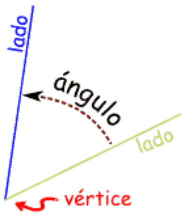
UNIDAD 1: **Trigonometría I**

1. **INTRODUCCIÓN. SISTEMAS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS**

Trigonometría proviene del griego: *trigonos* (triángulo) y *metrón* (medida). También a veces se usa el término Goniometría, que proviene de *gonia* (ángulo). En sus orígenes esta rama de la matemática se utilizó para resolver problemas de agrimensura y astronomía, pero con el desarrollo de la ciencia se ha convertido en un instrumento indispensable en la física, la ingeniería, la medicina y todo otro proceso en el que se encuentren comportamientos que se repiten cíclicamente. Posee numerosas aplicaciones, entre las que se encuentran: las técnicas de triangulación, por ejemplo, son usadas en astronomía para medir distancias a estrellas próximas, en la medición de distancias entre puntos geográficos, y en sistemas globales de navegación por satélites.

Definición: Angulo es la porción del plano limitada por dos semirrectas que tienen un origen común.



Según el sentido del giro decimos que:

- Un ángulo es positivo si el giro para describirlo es de sentido contrario al de las agujas del reloj.
- Un ángulo es negativo si el giro para describirlo es del mismo sentido que el giro de las agujas del reloj.

Los ángulos más conocidos son:

- El giro o ángulo completo.
- El ángulo llano.
- El cuadrante o ángulo recto.

Los ángulos se suelen representar con las letras griegas: α (*alpha*), β (*beta*), γ (*gamma*), ω (*omega*), φ (*phi*)

Para medir ángulos pueden adoptarse distintas unidades. Los sistemas más usados son

a) Sistema sexagesimal

La unidad de medida angular es el *grado sexagesimal*, que es la noventa-ava parte del ángulo recto (ó bien, el ángulo completo son 360° grados sexagesimales) y se simboliza 1°. Cada grado tiene 60 minutos: 1° = 60'

Cada minuto tiene 60 segundos: 1' = 60''

A partir de los segundos se usa sistema decimal

Un ángulo llano mide 180° y un giro completo mide 360°. Un ángulo recto son 90°

Ejemplo: Son ángulos $\alpha = 27^{\circ}15'23.14''$, $\beta = -126^{\circ}1'$

Operaciones con ángulos en sistema sexagesimal

Veamos mediante ejemplos como se efectúan la suma y diferencia de ángulos, así como el producto por un nº entero o la división por un nº entero.

Ejemplo: Dados los ángulos $\alpha = 57^{\circ}\ 35'\ 23.14''$, $\beta = 67^{\circ}\ 59'\ 43''$ y $\gamma = 25^{\circ}\ 50'\ 44''$, calcular:

a) $\alpha+\beta$

$\alpha =$	57°	35'	23.14''
$\beta =$	67°	59'	43.00''
$\alpha+\beta =$	124°	94' = 1° 34'	66.14'' = 1' 6.14''
$\alpha+\beta =$	125°	34'	66.14'' = 1' 6.14''
$\alpha+\beta =$	125°	35'	6.14''

Por tanto, $\alpha+\beta = 125^{\circ}\ 35'\ 6.14''$.

b) $\beta - \alpha$

$\beta =$	67º	59'	43.00"
$\alpha =$	57º	35'	23.14"
$\beta - \alpha =$	10º	24'	19.86"

Por tanto, $\beta - \alpha$=10º 24' 19.86" . Observamos que todas las cantidades de minutos y segundos del minuendo (β) son superiores a los correspondientes del sustraendo (α), con lo cual se puede realizar la diferencia sin problemas

c) $\alpha - \beta$

En este caso, el nº de grados de β, es mayor que el de α, por tanto el resultado es un ángulo negativo y la forma de proceder es calcular $\beta - \alpha$ y cambiarle el signo, pues $\alpha - \beta = -(\beta - \alpha)$. Por tanto por el apartado anterior, como ya lo tenemos hecho, $\alpha - \beta$ = -10º 24' 19.86"

d) $\alpha - \gamma$

En este caso los minutos y segundos del minuendo son inferiores a los minutos y segundos del sustraendo, por lo que debemos aumentar los del minuendo para poder realizar la resta.

$\alpha =$	57º	35'	23.14"
$\alpha =$(pasamos un grado a minutos)	56º	95'	23.14"
$\alpha =$(pasamos un minuto a segundos)	56º	94'	83.14"
$\gamma =$	25º	50'	44.00"
$\alpha - \gamma =$(ya podemos restar)	31º	44'	39.14"

Por tanto, $\alpha - \gamma =$ 31º 44' 39.14"

e) 8α

$\alpha =$	57º	35'	23.14"
$8\alpha =$	456º	280'	185.12"
$8\alpha =$ (pasamos minutos a grados)	456º	280' = 4·60' + 40' = 4º + 40'	185.12"
$8\alpha =$ (pasamos segundos a minuto)	460º	40'	185.12" = 3·60" + 5.12" = 3' + 5.12"
$8\alpha =$	460º	43'	5.12"

Por tanto, 8α = 460º 43' 5.12"

f) $\frac{1}{5}\beta$

Para hacer la división procedemos como en una división normal y los restos los vamos añadiendo a la unidad inmediatamente inferior

67º		59'		43"	5
-65º		120'			13º 35' 56.6"
2º = 120'	(sumamos)	179'		43"	
		-175'		240"	
		4' = 240"	(sumamos)	283"	
				-283"	
				0	

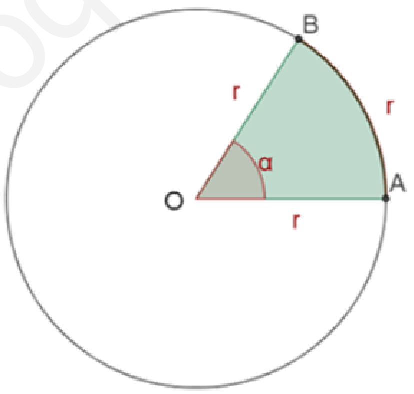
Por tanto, $\frac{1}{5}\beta = 13^{\circ}\,35'\,56.6''$

NOTA: Todos estos cálculos se pueden realizar en la calculadora de manera fácil. La calculadora se ha de encontrar en modo DEG

b) El radián

Definición: Un radián es el ángulo cuyo arco mide igual que el radio con el que ha sido trazado.

Como podemos observar en el dibujo, el ángulo α mide 1 radián pues el radio r de la circunferencia coincide con la longitud del arco que determina. Diremos que $\alpha = 1$ rad



Como sabemos la longitud de una circunferencia es $L = 2\cdot\pi\cdot r$, es decir, el radio se repite $2\cdot\pi$ veces. Como 1 rad abarca un arco que mide un radio, un ángulo completo (360°) es $2\cdot\pi$ radianes.
Ya tenemos la primera equivalencia entre los dos sistemas:

$$2\cdot\pi \text{ rad} = 360^{\circ}$$

Ejemplo: Pasar a radianes los siguientes ángulos en sistema sexagesimal:

a) 180° b) 90°

a) $180^{\circ} = \frac{360^{\circ}}{2} = \frac{2\cdot\pi \text{ rad}}{2} = \pi \text{ rad}$

También se puede hacer mediante una regla de tres simple

b) $90^{\circ}=\frac{360^{\circ}}{4}=\frac{2\cdot\pi\ \text{rad}}{4}=\frac{\pi}{2}\ \text{rad}$

Construimos una tabla con las equivalencias más importantes:

SEXAGESIMAL	RADIÁN
0°	0
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3\cdot\pi}{2}$
360°	$2\cdot\pi$
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
120°	$\frac{2\cdot\pi}{3}$
135°	$\frac{3\cdot\pi}{4}$
150°	$\frac{5\cdot\pi}{6}$
210°	$\frac{7\cdot\pi}{6}$
225°	$\frac{5\cdot\pi}{4}$
240°	$\frac{4\cdot\pi}{3}$
300°	$\frac{5\cdot\pi}{3}$
315°	$\frac{7\cdot\pi}{4}$
330°	$\frac{11\cdot\pi}{6}$

De manera similar se puede pasar de radianes a grados, pero casi siempre nos hará falta el uso de la calculadora.
Ejemplo: Pasar a grados sexagesimales los siguientes ángulos:

