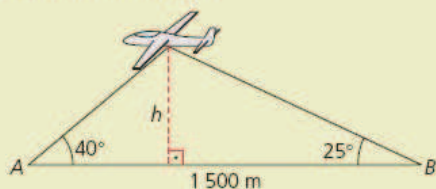


Unidad 4 – Trigonometría I

PÁGINA 87

cuestiones iniciales

1. Un ángulo α , situado en el segundo cuadrante, tiene por coseno $\cos \alpha = -0,2$. Determina el resto de las razones trigonométricas de este ángulo.
2. Discute si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados:
 - a) El seno de un ángulo vale 1,5.
 - b) La tangente de un ángulo vale $-5\ 000$.
 - c) El coseno de 720° vale 1.
3. Calcula el área de un pentágono regular de 12 cm de lado.
4. Dos amigos, situados a 1 500 m de distancia, observan en un mismo instante una avioneta, tal como se muestra en la figura. Las visuales que cada uno de ellos dirigen a la avioneta forman, respectivamente, ángulos de 40° y 25° con la horizontal. Calcula la altura a la que se encuentra la avioneta.



SOLUCIONES

1. Sabemos que $\cos \alpha = -0,2$ y que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Utilizando la fórmula $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ hallamos $\sin \alpha = 0,98$. Por otro lado quedaría:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -4,9$$

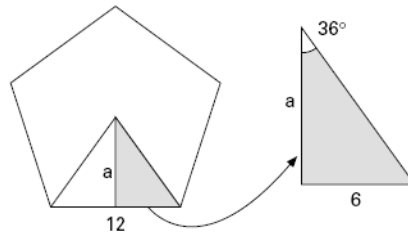
2. La discusión quedaría:

a) Falsa pues $\operatorname{sen} \alpha \in [-1,1]$

b) Verdadera pues $\operatorname{tg} \alpha \in (-\infty, +\infty)$

c) Verdadera pues $\cos 720^\circ \cong \cos 360^\circ = 1$.

3. Según el esquema:

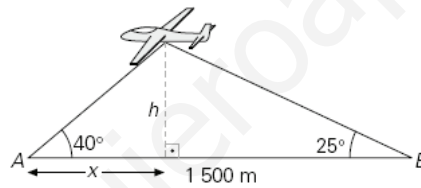


$$360^\circ : 5 = 72^\circ$$

En el triángulo rayado calculemos el valor de la apotema del pentágono.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 36^\circ &= \frac{6}{a} \Rightarrow a = 8,26 \text{ cm} \\ \text{Área} &= \frac{5 \cdot 12 \cdot 8,26}{2} \Rightarrow \text{Área} = 247,8 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

4. Según el esquema:



De los dos triángulos rectángulos de la figura obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 40^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 25^\circ &= \frac{h}{1500 - x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} h &= \frac{1500 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 25^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ} \\ h &= 449,61 \text{ m} \end{aligned}$$

ACTIVIDADES

■ Intenta utilizar las ideas referentes a la fase de llevar adelante la estrategia en la resolución de los siguientes problemas:

1. **El pequeño astuto.** El pequeño astuto tiene más de 36 cajas, pero menos de 1 991. Las dispone todas en una pila triangular y luego las coloca formando una pila cuadrada. ¿Cuántas cajas tiene?
2. **Igualdad.** ¿Será cierta la siguiente igualdad?

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{988 \cdot 999} + \frac{1}{999 \cdot 1\,000} = 0,999$$

3. **Tostado rápido.** Hay que tostar en un tostador tres rebanadas de pan. En el tostador caben dos rebanadas a la vez, pero sólo se tuestan por un lado. Se tarda 30 segundos en tostar una cara de una rebanada de pan; 5 segundos en colocarla en el tostador; 5 segundos en sacarla; y 3 segundos en darle la vuelta. ¿Cuál es el mínimo de tiempo que se necesita para tostar las tres rebanadas?

SOLUCIONES

1. Hay que buscar un número que sea a la vez triangular y cuadrado.

Números triangulares : 1, 3, 4, 10, 15, 21, ..., $\frac{n^2 + n}{2}$

Números cuadrados : 1, 4, 9, 16, 25, ..., n^2

$$\Rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = x^2 \Rightarrow \text{esto se cumple para } n=8, \text{ pues } \frac{8^2 + 8}{2} = x^2 \Rightarrow x^2 = 36.$$

Como dice que hay más de 36 cajas, hay que buscar otra solución, y ésta es :

$$n=49, \text{ pues } \frac{49^2 + 49}{2} = 35^2 = 1225 \Rightarrow \text{Luego } x^2 = 1225 \text{ cajas tiene.}$$

2. Observamos que:

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \text{ con } n \geq 2.$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot 3} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3 \cdot 4} &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ &\dots = \dots - \dots \\ \frac{1}{998 \cdot 999} &= \frac{1}{998} - \frac{1}{999} \\ \frac{1}{999 \cdot 1000} &= \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} \end{aligned}$$

Sumando:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{998 \cdot 999} + \frac{1}{999 \cdot 1000} = 0,999$$

3. Sean A, B, C, las tres rebanadas. Con A1 indicamos que se tuesta la cara 1 y con A2 indicamos que se tuesta la cara 2.

1.º A₁B₁ tarda: 30 s : tostar cara A₁ y B₁

5 s : colocar A₁

5 s : colocar B₁

5 s : sacar B₁

2.º A₂C₁ tarda: 3 s : dar la vuelta A₁

5 s : meter C₁

30 s : tostar cara A₂ y C₁

3 s : dar la vuelta C₂

3.º B₂C₂ tarda: 5 s : sacar A₂

5 s : meter B₂

30 s : tostar cara B₂ y C₂

5 s : sacar B₂

5 s : sacar C₂

En total se necesitan: 136 s en tostar las 3 rebanadas.

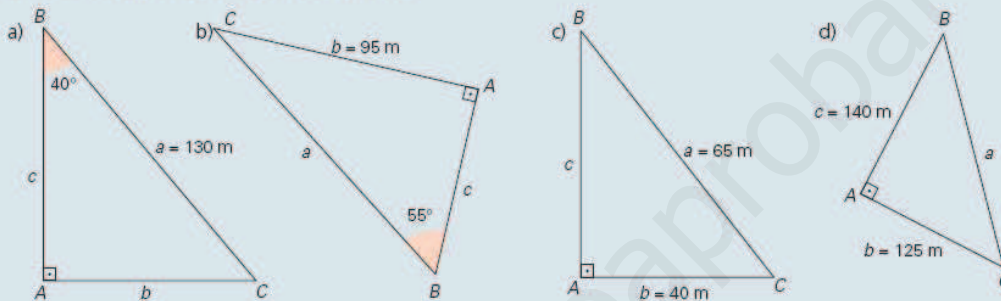
ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

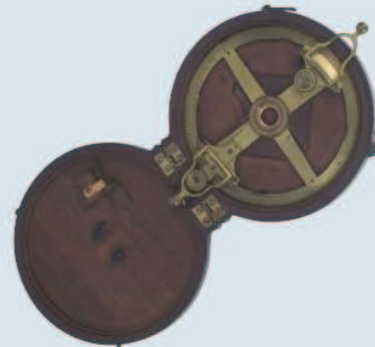
1. Completa en tu cuaderno la siguiente tabla referida a la equivalencia de ángulos en los distintos sistemas de medida:

90°		120°		225°		$39^\circ 42'$		$135^\circ 22' 42''$	
	$\frac{\pi}{4}$ rad		$\frac{3\pi}{2}$ rad		$\frac{4\pi}{3}$ rad		1 rad		2,5 rad

2. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:



3. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42° . ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿y colocándose a distancia triple?
4. Calcula la altura de un poste, sabiendo que desde un cierto punto del suelo se ve este con un ángulo de 30° y, si nos acercamos 30 m, lo vemos con un ángulo de 45° .
5. Calcula los ángulos de un trapecio isósceles de altura 60 m cuyas bases miden 83 y 51 m.
6. Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.
7. Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman?
8. Sabiendo que $\cos \alpha = -\frac{5}{12}$ y que el ángulo está en el segundo cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.
9. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$ y que $180^\circ < x < 270^\circ$, calcula las demás razones trigonométricas.
10. Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo A cuya tangente es positiva y $\operatorname{sen} A = -\frac{3}{5}$.