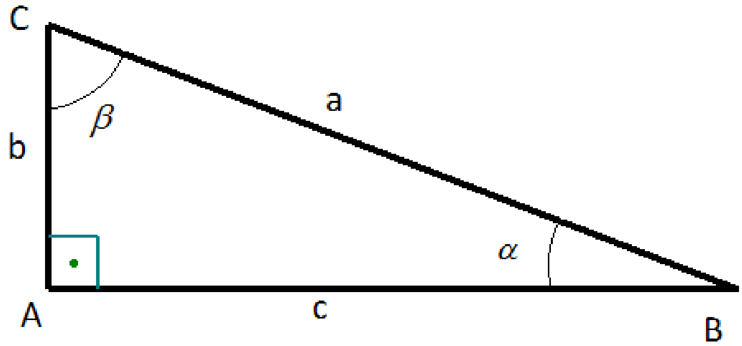
a. 2 rad = $2\cdot\frac{180^{\circ}}{\pi}$ = (ahora hay que usar la calculadora) = $114^{\circ}35'29.6''$

b. 1 rad = $1\cdot\frac{180^{\circ}}{\pi}$ = (ahora hay que usar la calculadora) = $57^{\circ}17'44.81''$

c. $\frac{\pi}{5}$ rad = $\frac{180^{\circ}}{5}=36^{\circ}$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

Vamos a usar un triángulo rectángulo para definir las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
Sea el triángulo rectángulo siguiente:



En él tenemos que:

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
- a es la hipotenusa
- b es el cateto opuesto a α, o bien, el cateto contiguo a β
- c es el cateto opuesto a β, o bien, el cateto contiguo a α

Se definen las razones trigonométricas como sigue:

- *SENO* $\text{sen } \alpha = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$	- *COSECANTE* $\text{cosec } \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha} = \frac{a}{b}$
- *COSENO* $\cos \alpha = \frac{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$	- *SECANTE* $\sec \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha} = \frac{a}{c}$
- *TANGENTE* $\text{tg } \alpha = \frac{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha}{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha} = \frac{b}{c}$	- *COTANGENTE* $\text{cotg } \alpha = \frac{cateto\ \ contiguo\ \ de\ \ \alpha}{cateto\ \ opuesto\ \ de\ \ \alpha} = \frac{c}{b}$

NOTA: Estas razones dependen sólo del ángulo α y no de las medidas de los lados del triángulo construido

Propiedad: Se cumple que:

a) $\boxed{tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos\ \alpha}}$ b) $\boxed{cotg\ \alpha = \frac{\cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \frac{1}{\text{tg } \alpha}}$ c) $\boxed{\sec\ \alpha = \frac{1}{\cos\ \alpha}}$ d) $\boxed{\cos ec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha}}$

Demostración:

a) $\frac{sen\ \ \alpha}{\cos\ \ \alpha} = \frac{b/a}{c/a} = \frac{b}{c} = tg\ \ \alpha$

Las demás son análogas, y las dejo como ejercicio

Propiedad fundamental: Se tiene que: $\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$
O bien $sen^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ ó $\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$

Demostración: Tenemos que

$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} =$ (como estamos en un triángulo rectángulo,

se verifica el teorema de Pitágoras, luego $\text{a}^2 = b^2 + c^2) = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Consecuencias de la propiedad fundamental:

Se verifica que:

a) $\boxed{1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha}$

Demostración:

$$1+tg^2\alpha=1+\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$$

b) $\boxed{1+cotg^2\alpha=\dfrac{1}{sen^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha}$

Demostración:

$$1+\operatorname{cotg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{1}{sen^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha$$

c) $\boxed{-1\le sen\ \alpha\le 1}$, y $\boxed{-1\le\cos\ \alpha\le 1}$

Ejercicio: Demostrar la siguiente igualdad trigonométrica: $sen^2\alpha=1-\dfrac{\cot g^2\alpha}{\cos ec^2\alpha}$

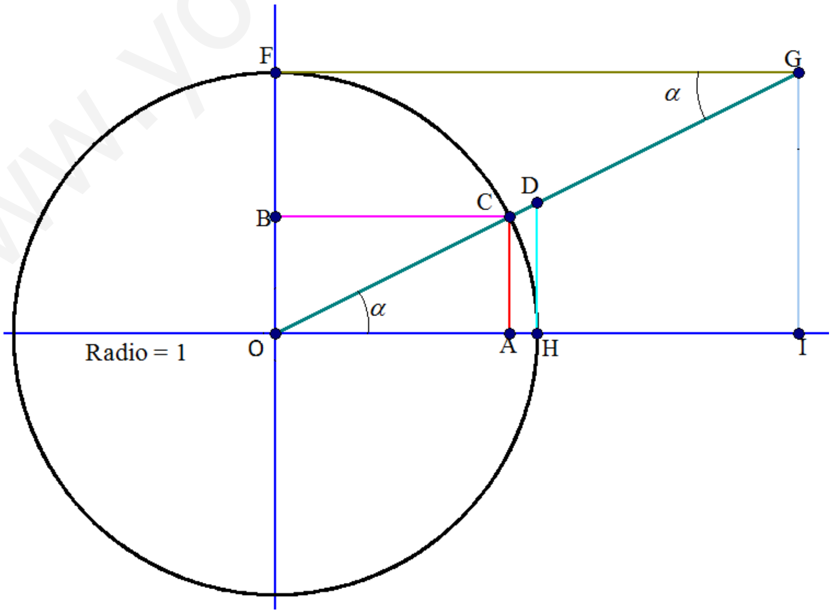
Partimos del segundo miembro y sustituimos por seno y coseno

$$1-\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{\cos ec^2\alpha}=1-\frac{\cos^2\alpha/sen^2\alpha}{1/sen^2\alpha}=1-\frac{\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha}{sen^2\alpha}=1-\cos^2\alpha=sen^2\alpha$$ con lo cual queda demostrado

3. CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA UNIDAD. SEGMENTOS TRIGONOMÉTRICOS

Vamos a considerar una circunferencia de radio 1 y sobre ella dibujamos un ángulo α. Dependiendo del cuadrante donde se encuentre α vamos a ver que segmentos representan las razones trigonométricas y los signos de éstas.

$\alpha\in$ I CUADRANTE



Vemos que:

sen $\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC} = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es positiva, luego sen α es positivo

cos $\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \dfrac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es positiva, luego cos α es positivo

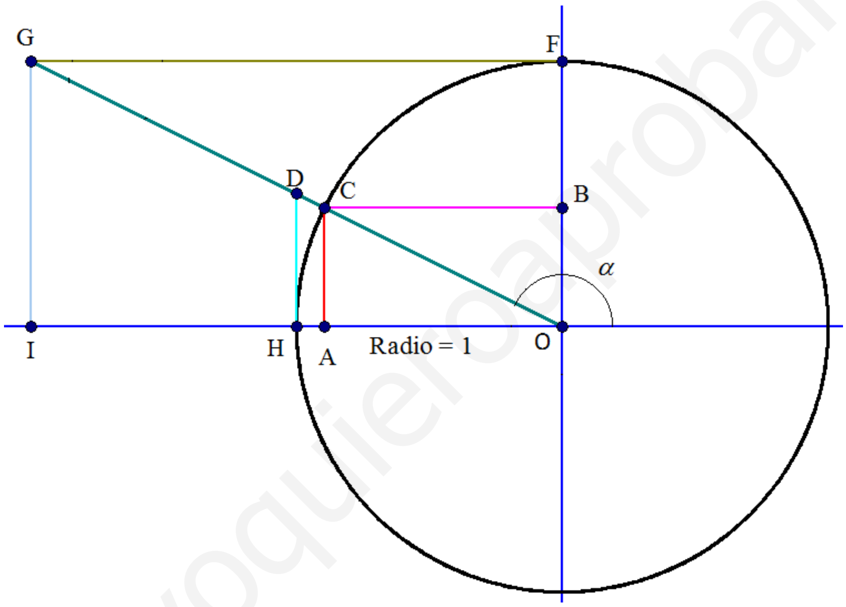
tg $\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{HD}}{\overline{OH}} = \dfrac{\overline{HD}}{1} = \overline{HD}$. Como tg $\alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego tg α es positiva

cosec $\alpha = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{OG}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{OG}}{1} = \overline{OG}$. Como cosec $\alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, al ser el seno positivo, cosec α es positivo

sec $\alpha = \dfrac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OH}} = \dfrac{\overline{OD}}{1} = \overline{OD}$. Como sec $\alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, al ser el coseno positivo, sec α es positivo

cotg $\alpha = \dfrac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{FG}}{\overline{OF}} = \dfrac{\overline{FG}}{1} = \overline{FG}$. Como cotg $\alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, al ser la tangente positiva, cotg α es positiva