↑ Los astrolabios se utilizan para determinar ángulos.

SOLUCIONES

1. La tabla queda:

90°	45°	120°	270°	225°
$\frac{\pi}{2}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{2\pi}{3}$ rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	$\frac{5\pi}{4}$ rad
240°	39° 42'	57° 20'	135° 22' 42"	143° 19'
$\frac{4\pi}{3}$ rad	0,22 π rad	1 rad	0,75 π rad	2,5 rad

2. La resolución de los triángulos queda:

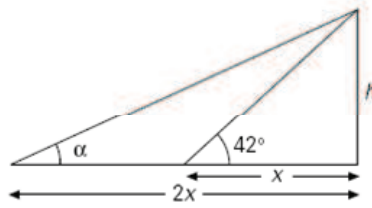
I) $\hat{C} = 50^\circ$; $b = 130 \cdot \text{sen } 40^\circ = 83,56 \text{ m}$;
 $c = 130 \cdot \text{cos } 40^\circ = 99,59 \text{ m}$

II) $\hat{C} = 35^\circ$; $c = \frac{95}{\text{tg } 55^\circ} = 66,52 \text{ m}$;
 $a = \frac{95}{\text{sen } 55^\circ} = 115,97 \text{ m}$

III) $\text{cos } \hat{C} = \frac{40}{65} \Rightarrow \hat{C} = 52^\circ 1'$; $\hat{B} = 37^\circ 59'$;
 $c = \sqrt{65^2 - 40^2} = 51,23 \text{ m}$

IV) $a = \sqrt{140^2 + 125^2} = 187,68 \text{ m}$;
 $\text{tg } \hat{C} = \frac{140}{125} \Rightarrow \hat{C} = 48^\circ 14' 23''$
 $\hat{B} = 41^\circ 45' 37''$

3. Sea la figura:



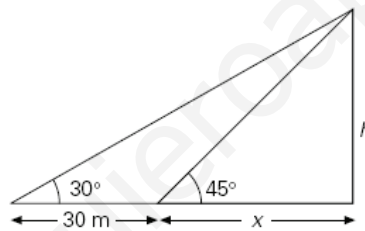
Queda:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 42^{\circ} = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 42^{\circ} = 0,45; \quad \alpha = 24^{\circ} 14' 15''$$

Si nos colocamos a distancia triple se verificará:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{3x} = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} 42^{\circ} = 0,3 \Rightarrow \beta = 16^{\circ} 42' 23''$$

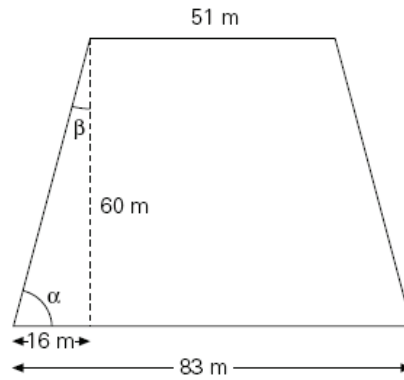
4. Sea la figura:



Queda:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 45^{\circ} = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{h}{30+x} \end{array} \right\} \Rightarrow h = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 45^{\circ} \cdot \operatorname{tg} 30^{\circ}}{\operatorname{tg} 45^{\circ} - \operatorname{tg} 30^{\circ}} \Rightarrow h = 40,98 \text{ m}$$

5. Sea la figura:



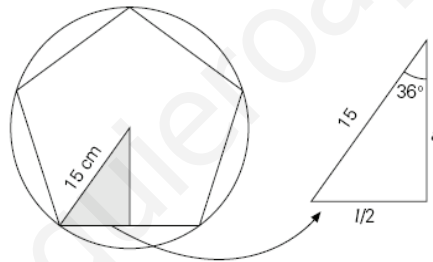
Queda:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{16} \Rightarrow \alpha = 75^{\circ} 4' 7''$$

$$\beta = 90 - \alpha = 14^{\circ} 55' 53''$$

Los ángulos del trapecio miden $75^{\circ} 4' 7''$ los dos agudos y $104^{\circ} 55' 33''$ cada uno de los dos obtusos.

6. Sea la figura:

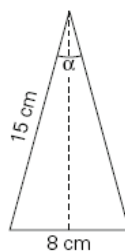


Llamamos l al lado del pentágono. De la figura obtenemos:

$$\operatorname{sen} 36^{\circ} = \frac{l/2}{15} \Rightarrow l = 30 \cdot \operatorname{sen} 36^{\circ} \Rightarrow l = 17,63 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 5 \cdot 17,63 = 88,15 \text{ cm}$$

7. Sea la figura:



Llamamos α al ángulo que forman las ramas del triángulo rectángulo de la figura. Obtenemos:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{15} \Rightarrow \alpha = 30^{\circ} 55' 55''$$

8. Quedan:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{119}}{12} = 0,91; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{119}}{5} = -2,18$$

9. Quedan:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{-3}{5} \text{ y } \operatorname{sen} x = \frac{-4}{5}$$

10. Quedan:

$$\text{Si } \operatorname{tg} A > 0 \Rightarrow 0 < A < \frac{\pi}{2} \text{ ó } \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Como } \operatorname{sen} A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \pi < A < \frac{3\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \cos A = -\frac{4}{5} \text{ y } \operatorname{tg} A = \frac{3}{4}$$

www.yoquieroaprobar.es

11. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha}$

b) $\frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}$

c) $\frac{\cos^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{cotg} \alpha}$

d) $\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha)$

e) $\operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha$

f) $\cos^3 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$

g) $\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$

h) $\frac{\operatorname{sec} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

i) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha$

j) $\operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

12. Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguientes razones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen} 120^\circ$

c) $\cos 210^\circ$

e) $\operatorname{tg} 300^\circ$

g) $\operatorname{cotg} 225^\circ$

b) $\operatorname{sen} 1215^\circ$

d) $\operatorname{tg} (-60^\circ)$

f) $\operatorname{sec} \frac{23\pi}{6}$

h) $\operatorname{cosec} \frac{29\pi}{4}$

13. Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0,6$ y que α es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

a) $\operatorname{sen} (180^\circ - \alpha)$

c) $\cos (180^\circ + \alpha)$

e) $\cos (90^\circ - \alpha)$

b) $\operatorname{tg} (90^\circ + \alpha)$

d) $\operatorname{sen} (270^\circ + \alpha)$

f) $\operatorname{cotg} (360^\circ - \alpha)$

14. Demuestra, de forma razonada, si son o no ciertas las siguientes igualdades:

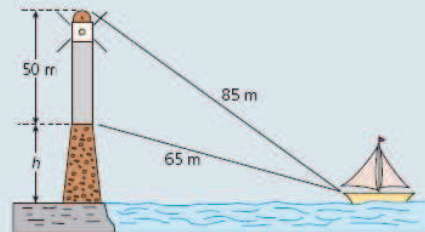
a) $\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b$

c) $\frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha}$

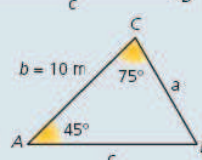
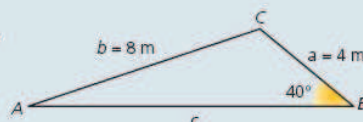
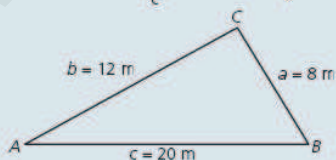
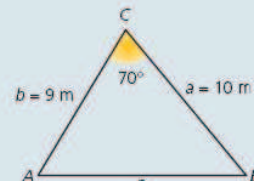
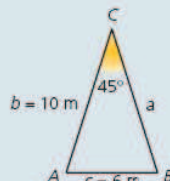
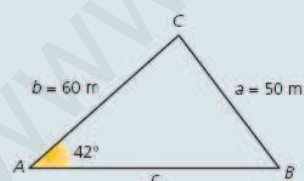
b) $\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$

d) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$

15. En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias desde los extremos superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 m. Halla la altura del promontorio.



16. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:



SOLUCIONES

11. Las simplificaciones quedan:

$$\text{a) } \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\text{b) } \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} = 1 - \operatorname{sen} \alpha$$

$$\text{c) } \frac{\cos^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{cotg} \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{d) } \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{cotg} \alpha) = 1$$

$$\text{e) } \operatorname{sen}^3 \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\text{f) } \cos^3 \alpha + \operatorname{sen}^3 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen}^2 \alpha = (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$$

$$\text{g) } \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha$$

$$\text{h) } \frac{\sec \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{1}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \cos \alpha$$

$$\text{i) } \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\text{j) } \operatorname{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = (\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

12. Queda:

$$\text{a) } \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \operatorname{sen} 1215^\circ = \operatorname{sen} 135^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) } \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} (-60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{e) } \operatorname{tg} 300^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{f) } \sec \frac{23\pi}{6} = \sec 330^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{g) } \operatorname{cotg} 225^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1$$

$$\text{h) } \operatorname{cosec} \frac{29\pi}{4} = \operatorname{cosec} 225^\circ = -\sqrt{2}$$

13. Los cálculos quedan:

$$\text{a) } \operatorname{sen} (180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,6$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

$$\text{c) } \cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$$

$$\text{d) } \operatorname{sen} (270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$$

$$\text{e) } \cos (90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = 0,6$$

$$\text{f) } \operatorname{cotg} (360^\circ - \alpha) = -\operatorname{cotg} \alpha = -\frac{4}{3}$$

14. Se comprueba del siguiente modo:

$$a) \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{tg} b}} = \frac{(\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b) \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b$$

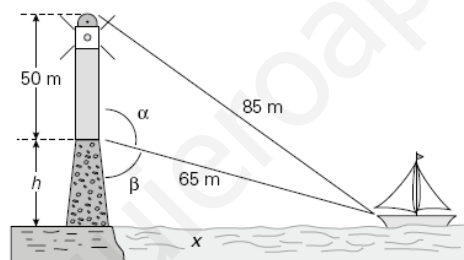
$$b) \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x (\operatorname{sen}^2 x - 1) = (1 - \operatorname{cos}^2 x) (-\operatorname{cos}^2 x) = \operatorname{cos}^4 x - \operatorname{cos}^2 x$$

$$c) \frac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{1 + \operatorname{sen} \alpha} \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha = \operatorname{cos}^2 \alpha$$

$$d) \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^2 x (1 - \operatorname{sen}^2 x) = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{cos}^2 x} \cdot \operatorname{cos}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

Todas las igualdades son verdaderas.

15. Sea la representación del problema:



Por Pitágoras obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} 85^2 = x^2 + (50 + h)^2 \\ 65^2 = h^2 + x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow h = 5 \text{ m}$$

También podemos calcular el ángulo α por el teorema del coseno:

$$85^2 = 50^2 + 65^2 - 2 \cdot 65 \cdot 50 \cdot \operatorname{cos} \alpha \Rightarrow \alpha = 94^\circ 24' 42''$$

$$\text{Por tanto } \beta = 180^\circ - \alpha = 85^\circ 35' 18'' \Rightarrow \operatorname{cos} \beta = \frac{h}{65} \Rightarrow h = 65 \cdot \operatorname{cos} \beta = 5 \text{ m}$$

16. Los triángulos se resuelven del siguiente modo:

$$a) 50^2 = 60^2 + c^2 - 2 \cdot 60 \cdot c \cdot \cos 42^\circ \Rightarrow c = 74,39\text{m} \text{ ó } c = 14,79\text{m}$$

$$\bullet \text{ Si } c = 74,39\text{m} \Rightarrow \cos C = \frac{50^2 + 60^2 - 74,39^2}{2 \cdot 50 \cdot 60} \Rightarrow C = 84^\circ 35' 9'' \text{ y } B = 53^\circ 24' 51''$$

$$\bullet \text{ Si } c = 14,79\text{m} \Rightarrow \cos C = \frac{50^2 + 60^2 - 14,79^2}{2 \cdot 50 \cdot 60} \Rightarrow C = 11^\circ 25' 5'' \text{ y } B = 126^\circ 34' 55''$$

$$b) 6^2 = 10^2 + a^2 - 2 \cdot 10 \cdot a \cos 45^\circ \Rightarrow a \text{ no es un número real. Este triángulo no tiene solución.}$$

$$c) c^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos 70^\circ \Rightarrow c = 10,93 \text{ m}$$
$$10^2 = 9^2 + 10,93^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10,93 \cdot \cos A \Rightarrow A = 59^\circ 17' 35'' \text{ y } B = 50^\circ 42' 25''$$

$$d) \cos A = \frac{12^2 + 20^2 - 8^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \Rightarrow A = 0^\circ$$

Imposible. Además un lado es igual a la suma de los otros dos, por tanto no existe este triángulo.

$$e) 8^2 = 4^2 + c^2 - 2 \cdot 4 \cdot c \cdot \cos 40^\circ \Rightarrow c = 10,64 \text{ m}$$
$$\cos A = \frac{8^2 + 10,64^2 - 4^2}{2 \cdot 8 \cdot 10,64} \Rightarrow A = 18^\circ 44' 44'' \text{ y } C = 121^\circ 15' 16''$$

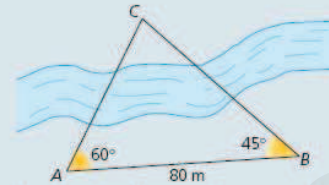
$$f) B = 60^\circ.$$

Utilizando el teorema del seno obtenemos :

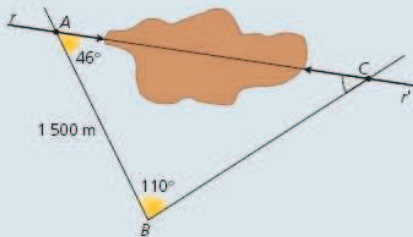
$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin 60^\circ} \Rightarrow a = 8,16 \text{ m}$$
$$\frac{c}{\sin 75^\circ} = \frac{10}{\sin 60^\circ} \Rightarrow c = 11,15 \text{ m}$$

ACTIVIDADES FINALES

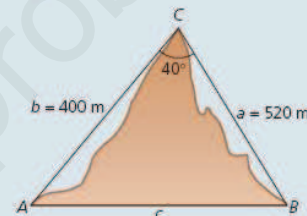
17. Desde dos puntos A y B situados en la misma orilla de un río y distantes entre sí 80 m, se observa un punto C , situado en la orilla opuesta, bajo ángulos de 60° y 45° , respectivamente. Calcula las distancias desde los puntos A y B hasta el punto C .



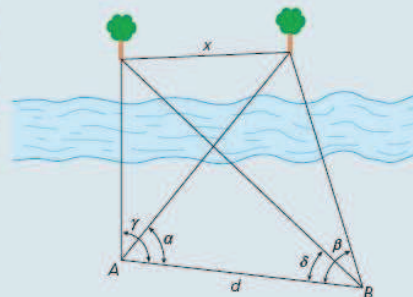
18. La figura muestra la forma de construir un túnel que atraviesa una montaña, perforando simultáneamente por ambas caras de la montaña. Fijamos la dirección de perforación ofrecida por r , por lo que el problema consiste en encontrar la dirección de perforación dada por r' . En la práctica, se procede de la forma siguiente: fijamos un punto A en la recta r . Elegimos un ángulo A , por ejemplo 46° , y medimos una distancia AB de 1 500 m, por ejemplo. En B tomamos un ángulo, por ejemplo, de 110° . Con estos datos podemos determinar el ángulo C y la distancia BC . A partir de ambos datos queda determinada la dirección r' de perforación. Calcula estos datos.



19. La figura muestra el corte transversal de una montaña en la que se quiere construir un túnel. La cima o punto C , visible desde A y B , se encuentra a 400 m de A y 520 m de B , y el ángulo C mide 40° . Calcula la longitud del túnel AB .

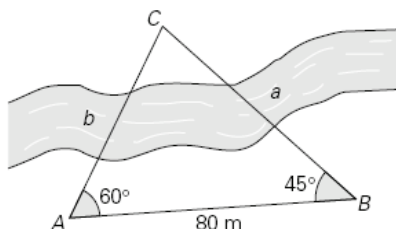


20. Halla el área de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.
21. En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 15 cm; el lado oblicuo, que mide 5 cm; y el ángulo que este forma con la base mayor, que es de 60° . Halla el área del trapecio.
22. Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse mide 120° . Halla el área y el perímetro del mismo.
23. Dos barcos salen de un puerto, y desde un mismo punto, según dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60° . Calcula la distancia que los separará al cabo de dos horas de navegación suponiendo que mantienen velocidades constantes de 50 y 65 km/h, respectivamente.
24. Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un dodecágono de 6 dm de lado.
25. El ángulo en el vértice de un cono de revolución mide 60° y la generatriz 12 m. Halla el volumen del cono.
26. En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita conocer la distancia entre dos puntos inaccesibles. Este problema fue resuelto ya en el año 1615 por el sabio holandés Snellius. En la figura tenemos dos árboles a los que no podemos acceder, porque nos lo impide el río. Desde dos puntos A y B medimos los ángulos α , β , γ y δ , y la distancia d entre ambos puntos. Calcula la distancia x sabiendo que $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $\gamma = 110^\circ$, $\delta = 40^\circ$ y $d = 120$ m.



SOLUCIONES

17. Un esquema del problema sería:



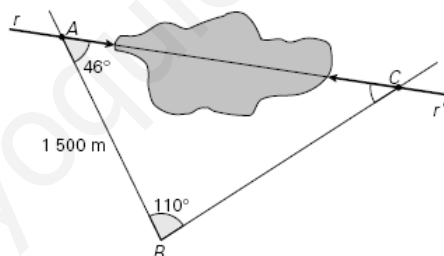
El ángulo $\hat{C} = 75^\circ$. Utilizando el teorema del seno obtenemos:

$$\frac{a}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{80}{\text{sen } 75^\circ} \Rightarrow a = 71,73 \text{ m}$$

$$\frac{b}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{80}{\text{sen } 75^\circ} \Rightarrow b = 58,56 \text{ m}$$

Las distancias pedidas son 71,13 m y 58,56 m.

18. Un esquema del problema es el siguiente:

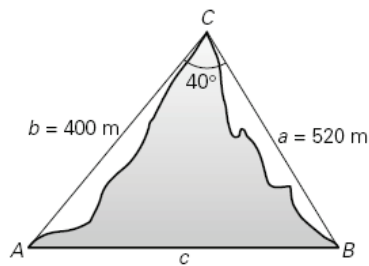


El ángulo $\hat{C} = 24^\circ$.

Determinamos la distancia BC (lado a) mediante el teorema del seno:

$$\frac{1500}{\text{sen } 24^\circ} = \frac{BC}{\text{sen } 46^\circ} \Rightarrow BC = 2\,652,85 \text{ m}$$

19. La figura queda:

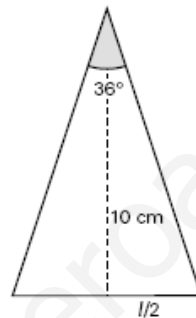


Mediante el teorema del coseno:

$$c^2 = 400^2 + 520^2 - 2 \cdot 400 \cdot 520 \cdot \cos 40^\circ \Rightarrow c = 334,25 \text{ m} = AB$$

20. Como el decágono está circunscrito a la circunferencia, el radio de ésta es la apotema del polígono. El ángulo central del polígono es 36° .

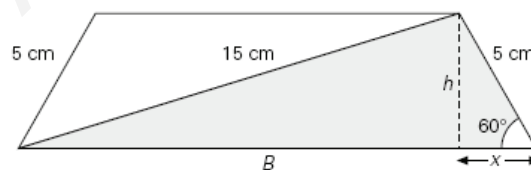
Obtenemos el lado del triángulo de la figura:



El cálculo queda:

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 6,5 \text{ cm} \Rightarrow \text{Área} = \frac{10 \cdot 6,5 \cdot 10}{2} = 325 \text{ cm}^2$$

21. la figura es:



En el triángulo rayado aplicamos el teorema del coseno y obtenemos la base mayor B.

$$15^2 = B^2 + 5^2 - 2 \cdot B \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow B = 16,86 \text{ cm}$$

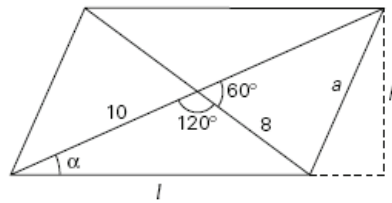
La altura h del triángulo mide: $h = 5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 4,33 \text{ cm}$

La base menor mide: $B - 2 \cdot x = B - 2 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 11,86 \text{ cm}$

El área total queda:

$$\text{Área} = \frac{B + b}{2} h = \frac{16,86 + 11,86}{2} 4,33 = 62,18 \text{ cm}^2$$

22. La figura queda:



Los cálculos son:

$$l^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow l = 15,62 \text{ cm}$$

$$a^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow a = 9,17 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 15,62 + 2 \cdot 9,17 = 49,58 \text{ cm}$$

$$a^2 = 20^2 + l^2 - 2 \cdot 20 \cdot l \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9,17^2 = 20^2 + 15,62^2 - 2 \cdot 20 \cdot 15,62 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \alpha = 26^\circ 20' 50''$$

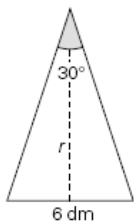
$$\sin \alpha = \frac{h}{20} \Rightarrow \sin 26^\circ 20' 50'' = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 8,88 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura} = l \cdot h = 15,62 \cdot 8,88 \Rightarrow \text{Área} = 138,71 \text{ cm}^2$$

23. La distancia d que los separa viene dada por:

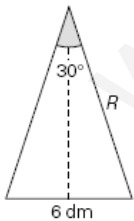
$$d^2 = 100^2 + 130^2 - 2 \cdot 100 \cdot 130 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow d = 117,9 \text{ km}$$