<u>$\alpha \in$ II CUADRANTE</u>



De forma análoga, se tiene que:

sen $\alpha = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es positiva, luego sen α es positivo

cos $\alpha = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es negativa, luego cos α es negativo

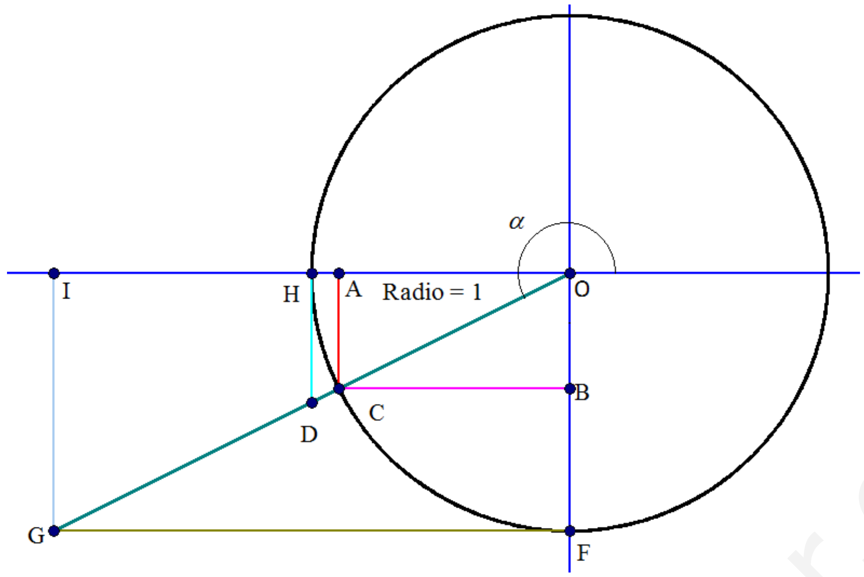
tg $\alpha = \overline{HD}$. Como tg $\alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego tg α es negativa

cosec $\alpha = \overline{OG}$. Como cosec $\alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, al ser el seno positivo, cosec α es positivo

sec $\alpha = \overline{OD}$. Como sec $\alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, al ser el coseno negativo, sec α es negativo

cotg $\alpha = \overline{FG}$. Como cotg $\alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, al ser la tangente negativa, cotg α es negativa

$\alpha \in$ III CUADRANTE



De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es negativa, luego $\text{sen } \alpha$ es negativa

$\cos \alpha = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es negativa, luego $\cos \alpha$ es negativo

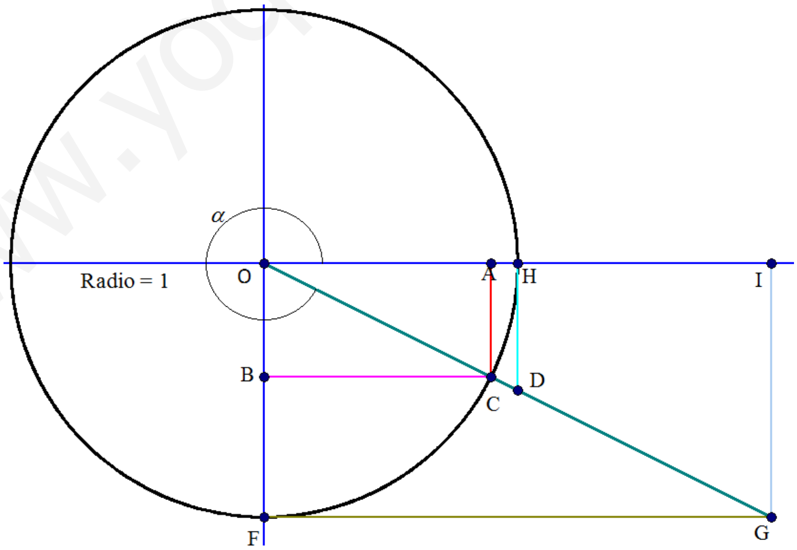
$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego $\text{tg } \alpha$ es positiva

$\text{cosec } \alpha = \overline{OG}$. Como $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, al ser el seno negativo, $\text{cosec } \alpha$ es negativo

$\sec \alpha = \overline{OD}$. Como $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, al ser el coseno negativo, $\sec \alpha$ es negativo

$\text{cotg } \alpha = \overline{FG}$. Como $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, al ser la tangente positiva, $\text{cotg } \alpha$ es positiva

$\alpha \in$ IV CUADRANTE



De forma análoga, se tiene que:

$\text{sen } \alpha = \overline{OB}$. La distancia $\overline{OB}$ es negativa, luego $\text{sen } \alpha$ es negativo

$\cos \alpha = \overline{OA}$. La distancia $\overline{OA}$ es positiva, luego $\cos \alpha$ es positivo

$\text{tg } \alpha = \overline{HD}$. Como $\text{tg } \alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$, luego $\text{tg } \alpha$ es negativa

$\text{cosec } \alpha = \overline{OG}$. Como $\text{cosec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}$, al ser el seno negativo, $\text{cosec } \alpha$ es negativo

$\sec \alpha = \overline{OD}$. Como $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}$, al ser el coseno positivo, $\sec \alpha$ es positivo

$\text{cotg } \alpha = \overline{FG}$. Como $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$, al ser la tangente negativa, $\text{cotg } \alpha$ es negativa

CUADRO RESUMEN DE SIGNOS DEL SENO, COSENO Y TANGENTE

	I Cuadrante	II Cuadrante	III Cuadrante	IV Cuadrante
Seno	**+**	**+**	**-**	**-**
Coseno	**+**	**-**	**-**	**+**
tangente	**+**	**-**	**+**	**-**

Ejercicio: Sabiendo que un ángulo $\alpha \in \text{II CUADRANTE}$ y que $\text{sen } \alpha = \dfrac{2}{3}$, calcula las restantes razones trigonométricas.

Solución: Por la igualdad fundamental tenemos que: $\cos^2 \alpha + sen^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - sen^2\alpha \Rightarrow$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \cos \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como estamos en el II Cuadrante, el coseno es negativo, por tanto, $\cos \alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Ya tenemos el seno y el coseno, por lo cual podemos conocer todas las demás razones:

TANGENTE

$tg\alpha = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} \Rightarrow tg\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ Racionalizamos, $tg\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow tg\alpha = -\dfrac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$, que sale negativa, como bien sabemos, pues estamos en el II Cuadrante.

COSECANTE

$$\text{cosec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

SECANTE

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec \alpha = -\frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec \alpha = -\frac{3\cdot\sqrt{5}}{5}$$

COTANGENTE

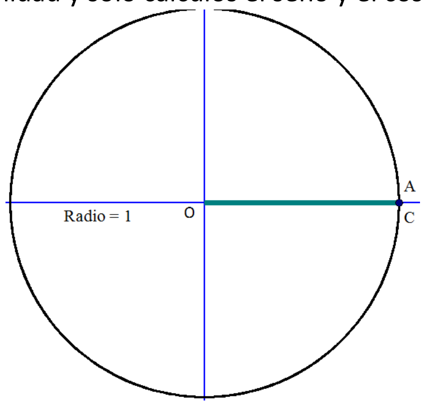
$$cotg\alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow tg\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

4. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Vamos a calcular las razones trigonométricas de los ángulos más usados.