24. Las soluciones en cada uno de los casos:



El radio de la circunferencia inscrita es la apotema del dodecágono, por tanto:

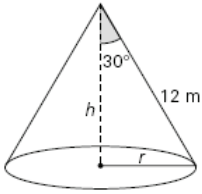
$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{3}{r} \Rightarrow r = 11,20 \text{ dm}$$



El radio de la circunferencia circunscrita lo calculamos en el triángulo:

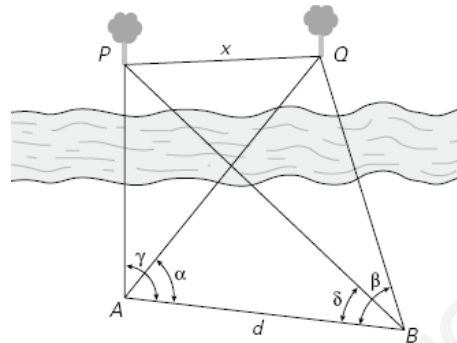
$$\sin 15^\circ = \frac{3}{R} \Rightarrow R = 11,59 \text{ dm}$$

25. La solución queda:



$$\left. \begin{array}{l} r = 12 \cdot \sin 30^\circ = 6 \text{ m} \\ h = 12 \cdot \cos 30^\circ = 10,39 \text{ m} \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 10,39}{3} = 391,7 \text{ m}^3$$

26. Según la figura:



Los cálculos quedan:

Sean P y Q los árboles.

En el triángulo ABP hallamos PB :

$$\frac{PB}{\sin 110^\circ} = \frac{120}{\sin 30^\circ} \Rightarrow PB = 225,53 \text{ m}$$

En el triángulo ABQ hallamos BQ :

$$\frac{BQ}{\sin 50^\circ} = \frac{120}{\sin 55^\circ} \Rightarrow BQ = 112,22 \text{ m}$$

En el triángulo PBQ hallamos x :

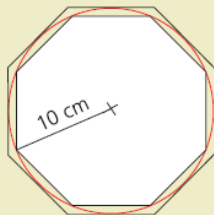
$$x^2 = PB^2 + BQ^2 - 2 \cdot PB \cdot BQ \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow x = 148,30 \text{ m}$$

Unidad 5 – Trigonometría II

PÁGINA 111

cuestiones iniciales

1. Razona la veracidad de las siguientes igualdades:
 - a) $\cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ + \cos 45^\circ$
 - b) $\sin(2 \cdot 30^\circ) = 2 \cdot \sin 30^\circ$
 - c) $\operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$
2. En una circunferencia de 10 cm de radio inscribimos y circunscribimos sendos octógonos regulares. Calcula el área de la superficie comprendida entre ellos.

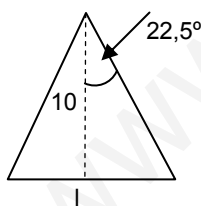


3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:
 - a) $\sin(x + 25^\circ) = 0,5$
 - b) $\sin x = \cos x$
 - c) $\operatorname{tg}(2x) = \sqrt{3}$
4. Deducir la expresión que permite calcular el área de un triángulo del que se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

SOLUCIONES

1. Las tres igualdades son falsas. Para probarlo basta con utilizar la calculadora.
2. Calculamos el área del octógono circunscrito y le restamos el área del octógono inscrito obteniendo la superficie pedida.

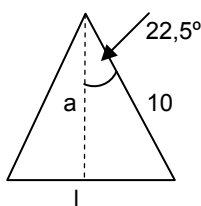
- El octógono circunscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\operatorname{tg} 22,5^\circ = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 8,28 \text{ cm}$$

$$\text{Área del octógono circunscrito} = 331,2 \text{ cm}^2$$

- El octógono inscrito consta de ocho triángulos como el de la figura:



$$\sin 22,5^\circ = \frac{l/2}{10} \Rightarrow l = 7,65 \text{ cm}$$

$$\cos 22,5^\circ = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 9,24 \text{ cm}$$

$$\text{Área del octógono inscrito} = 282,744 \text{ cm}^2$$

El área comprendida entre ambos será: $331,2 - 282,744 = 48,456 \text{ cm}^2$

3. Las soluciones quedan:

$$\text{a) } \sin(x + 25^\circ) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 5^\circ + 360^\circ K \\ x = 125^\circ + 360^\circ K \end{cases}$$

$$\text{b) } \sin x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} x = 45^\circ + 360^\circ K \\ x = 225^\circ + 360^\circ K \end{cases}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(2x) = \sqrt{3} \Rightarrow \{x = 30^\circ + 90^\circ K$$

4. Supongamos conocidos los lados b y c y el ángulo A comprendido:

Calculamos la altura: $h = b \cdot \operatorname{sen} A$

El área será:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \operatorname{sen} A}{2} \Rightarrow \text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \operatorname{sen} A$$

ACTIVIDADES

■ Practica la fase de revisar el proceso y sacar consecuencias de él en los siguientes problemas:

1. **Vacas lecheras.** Cuatro vacas blancas y tres vacas negras dan tanta leche en cinco días como tres vacas blancas y cinco negras en cuatro días. ¿Qué clase de vaca es la más lechera, la blanca o la negra?
2. **Igualdad.** En un almacén de fruta almacenamos naranjas en pilas con forma de pirámide de base cuadrada. Cada lado de la base lo forman 15 naranjas, ¿cuál es el máximo número de naranjas que podemos apilar? Intenta generalizar este problema.

SOLUCIONES

1. Llamemos B a las vacas blancas y N a las vacas negras:

$$5 \cdot (4B + 3N) = 4 \cdot (3B + 5N) \Rightarrow 20B + 15N = 12B + 20N \Rightarrow 8B = 5N$$

Dan más leche las vacas negras.

2. El número de naranjas en la pirámide es:

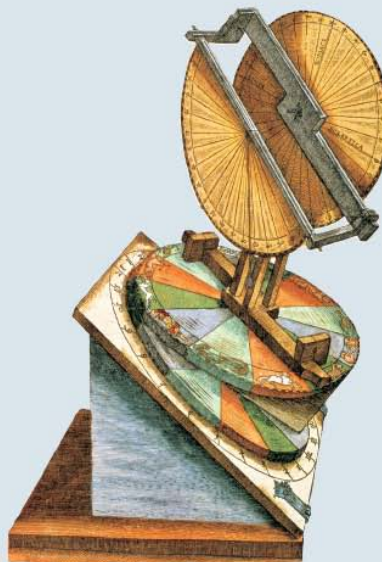
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 14^2 + 15^2 = 1\ 240 \text{ naranjas.}$$