a. Ángulo $0^{\circ} = 0 \text{ rad}$

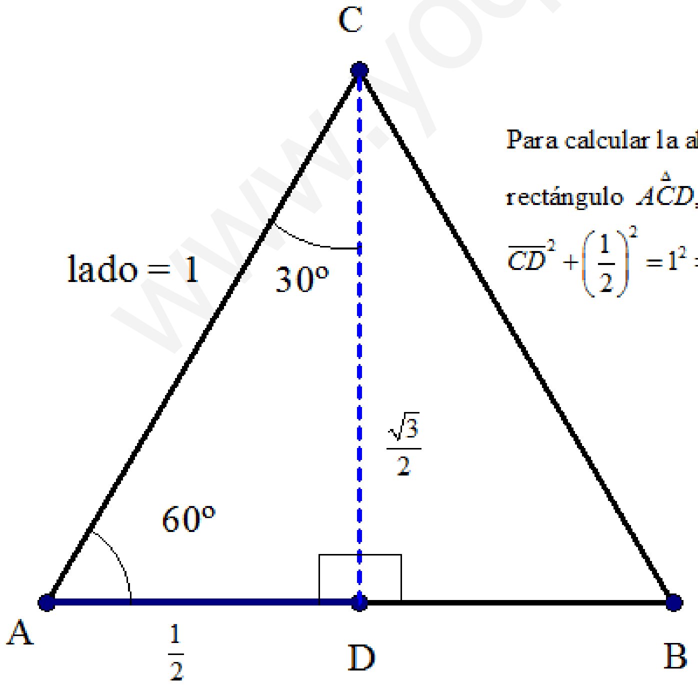
Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



$\text{sen } 0 = \dfrac{\overline{AC}}{radio} =$ (como A y C coinciden) $\dfrac{\overline{AA}}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$	$\text{cosec } 0 = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
$\cos 0 = \dfrac{\overline{OA}}{radio} = \dfrac{1}{1} = 1$	$\sec 0 = \dfrac{1}{1} = 1$
$\text{tg } 0 = \dfrac{0}{1} = 0$	$\text{cotg } 0 = \dfrac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$

b. Ángulo $30^{\circ} = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $30^{\circ} = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}$ vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el de la figura siguiente:



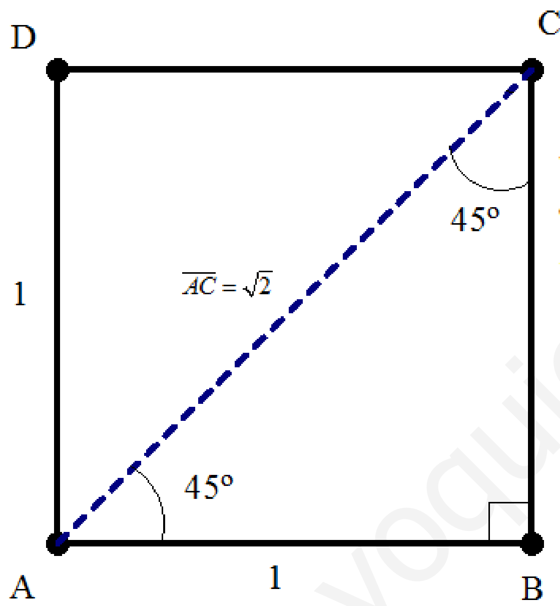
Para calcular la altura $\overline{CD}$ aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ACD}$,

$$\overline{CD}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$	$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$
$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

c. *Ángulo* $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ rad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $45^\circ=\frac{\pi}{4}$ rad vamos a utilizar un cuadrado de lado 1 como el de la figura siguiente:



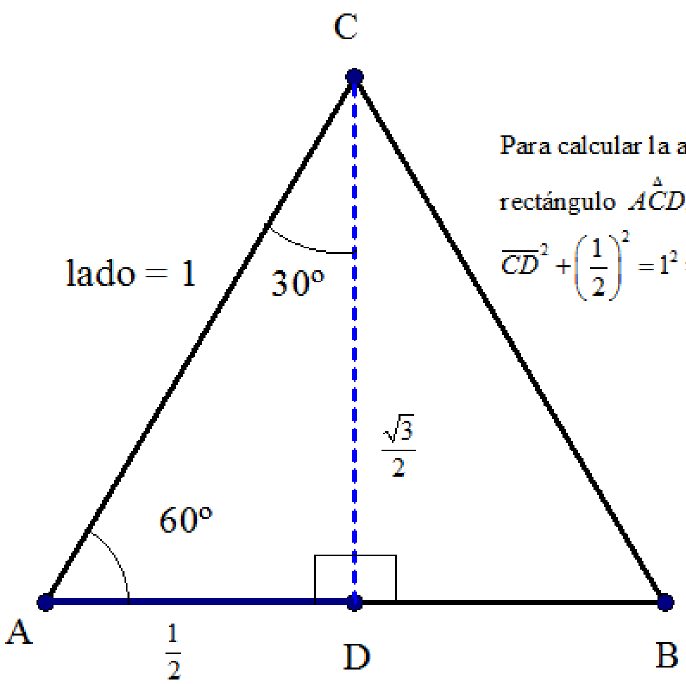
Calculamos la longitud de la diagonal, $\overline{AC}$, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$

$\overline{AC}^2=1^2+1^2 \Rightarrow \overline{AC}^2=2 \Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{2}$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$
$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sec\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{1}{1}=1$	$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{1}=1$

d. *Ángulo* $60^\circ=\frac{\pi}{3}$ rad

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo $60^\circ=\frac{\pi}{3}$ rad vamos a utilizar un triángulo equilátero de lado 1 como el usado anteriormente:



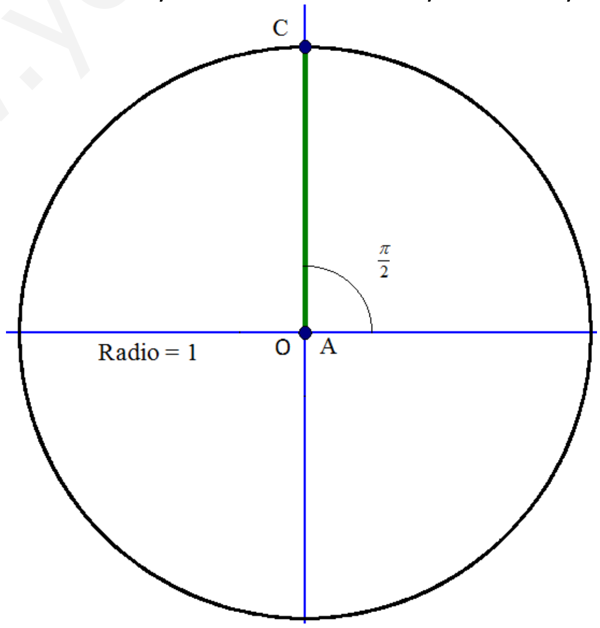
Para calcular la altura $\overline{CD}$ aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ACD}$,

$$\overline{CD}^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1^2\Rightarrow\overline{CD}^2=1-\frac{1}{4}\Rightarrow\overline{CD}^2=\frac{3}{4}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$	$\sec\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$
$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$	$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

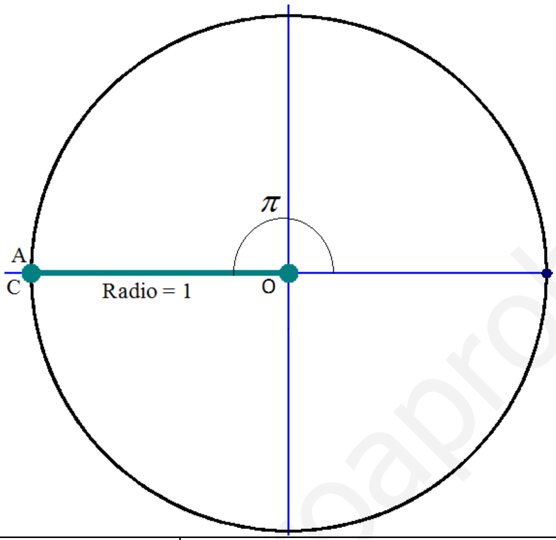
e. Ángulo $90^{\circ}=\frac{\pi}{2}$ rad

Vamos a basarnos en la circunferencia unidad y sólo cálculos el seno y el coseno y a partir de ellas todas las demás



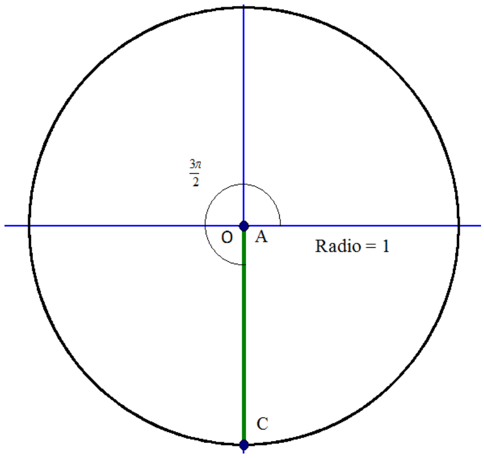
sen $\frac{\pi}{2} = \frac{\overline{AC}}{radio} = \frac{1}{1} = 1$	cosec $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1$
cos $\frac{\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{radio} =$ (como A y O coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	sec $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
tg $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$	cotg $\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$

f. *Ángulo* $180^{\circ} = \pi$ rad



sen $\pi = \frac{\overline{AC}}{radio} =$ (como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	cosec $\pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
cos $\pi = \frac{\overline{OA}}{radio} = \frac{-1}{1} = -1$	sec $\pi = \frac{1}{-1} = -1$
tg $\pi = \frac{0}{1} = 0$	cotg $\pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$