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 1. Sabiendo que $\operatorname{sen} a = -\frac{12}{13}$ y $\operatorname{tg} b = \frac{24}{7}$, y que $270^\circ < a < 360^\circ$ y $180^\circ < b < 270^\circ$, calcula:
 - a) $\operatorname{sen}(a + b)$
 - b) $\operatorname{cos}(a + b)$
 - c) $\operatorname{tg}(a + b)$.
- 2. Partiendo de las razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° , calcula:
 - a) $\operatorname{sen} 90^\circ$
 - b) $\operatorname{cos} 90^\circ$
 - c) $\operatorname{sen} 120^\circ$
 - d) $\operatorname{cos} 120^\circ$
 - e) $\operatorname{tg} 120^\circ$
 - f) $\operatorname{sen} 105^\circ$
 - g) $\operatorname{cos} 105^\circ$
 - h) $\operatorname{tg} 105^\circ$
- 3. Sabiendo que el seno de un ángulo es $\operatorname{sen} a = \frac{3}{5}$ y $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, halla las razones trigonométricas de $a - 30^\circ$.
- 4. Justifica las siguientes igualdades:
 - a) $\operatorname{sen}(180^\circ + a) = -\operatorname{sen} a$
 - b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\operatorname{cotg} a$
 - c) $\operatorname{sen}(270^\circ + a) = -\operatorname{cos} a$
 - d) $\operatorname{tg}(\pi + 2a) = \operatorname{tg} 2a$
 - e) $\operatorname{cos}(90^\circ + a) = -\operatorname{sen} a$
 - f) $\operatorname{tg}(270^\circ + a) = -\operatorname{cotg} a$
- 5. Calcula el valor de la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b - c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a - c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a - b)$$
- 6. Demuestra que $\operatorname{cos}(a + b) \cdot \operatorname{cos}(a - b) = \operatorname{cos}^2 a - \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{cos}^2 b - \operatorname{sen}^2 a$.
- 7. Demuestra que $\operatorname{sen}(a + b) \cdot \operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{cos}^2 b - \operatorname{cos}^2 a$.
- 8. Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:
 - a) $\operatorname{cos} 3a$ en función de $\operatorname{cos} a$
 - b) $\operatorname{sen} 4a$ en función de $\operatorname{sen} a$
- 9. Sabiendo que $\operatorname{tg} a = \sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo $2a$.
- 10. Sabiendo que $\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3}$, halla $\operatorname{tg} a$
- 11. Simplifica las expresiones:
 - a) $\frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \operatorname{cos} 2a}$
 - b) $\frac{\operatorname{sen} 2a}{\operatorname{sen} a} : \frac{1 + \operatorname{cos} 2a}{\operatorname{cos} a}$
- 12. Demuestra que $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x$.
- 13. Comprueba que $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a} = \operatorname{cos} 2a$.
- 14. Calcula las razones trigonométricas de $22^\circ 30'$ y las de 75° . En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.



SOLUCIONES

1. Quedan:

$$\operatorname{sen} a = -\frac{12}{13} \Rightarrow \operatorname{cos} a = \frac{5}{13} \text{ y } \operatorname{tg} a = -\frac{12}{5}$$

$$\operatorname{tg} b = \frac{24}{7} \Rightarrow \operatorname{cos} b = -\frac{7}{25} \text{ y } \operatorname{sen} b = -\frac{24}{25}$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = -\frac{36}{325}; \operatorname{cos}(a+b) = -\frac{323}{325}; \operatorname{tg}(a+b) = \frac{36}{323}$$

2. Los cálculos son los siguientes:

$$\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 60^\circ) = 1$$

$$\operatorname{cos} 90^\circ = \operatorname{cos}(30^\circ + 60^\circ) = 0$$

$$\operatorname{sen} 120^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos} 120^\circ = \operatorname{cos}(60^\circ + 60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ + 60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen} 105^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 105^\circ = \operatorname{cos}(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 105^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 60^\circ) = -2 - \sqrt{3}$$

3. Quedan:

$$\operatorname{sen} a = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{cos} a = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}(a - 30^\circ) = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{cos} 30^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \operatorname{cos} a = \frac{3\sqrt{3} + 4}{10}$$

$$\operatorname{cos}(a - 30^\circ) = \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} 30^\circ + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$$

$$\operatorname{tg}(a - 30^\circ) = \frac{\operatorname{sen}(a - 30^\circ)}{\operatorname{cos}(a - 30^\circ)} = -\frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$$

4. Para ello es suficiente con utilizar los teoremas de adición para el seno, coseno y tangente estudiados en esta unidad didáctica.

5. Queda de la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(b-c) - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(a-c) + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen}(a-b) &= \\ = \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos c - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos a + \\ + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a &= 0 \end{aligned}$$

6. Queda de la forma:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) &= (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot (\cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) = \\ &= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b \end{aligned}$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \cos^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\cos^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b = \cos^2 b \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a$

7. Queda de la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) \cdot \operatorname{sen}(a-b) &= (\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a) \cdot (\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a) = \\ &= \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a \end{aligned}$$

A partir de esta expresión obtenemos las dos igualdades:

- $\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = \operatorname{sen}^2 a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 b) - (1 - \operatorname{sen}^2 a) \cdot \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 b$
- $\operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = \cos^2 b \cdot (1 - \cos^2 a) - (1 - \cos^2 b) \cdot \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a$

8. Queda:

a) $\cos 3a = \cos(2a + a) = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

b) $\operatorname{sen} 4a = \operatorname{sen} 2 \cdot 2a = (4 \operatorname{sen} a - 8 \operatorname{sen}^3 a) \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$

También se puede resolver esta actividad mediante la fórmula de De Moivre.

9. Las razones trigonométricas quedan:

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{24} \text{ y } \left(\pi < a < \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow \operatorname{sen} a = -\frac{\sqrt{24}}{5}; \cos a = -\frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a = \frac{2\sqrt{24}}{25}; \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = -\frac{23}{25}; \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = -\frac{2\sqrt{24}}{23}$$

10. La tangente queda:

$$\operatorname{tg} 2a = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 a + 2 \operatorname{tg} a - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o bien } \operatorname{tg} a = -\sqrt{3}$$

11. Las simplificaciones quedan:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a}{2 \cos^2 a} = \operatorname{tg} a$$

$$\text{b) } \frac{\operatorname{sen} 2a}{\operatorname{sen} a} : \frac{1 + \cos 2a}{\cos a} = \frac{\operatorname{sen} 2a \cdot \cos a}{\operatorname{sen} a \cdot (1 + \cos 2a)} = 1$$

12. Partimos del segundo miembro para llegar al primero:

$$\operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{2(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{2 \operatorname{tg} x} = \frac{1 - 1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x$$

13. Partiendo del primer miembro obtenemos:

$$\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} - \operatorname{tg} a} = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 a) \operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a (1 + \operatorname{tg}^2 a)} = \cos 2a$$

14. Quedan:

$$\operatorname{sen} 22^\circ 30' = \operatorname{sen} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22^\circ 30' = \cos \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \operatorname{tg} \left(\frac{45^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{sen} 75^\circ = \operatorname{sen} \left(\frac{150^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 75^\circ = \cos \left(\frac{150^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos 150^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg} \left(\frac{150^\circ}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos 150^\circ}{1 + \cos 150^\circ}} = 2 + \sqrt{3}$$

www.yoquieroaprobar.es

■ 15. Sabiendo que $\cotg a = -2$ y a es el mayor ángulo negativo que verifica esta igualdad, calcula las razones trigonométricas del ángulo mitad.

■ 16. Expresa, en función de una razón trigonométrica del ángulo mitad:

a) $\frac{1 - \cos a}{\sin a}$ b) $\frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a}$

■ 17. Sabiendo que $\cos \frac{x}{2} = -\frac{2}{3}$ y que x es un ángulo del tercer cuadrante, halla $\sin x$, $\cos x$.

■ 18. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\frac{\sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ}$ b) $\frac{\sin 195^\circ - \sin 75^\circ}{\sin 195^\circ + \sin 75^\circ}$ c) $\frac{\cos 60^\circ - \cos 40^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 40^\circ}$

■ 19. Demuestra que $\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \operatorname{tg} y$.

■ 20. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ e) $\sin 3x - \sin 30^\circ = 0$
 b) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ d) $\cos\left(\frac{1}{2}(x + \pi)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\operatorname{cotg}\left(\frac{x + 45^\circ}{2}\right) = \sqrt{3}$

■ 21. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin 2x = 2 \cos x$ d) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$
 b) $\sin x + \sin 3x = \cos x$ e) $\sin 2x \cdot \cos x = 6 \sin^3 x$
 c) $\sin 4x = \sin 2x$ f) $2 \sin x = \operatorname{tg} x$

■ 22. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin x = 1 + 2 \cos^2 x$ d) $6 \cos^2 x + 6 \sin^2 x = 5 + \sin x$
 b) $\sec x + \operatorname{tg} x = 0$ e) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 1$
 c) $6 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$ f) $\cos^2 x = 3 \sin^2 x$

■ 23. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$ b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ c) $\sin x + \cos x = \frac{5}{2}$

■ 24. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left. \begin{array}{l} x + \sin^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{array} \right\}$ c) $\left. \begin{array}{l} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos(x+y) = 1 \end{array} \right\}$
 b) $\left. \begin{array}{l} \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \end{array} \right\}$ d) $\left. \begin{array}{l} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{array} \right\}$

SOLUCIONES

15. Quedaría:

$$\cotg a = -2 \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{2} < a < 2\pi \right) \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \pi \right) \Rightarrow \operatorname{tg} a = -\frac{1}{2}; \cos a = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 2}{2\sqrt{5}}}; \cos \frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 2}{2\sqrt{5}}}; \operatorname{tg} \frac{a}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = 2 - \sqrt{5}$$

16. Queda expresado del siguiente modo:

$$\text{a) } \frac{1 - \cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{1 - \cos^2 \frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

$$\text{b) } \frac{\operatorname{sen} 2a}{1 + \cos 2a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos a} = \frac{2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a}{1 + \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a} \cdot \frac{\cos a}{1 + \cos^2 \frac{a}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} \cdot \cos^2 a}{(2 \cos^2 a) \cdot (2 \cos^2 \frac{a}{2})} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

17. Ambas razones trigonométricas quedan:

$$\cos \frac{x}{2} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{9}; \operatorname{sen} x = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

18. Las simplificaciones quedan:

$$\text{a) } \frac{\operatorname{sen} 40^\circ + \operatorname{sen} 20^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{2 \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cos 10^\circ}{2 \cos 30^\circ \cdot \cos 10^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \frac{\operatorname{sen} 195^\circ - \operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{sen} 195^\circ + \operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{2 \cos 135^\circ \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{2 \operatorname{sen} 135^\circ \cdot \cos 60^\circ} = \cotg 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\text{c) } \frac{\cos 60^\circ - \cos 40^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ - \operatorname{sen} 40^\circ} = \frac{-2 \operatorname{sen} 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 10^\circ}{2 \cos 50^\circ \cdot \operatorname{sen} 10^\circ} = -\operatorname{tg} 50^\circ = -1,19$$

19. Se demuestra del siguiente modo:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)} = \frac{-2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(-y)}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos y} = \operatorname{tg} y$$

20. La solución queda:

$$a) x = \frac{\pi}{24} + K\pi \text{ ó } x = \frac{5\pi}{24} + K\pi$$

$$b) x = \frac{11\pi}{36} + \frac{2K\pi}{3} \text{ ó } x = \frac{19\pi}{36} + \frac{2K\pi}{3}$$

$$c) x = \frac{\pi}{6} + \frac{K\pi}{2}$$

$$d) x = -\frac{2\pi}{3} + 4K\pi \text{ ó } x = \frac{8\pi}{3} + 4K\pi$$

$$e) x = 10^\circ + 120^\circ K \text{ ó } x = 50^\circ + 120^\circ K$$

$$f) x = 15^\circ + 360^\circ K$$

21. Las soluciones quedan:

$$a) \sin 2x = 2 \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cos x \Rightarrow 2 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos x = 0 \\ \Rightarrow \cos x = 0; \sin x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 180^\circ K}$$

$$b) \sin x + \sin 3x = \cos x \Rightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos x - \cos x = 0 \\ \Rightarrow \cos x = 0; \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 180^\circ K} \quad \boxed{x = 15^\circ + 180^\circ K} \quad \boxed{x = 75^\circ + 180^\circ K}$$

$$c) \sin 4x = \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = \sin 2x \Rightarrow 2 \sin 2x \cdot \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ \Rightarrow \sin 2x \cdot (2 \cos 2x - 1) = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}; \sin 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 90^\circ K} \quad \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \\ \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}$$

$$d) \cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x \Rightarrow -2 \sin 4x \cdot \sin(-2x) = 2 \sin 4x \cdot \cos x \\ \Rightarrow 2 \sin 4x \cdot (\sin 2x - \cos x) = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 45^\circ K} \Rightarrow \sin(2x) - \cos x = 0 \\ \Rightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \cos x = 0; \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 180^\circ K} \quad \boxed{x = 30^\circ + 360^\circ K} \\ \boxed{x = 150^\circ + 360^\circ K}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \sin 2x \cdot \cos x &= 6\sin^3 x \Rightarrow 2\sin x \cdot \cos^2 x - 6\sin^3 x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cdot (\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 0 \\
 &\Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K} \Rightarrow \cos^2 x - 3\sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x - 3(1 - \cos^2 x) = 0 \\
 &\Rightarrow \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \quad \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } 2\sin x &= \operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0; \cos x = \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow \boxed{x = 0^\circ + 180^\circ K} \quad \boxed{x = 60^\circ + 360^\circ K} \quad \boxed{x = 300^\circ + 360^\circ K}
 \end{aligned}$$

22. La solución de cada ecuación queda:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sin x &= 1 + 2\cos^2 x \Rightarrow \sin x = 1 + 2 - 2\sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \\
 &\Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sec x + \operatorname{tg} x &= 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \\
 &\Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow \boxed{x = 270^\circ + 360^\circ K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } 6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x &= 1 \Rightarrow 6\left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right)^2 + \cos x = 1 \Rightarrow 3 + 3\cos x + \cos x = 1 \\
 &\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 120^\circ + 360^\circ K} \quad \boxed{x = 240^\circ + 360^\circ K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 6\cos^2 x + 6\sin^2 x &= 5 + \sin x \Rightarrow 6 = 5 + \sin x \\
 &\Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 90^\circ + 360^\circ K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x &= 1 \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = 1 \\
 &\Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \\
 &\quad \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f) } \cos^2 x &= 3\sin^2 x \Rightarrow 1 = 4\sin^2 x \\
 &\Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = 30^\circ + 180^\circ K} \\
 &\quad \boxed{x = 150^\circ + 180^\circ K}
 \end{aligned}$$

23. La solución queda:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 &\Rightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1 \\ &\Rightarrow \sin(x + 60^\circ) = 1 \Rightarrow \boxed{x = 30^\circ + 360^\circ K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin x + \cos x = \sqrt{2} &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1 \\ &\Rightarrow \sin(x + 45^\circ) = 1 \Rightarrow \boxed{x = 45^\circ + 360^\circ K} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \sin x + \cos x = \frac{5}{2} \Rightarrow \text{Imposible } \sin x + \cos x \neq 2$$

24. Las soluciones de los sistemas quedan:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{aligned} x + \sin^2 y = 2 \\ x + \cos^2 y = 1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \text{Sumando ambas ecuaciones: } \Rightarrow 2x + 1 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1} \\ \sin^2 y = 1 &\Rightarrow \sin y = \pm 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{\pi}{2}} \quad \boxed{y = \frac{3\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} \sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Sumando ambas ecuaciones obtenemos: } \Rightarrow \sin(x + y) = 1 \Rightarrow x + y = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ - y$$