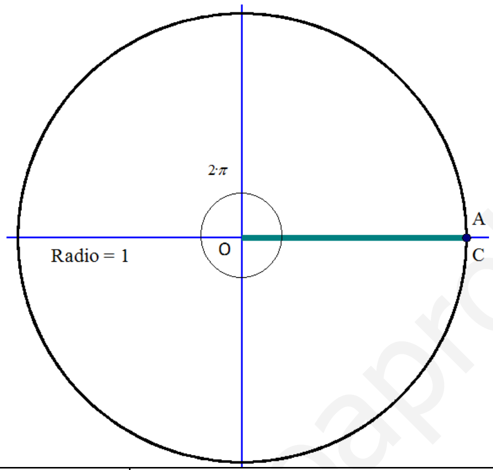
g. *Ángulo* $270^{\circ} = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ rad



$\text{sen } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{\overline{AC}}{radio} = \frac{-1}{1} = -1$	$\text{cosec } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1$
$\cos \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{\overline{OA}}{radio} =$ (como A y O coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	$\sec \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
$\text{tg } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$	$\text{cotg } \frac{3\cdot\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$

h. Ángulo $360^{o} = 2\cdot\pi$ rad

Al dar una vuelta completa, las razones son iguales y empiezan a repetirse, luego las razones trigonométricas de $2\cdot\pi$ rad son iguales a las de 0 rad



$\text{sen } 2\cdot\pi = \frac{\overline{AC}}{radio} =$ (como A y C coinciden) $\frac{\overline{AA}}{1} = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cosec } 2\cdot\pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$
$\cos 2\cdot\pi = \frac{\overline{OA}}{radio} = \frac{1}{1} = 1$	$\sec 2\cdot\pi = \frac{1}{1} = 1$
$\text{tg } 2\cdot\pi = \frac{0}{1} = 0$	$\text{cotg } 2\cdot\pi = \frac{1}{0}$ (diremos que no existe $\neg\exists$ o bien que es ∞) $= \infty$

Hagamos una tabla resumen con el seno, coseno y tangente de los ángulos notables:

	SENO	COSENO	TANGENTE
$0^{o} = 0$ rad	0	1	0
$30^{o} = \frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^{o} = \frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^{o} = \frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

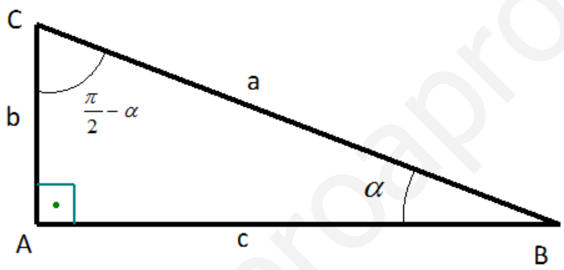
$90^{\circ}=\dfrac{\pi}{2}$ rad	1	0	∞
$180^{\circ}=\pi$ rad	0	-1	0
$270^{\circ}=\dfrac{3\cdot\pi}{2}$ rad	-1	0	∞
$360^{\circ}=2\cdot\pi$ rad	0	1	0

5. RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS DE DISTINTOS CUADRANTES

a. *Ángulos complementarios*

Son aquellos ángulos cuya suma es 90°. Es decir, si un ángulo es α, su complementario es $90^{\circ}-\alpha$. O bien, usando radianes, α y $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, son complementarios.

En este tipo de ángulos el seno de uno es el coseno del otro y viceversa. Y por tanto la tangente y la cotangente también. Se observa fácilmente en la figura siguiente:



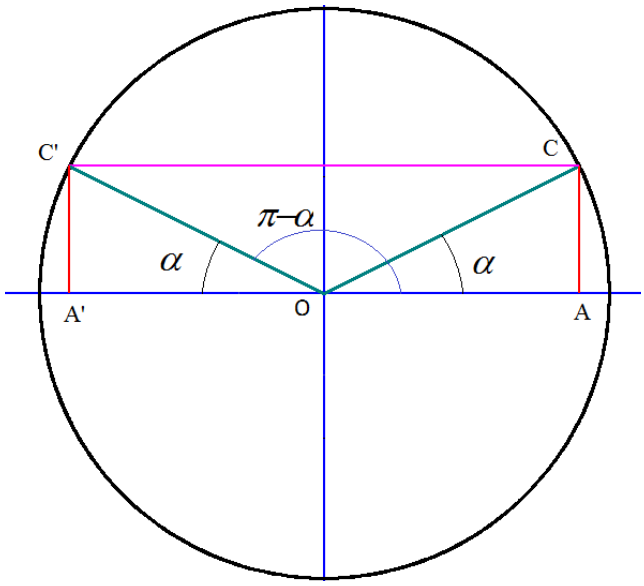
Como se observa: $\begin{cases} \text{sen } \alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{b}{a} \\ \cos \alpha = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{c}{a} \\ \text{tg } \alpha = \text{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{b}{c} \end{cases}$

Ejemplo: Los ángulos de 60° y 30° son complementarios, y como hemos visto ya, el seno de uno es el coseno del otro.

b. *Ángulos suplementarios*

Son aquellos ángulos cuya suma es 180°. Es decir, si un ángulo es α, su suplementario es $180^{\circ}-\alpha$. O bien, usando radianes, α y $\pi-\alpha$, son suplementarios.

En este tipo de ángulos los senos coinciden pero los cosenos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas. Veámoslo gráficamente:



$$\begin{cases} \text{sen }(\pi-\alpha) = \dfrac{\overline{A'C'}}{radio} = \dfrac{\overline{AC}}{radio} = \text{sen } \alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = \dfrac{\overline{OA'}}{radio} = \dfrac{-\overline{OA}}{radio} = \text{-cos } \alpha \\ \text{tg }(\pi-\alpha) = \dfrac{\text{sen }(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\text{-cos } \alpha} = \text{-tg } \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcula las razones trigonométricas de 120^o

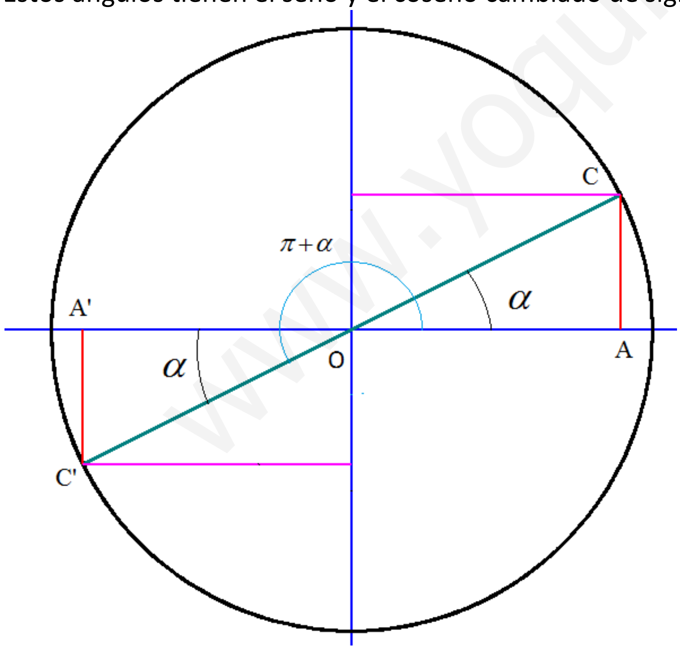
Nos damos cuenta que 60^o es el suplementario de 120^o, luego como ya conocemos las de 60^o, ya tenemos que:

$$\begin{cases} \text{sen } 120^o = \text{ sen } 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 120^o = -\cos 60^o = -\dfrac{1}{2} \\ \text{tg } 120^o = -\text{ tg } 60^o = -\sqrt{3} \end{cases}$$

c. *Ángulos que se diferencian en* 180^o

Son ángulos de la forma, α y $180^o+\alpha$, que si los restamos da 180^o. O bien usando radianes, α y $\pi+\alpha$

Estos ángulos tienen el seno y el coseno cambiado de signo, y por tanto la tangente es la misma.



$$\begin{cases} \text{sen }(\pi+\alpha) = \dfrac{\overline{A'C'}}{radio} = \dfrac{-\overline{AC}}{radio} = -\text{ sen } \alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = \dfrac{\overline{OA'}}{radio} = \dfrac{-\overline{OA}}{radio} = \text{-cos } \alpha \\ \text{tg }(\pi+\alpha) = \dfrac{\text{sen }(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)} = \dfrac{-\text{ sen } \alpha}{-\cos \alpha} = \text{tg } \alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular la secante, la cosecante y la cotangente de $\dfrac{5\cdot\pi}{4}$ rad

En primer lugar pasamos el ángulo dado a grados, pues nos puede resultar más fácil.

$\frac{5\cdot\pi}{4}$ rad $= \frac{5\cdot 180^o}{4} = 225^o$ y ahora nos damos cuenta que 225^o y 45^o difieren 180^o, pues $225^o - 180^o = 45^o$ o lo que es lo mismo, $225^o = 180^o + 45^o$. Esto expresado en radianes sería que $\frac{5\cdot\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$

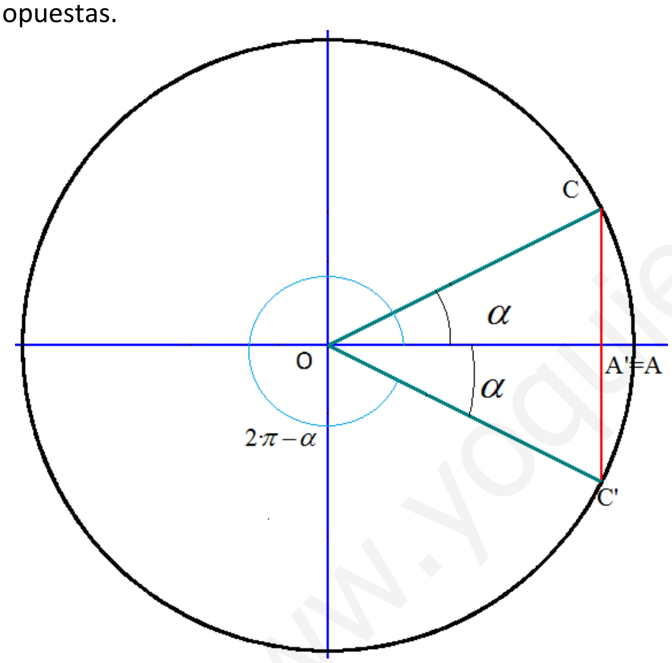
Por tanto, empleando radianes como es el dato del problema,

$$\begin{cases} \text{sen } \frac{5\cdot\pi}{4} = -\text{ sen } \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{cosec } \frac{5\cdot\pi}{4} = \frac{1}{\text{sen } \frac{5\cdot\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \cos \frac{5\cdot\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sec \frac{5\cdot\pi}{4} = \frac{1}{\cos \frac{5\cdot\pi}{4}} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \\ \text{tg } \frac{5\cdot\pi}{4} = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

d. *<u>Ángulos que suman</u>* 360^o

Son aquellos ángulos cuya suma es 360^o. Es decir, si un ángulo es α, el otro es $360^o - \alpha$. O bien, usando radianes, α y $2\cdot\pi - \alpha$, suman $2\cdot\pi - \alpha$..

En este tipo de ángulos los cosenos coinciden pero los senos son opuestos, y por tanto las tangentes también son opuestas.



$$\begin{cases} \text{sen } (2\pi - \alpha) = \frac{\overline{A'C'}}{radio} = \frac{-\overline{AC}}{radio} = -\text{ sen } \alpha \\ \cos (2\pi - \alpha) = \frac{\overline{OA'}}{radio} = \frac{\overline{OA}}{radio} = \cos \alpha \\ \text{tg } (2\pi - \alpha) = \frac{\text{sen } (2\pi - \alpha)}{\cos (2\pi - \alpha)} = \frac{-\text{ sen } \alpha}{\cos \alpha} = -\text{ tg } \alpha \end{cases}$$

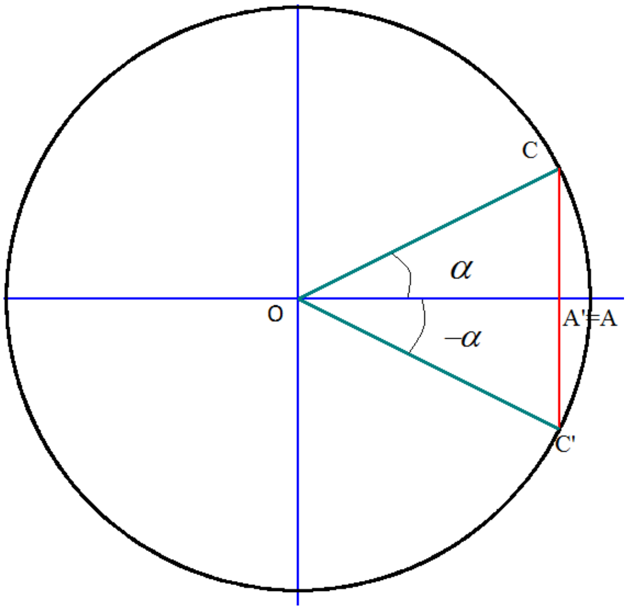
<u>Ejemplo</u>: Calcular la tangente del ángulo de 330^o

Nos damos cuenta que 330^o y 30^o suman 360^o, luego aplicando lo anterior, tenemos que

$$\text{tg } (330^o) = \frac{\text{sen } 330^o}{\cos 330^o} = \frac{-\text{ sen } 30^o}{\cos 30} = -\text{ tg } 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

e. *<u>Ángulos opuestos</u>*

Son ángulos de signo opuesto, es decir, α y $-\alpha$. Como vemos en el dibujo su comportamiento es análogo al anterior, ángulos que suman 360^o



$$\begin{cases} \text{sen }(-\alpha) = \dfrac{\overline{A'C'}}{radio} = \dfrac{-\overline{AC}}{radio} = \text{- sen }\alpha \\ \cos(-\alpha) = \dfrac{\overline{OA'}}{radio} = \dfrac{\overline{OA}}{radio} = \cos\alpha \\ \text{tg }(-\alpha) = \dfrac{\text{sen }(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{\text{- sen }\alpha}{\cos\alpha} = \text{- tg }\alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el coseno de $-\dfrac{\pi}{4}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f. *Ángulos que se diferencian en un nº enteros de vueltas*

Son ángulos que superan los 360° o inferiores a -360°, es decir, realizan vueltas completas. Son de la forma $\alpha + k\cdot 360^\circ$ con $k \in \mathbb{Z}$ o bien $\alpha + k\cdot 2\cdot\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ si es en radianes. Se suele poner como $\alpha + 2\cdot k\cdot\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ Hay que dividir el ángulo dado por 360, y el cociente es el nº de vueltas y el resto es el ángulo con el coinciden todas las razones trigonométricas. Las razones coinciden con la de α

$$\begin{cases} \text{sen }(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \text{sen }\alpha \\ \cos(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \cos\alpha \\ \text{tg }(\alpha + k\cdot 360^\circ) = \text{tg }\alpha \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el coseno de 855°

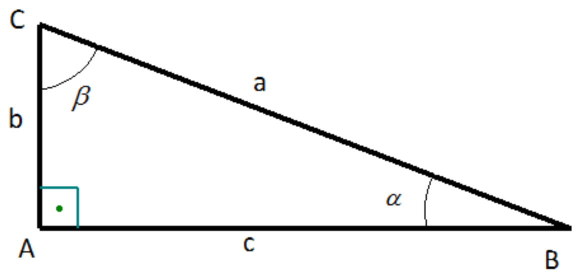
Hacemos la división de 855 entre 360 y nos da de cociente 2 y de resto 135, es decir, $855^\circ = 135^\circ + 2\cdot 360^\circ$. Por tanto,

$$\cos 855^\circ = \cos(135 + 2\cdot 360^\circ) = \cos 135^\circ = (135^\circ \text{ y } 45^\circ \text{ son suplementarios}) = \text{- } \cos 45^\circ = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