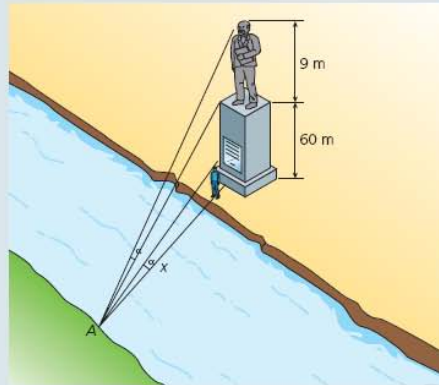
$$\begin{aligned} \text{Sustituyendo en la 1ª ecuación: } \sin(90^\circ - y) \cdot \cos y = \frac{3}{4} &\Rightarrow \cos^2 y = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \boxed{y = 30^\circ; x = 60^\circ} \quad \boxed{y = 150^\circ; x = 300^\circ} \quad \boxed{y = 210^\circ; x = 240^\circ} \quad \boxed{y = 330^\circ; x = 120^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \left. \begin{aligned} \cos x + \cos y = 1 \\ \cos(x + y) = 1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \text{De la 2ª ecuación obtenemos: } \Rightarrow x + y = 0^\circ \Rightarrow x = -y \\ \text{Sustituyendo en la 1ª ecuación: } \cos(-y) + \cos y = 1 &\Rightarrow 2 \cos y = 1 \\ \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} &\Rightarrow \boxed{y = 60^\circ} \quad \boxed{y = 300^\circ} \\ &\quad \boxed{x = 300^\circ} \quad \boxed{x = 60^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left. \begin{aligned} x + y = 90^\circ \\ \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \begin{aligned} y = 90^\circ - x \\ \text{Sustituyendo en la 2ª ecuación} \end{aligned} \\ \sin x + \sin(90^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}}{2} &\Rightarrow 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos(90^\circ - x) = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \Rightarrow \cos(45^\circ - x) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Rightarrow x - 45^\circ = 30^\circ \quad \text{ó} \quad x - 45^\circ = 330^\circ \Rightarrow \boxed{y = 75^\circ} \quad \text{ó} \quad \boxed{y = 15^\circ} \\ &\quad \boxed{x = 15^\circ} \quad \quad \quad \boxed{x = 75^\circ} \end{aligned}$$

ACTIVIDADES FINALES

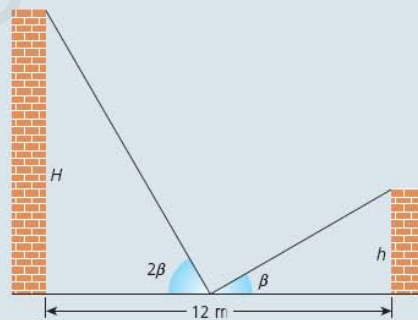
- 25. En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 m de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 m de alzada. Halla la anchura x del río, sabiendo que desde un punto A , situado en la orilla opuesta al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo que se vería a un hombre de 1,80 m situado delante del pedestal.



- 26. Sabiendo que $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ y que A es un ángulo cuyo seno es menor que su coseno, halla $\cos 3A - \cos A$.

- 27. Una calle mide 12 m de ancha. Desde el punto medio de la misma se observan los aleros de sendos edificios de alturas H y h bajo ángulos 2β y β , respectivamente.

En el caso de que los ángulos sean de 60° y 30° , calcula H y h . Encuentra la relación general que liga a las alturas H y h , y comprueba que las alturas calculadas anteriormente verifican la relación general.



- 28. Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo, demuestra que:

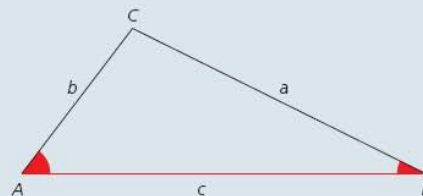
$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

Nota: ayúdate del desarrollo de $\operatorname{tg}(A + B + C)$, y recuerda que $A + B + C = 180^\circ$.

- 29. En los manuales de agrimensura aparece la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo, siempre que se conozcan los elementos que en ella aparecen:

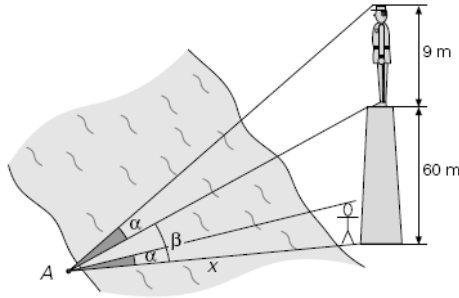
$$S = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

Ayudándote de la altura correspondiente al vértice C , demuestra la fórmula anterior.



SOLUCIONES

25. Según la figura siguiente:



Llamando β al ángulo bajo el cual se ve el pedestal, tenemos:

$$\operatorname{tg}(\beta + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha}; \quad \frac{60 + 9}{x} = \frac{\frac{60}{x} + \frac{1,8}{x}}{1 - \frac{60}{x} \cdot \frac{1,8}{x}} \Rightarrow \frac{69}{x} = \frac{61,8 \cdot x}{x^2 - 108}$$

$$\Rightarrow 7,2x^2 = 7452 \Rightarrow \boxed{x = 32,17 \text{ m}}$$

La anchura del río es de 32,17 metros.

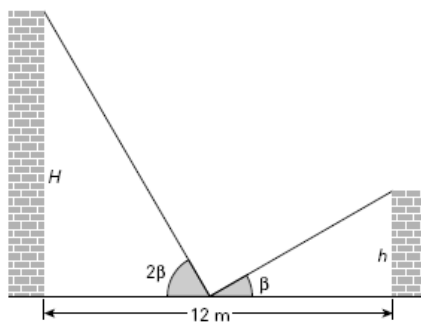
26. Queda del siguiente modo:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{5}; \operatorname{sen} A = -\frac{\sqrt{24}}{5} < \cos A$$

Hallamos:

$$\cos 3A - \cos A = -2 \operatorname{sen} 2A \cdot \operatorname{sen} A = \frac{96}{125}$$

27. Sea el esquema:



Los cálculos quedan:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{H}{6} \Rightarrow H = 6 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{H = 10,39 \text{ m}}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{h = 3,46 \text{ m}}$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}. \text{ Sustituyendo } \operatorname{tg} 2\beta = \frac{H}{6} \text{ y } \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{6} \text{ obtenemos: } \frac{H}{6} = \frac{2 \cdot \frac{h}{6}}{1 - \frac{h^2}{36}}$$

$$\Rightarrow H \cdot h^2 + 72h - 36H = 0 \Rightarrow \boxed{h = \frac{6\sqrt{36 + H^2} - 36}{H}}$$

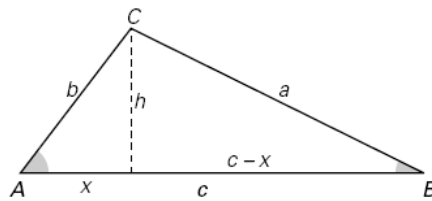
Ésta es la relación que liga ambas alturas. Relación que se verifica para los valores obtenidos anteriormente.

28. A partir del desarrollo de $\operatorname{tg}(A+B+C)$ y de sustituir $A+B+C=180^\circ$, obtenemos la expresión buscada:

$$\operatorname{tg}(A+B+C) = \operatorname{tg}[A+(B+C)] = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg}(B+C)}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg}(B+C)} = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{1 - \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C}$$

Como $A+B+C=180^\circ$ entonces $\operatorname{tg}(A+B+C)=0$ y queda $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$

29. Sea un triángulo:



El área del triángulo es:

$$S = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} c \cdot h$$

Vamos a calcular h :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} A = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} B = \frac{h}{c-x} \end{array} \right\} \Rightarrow h = c \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$

De modo que sustituyendo en el área obtenemos la fórmula buscada:

$$S = \frac{1}{2} c \cdot c \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B} = \frac{1}{2} c^2 \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}$$