UNIDAD 2: **Trigonometría II**

1. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Resolver un triángulo es conocer la longitud de cada uno de sus lados y la medida de cada uno de sus ángulos.
En el caso de triángulos rectángulos, ya sabemos la medida de uno de sus ángulos, 90^o, el ángulo recto.
Dado un triángulo rectángulo como el dela figura, se cumple que:



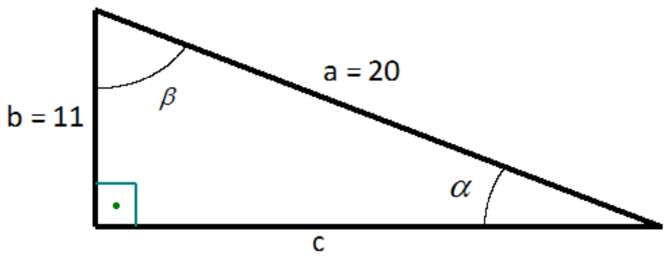
$$\alpha + \beta = 90^o$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}, \ \cos \alpha = \frac{c}{a}, \ \text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$$

Teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Ejemplo: En un triángulo rectángulo se conocen un cateto $b = 11 \text{ cm}$ y la hipotenusa $a = 20 \text{ cm}$. Halla los demás elementos.



Por el teorema de Pitágoras podemos calcular el otro cateto:

$$11^2 + c^2 = 20^2 \Rightarrow 121 + c^2 = 400$$

$$\Rightarrow c^2 = 279 \Rightarrow c = 16'7$$

Por la definición de seno, por ejemplo, tenemos que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{11}{20} = 0'55 \Rightarrow$$

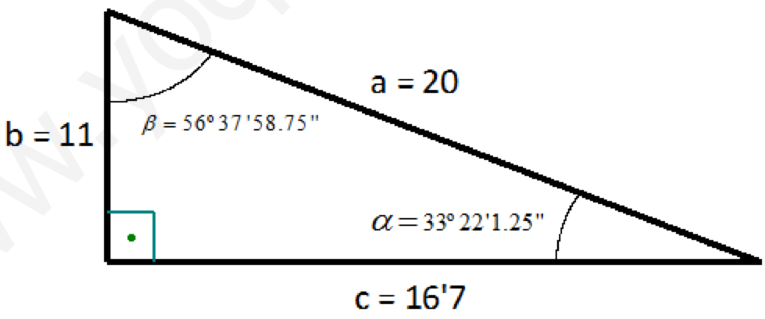
$$\text{(usando la calculadora) } \alpha = 33^o\,22'1.25''$$

Por último, como

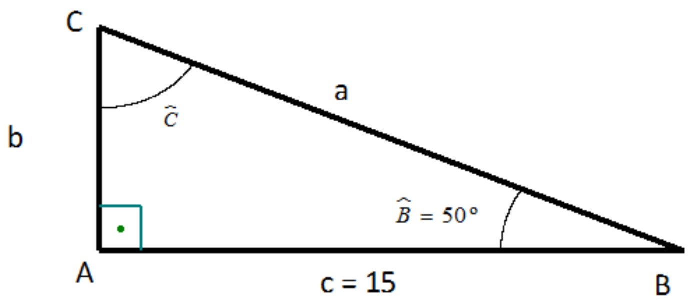
$$\alpha + \beta = 90^o \Rightarrow 33^o\,22'1.25'' + \beta = 90^o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = 56^o\,37'58.75''$$

Ya tenemos por tanto nuestro triángulo resuelto:



Ejemplo: En un triángulo rectángulo del que se conocen $B = 50^o$, y un cateto $c = 15 \ cm$, calcula los demás elementos.



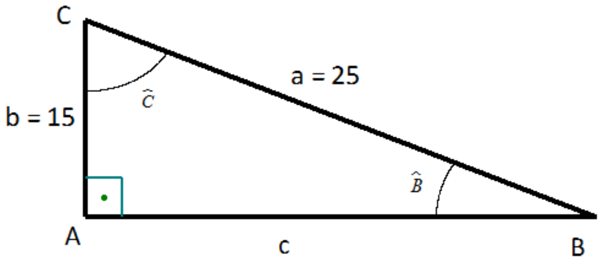
Tenemos que:

$$50^o + C = 90^o \Rightarrow C = 40^o$$

$$\text{tg } 50^o = \frac{b}{15} \Rightarrow b = 15 \cdot \text{tg } 50^o \Rightarrow \text{b} = 17'88 \text{ cm}$$

$$\cos 50^o = \frac{15}{a} \Rightarrow a = \frac{15}{\cos 50^o} \Rightarrow a = 23'34 \text{ cm}$$

Ejemplo: Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve una carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?
Tenemos una situación como la siguiente:



a = 25 es la longitud de la cinta transportadora
b = 15 es la altura que queremos que eleve el material
B, es lo que queremos calcular.
Por la definición de seno,

$$\text{sen } B = \frac{15}{25} \Rightarrow \text{(usando la calculadora) } B = 36^{o}52'11.63''$$

Ese es el ángulo de inclinación

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

- *Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen } (\alpha+\beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \text{sen } \beta}$$

$$\boxed{\cos (\alpha+\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta}$$

$$\boxed{\text{tg } (\alpha+\beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta}}$$

Ejemplo: Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

a) $\text{sen } 75^{o} = \text{sen } (45^{o}+30^{o}) = \text{sen } 45^{o} \cdot \cos 30^{o} + \cos 45^{o} \cdot \text{sen } 30^{o} \Rightarrow$

$$\text{sen } 75^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } 75^{o} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

b) $\cos 75^{o} = \cos (45^{o}+30^{o}) = \cos 45^{o} \cdot \cos 30^{o} - \text{sen } 45^{o} \cdot \text{sen } 30^{o} \Rightarrow$

$$\cos 75^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\ 75^{o} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

c) $\text{tg } 75^{o} = \text{tg } (45^{o}+30^{o}) = \dfrac{\text{tg } 45^{o} + \text{tg } 30^{o}}{1 - \text{tg } 45 \cdot \text{tg } 30^{o}} = \dfrac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow$

$$\text{tg } 75^{o} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \Rightarrow (racionalizamos)\, \text{tg } 75^{o} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3} \Rightarrow$$

$$\text{tg } 75^{o} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{6} = \frac{12+6\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \text{tg } 75^{o} = 2+\sqrt{3}$$

- *Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen}\left(\alpha-\beta\right)=\text{sen }\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\text{sen }\beta}$$

$$\boxed{\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta}$$

$$\boxed{\text{tg}\left(\alpha-\beta\right)=\frac{\text{tg }\alpha-\text{tg }\beta}{1+\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}}$$

Ejemplo: Calcula las siguientes razones trigonométricas sin usar calculadora:

d) $\text{sen } 15^\circ=\text{sen}\left(45^\circ-30^\circ\right)=\text{sen } 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\cdot\text{sen } 30^\circ\Rightarrow$

$$\text{sen } 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow\text{sen } 75^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$$

e) $\cos 15^\circ=\cos\left(45^\circ-30^\circ\right)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ+\text{sen } 45^\circ\cdot\text{sen } 30^\circ\Rightarrow$

$$\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$$

f) $$\text{tg } 15^\circ=\text{tg}\left(45^\circ-30^\circ\right)=\frac{\text{tg } 45^\circ-\text{tg } 30^\circ}{1+\text{tg } 45\cdot\text{tg } 30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}\Rightarrow$$

$$\text{tg } 15^\circ=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\Rightarrow\left(racionalizamos\right)\text{tg } 75^\circ=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{9-3}\Rightarrow$$

$$\text{tg } 15^\circ=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{6}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}\Rightarrow\text{tg } 15^\circ=2-\sqrt{3}$$

3. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE Y DEL ÁNGULO MITAD

- *Razones trigonométricas del ángulo doble*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen}\left(2\cdot\alpha\right)=2\cdot\text{sen }\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos\left(2\cdot\alpha\right)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}$$

$$\boxed{\text{tg}\left(2\cdot\alpha\right)=\frac{2\cdot\text{tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}$$

- *Razones trigonométricas del ángulo mitad*

Se tiene que:

$$\boxed{\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

(Dependiendo del cuadrante donde se encuentre α, tomaremos el signo + o el – correspondiente)

Ejemplo: Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-3}{4}$, y que $\alpha \in II$ Cuadrante, calcula:

a) $\operatorname{sen}(2\cdot\alpha)$ b) $\cos(2\cdot\alpha)$ c) $\operatorname{tg}(2\cdot\alpha)$ d) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ e) $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ f) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Lo primero que vamos a hacer es calcular las razones correspondientes al ángulo α.

Como $1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\left(\dfrac{-3}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \dfrac{25}{16} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{16}{25} \Rightarrow$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \Rightarrow \text{(como } \alpha \text{ es del 2º Cuadrante, el + no es válido)} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = -\frac{4}{5}}$$

Ahora como

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\left(\frac{-4}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}}$$

a)

$$\operatorname{sen}(2\cdot\alpha) = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}(2\cdot\alpha) = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(2\cdot\alpha) = -\frac{24}{25}}$$

b)

$$\cos(2\cdot\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \Rightarrow \cos(2\cdot\alpha) = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \Rightarrow \boxed{\cos(2\cdot\alpha) = \frac{7}{25}}$$

c)

$$\operatorname{tg}(2\cdot\alpha) = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} \Rightarrow \operatorname{tg}(2\cdot\alpha) = \frac{-\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{-\frac{6}{4}}{\frac{7}{16}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}(2\cdot\alpha) = -\frac{24}{7}}$$

d) Como $\alpha \in II$ Cuadrante $\Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} \in I$ Cuadrante, y con ello podemos elegir bien los signos. Todos son positivos.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \text{ (el - no es válido pues es del I Cuadrante)} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} \Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{9}{10}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{(racionalizamos) } \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}}$$

e) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}$ (el - no es válido pues es del I Cuadrante) $\Rightarrow$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}}\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}}\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}}\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{10}}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow\text{(racionalizamos) }\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\Rightarrow\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{10}}{10}}$$

f) $\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}}$ (el - no es válido pues es del I Cuadrante) $\Rightarrow$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{1+\left(-\frac{4}{5}\right)}}\Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}}\Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{1}{5}}}\Rightarrow tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{9}\Rightarrow\boxed{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=3}$$

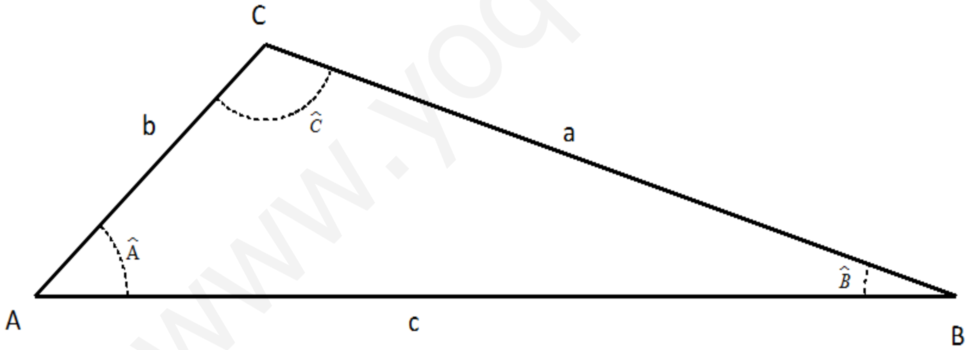
NOTA: Podíamos haber calculado la tangente por la definición, de una manera más rápida quizás

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\Rightarrow\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}}\Rightarrow\boxed{\mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=3}$$

4. TEOREMA DE LOS SENOS Y DEL COSENO

Estos teoremas se usan para resolver triángulos que no sean rectángulos. Será necesario el uso de la calculadora.

Teorema de los senos: En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$\boxed{\frac{a}{\mathrm{sen}\ A}=\frac{b}{\mathrm{sen}\ B}=\frac{c}{\mathrm{sen}\ C}}$$

O bien

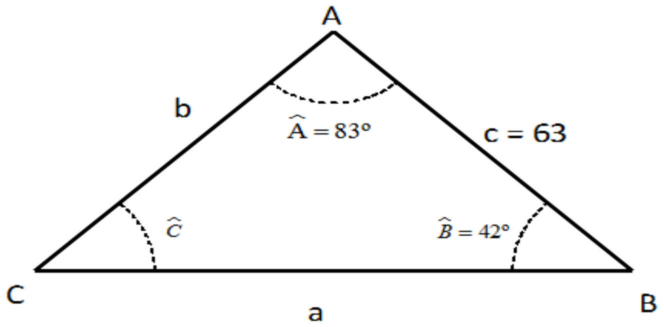
$$\boxed{\frac{\mathrm{sen}\ A}{a}=\frac{\mathrm{sen}\ B}{b}=\frac{\mathrm{sen}\ C}{c}}$$

Se aplica cuando conocemos:

- Dos ángulos y un lado
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

A veces puede haber dos soluciones, pues entre 0^o y 180^o hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

Ejemplo: En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ conocemos la longitud del lado $c = 63$ m y los ángulos $A = 83^o$ y $B = 42^o$. Resuélvelo.



Hemos dibujado el triángulo, y ahora pasamos a resolverlo.

$$A + B + C = 180^o \Rightarrow 83^o + 42^o + C = 180^o \Rightarrow C = 55^o$$

Aplicamos ahora el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } 83^o} = \frac{b}{\text{sen } 42^o} = \frac{63}{\text{sen } 55^o} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\text{sen } 83^o} = \dfrac{63}{\text{sen } 55^o} \\ \dfrac{b}{\text{sen } 42^o} = \dfrac{63}{\text{sen } 55^o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{63 \cdot \text{sen } 83^o}{\text{sen } 55^o} \\ b = \dfrac{63 \cdot \text{sen } 42^o}{\text{sen } 55^o} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 76,34 \text{ m} \\ b = 51,46 \text{ m} \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver el triángulo donde conocemos $a = 4$ m, $b = 5$ m y $B = 30^o$

Por el teorema de los senos, $\dfrac{\text{sen A}}{4} = \dfrac{\text{sen } 30^o}{5} = \dfrac{\text{sen } C}{c}$, obtenemos de la primera igualdad que:

$$\frac{\text{sen A}}{4} = \frac{\text{sen } 30^o}{5} \Rightarrow \text{sen A} = \frac{4 \cdot \text{sen } 30^o}{5} \Rightarrow \text{sen A} = 0,4 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 23^o 34' 41.44'' \\ A_2 = 156^o 25' 18.56'' \end{cases}$$

De estas dos posibles soluciones, la solución $A_2 = 156^o 25' 18.56''$ no es válida pues en ese caso

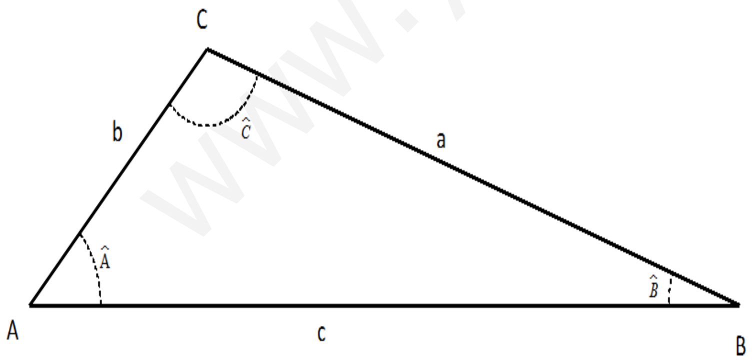
$A_2 + B + C = 156^o 25' 18.56'' + 30^o + C = 180^o$, daría un ángulo C negativo y eso no es posible.

Por tanto $\boxed{A = 23^o 34' 41.44''}$, de ahí obtenemos C: $23^o 34' 41.44'' + 30^o + C = 180^o \Rightarrow \boxed{C = 126^o 25' 18.56''}$

Por último calculamos el lado que nos falta: $\dfrac{\text{sen } 30^o}{5} = \dfrac{\text{sen } 126^o 25' 18.56''}{c} \Rightarrow c = \dfrac{5 \cdot \text{sen } 126^o 25' 18.56''}{\text{sen } 30^o} \Rightarrow$

$\boxed{c = 8,05 \text{ m}}$

Teorema del coseno: En un triángulo cualquiera como el de la figura, se cumple que:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A}$$

O bien

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B}$$

O bien

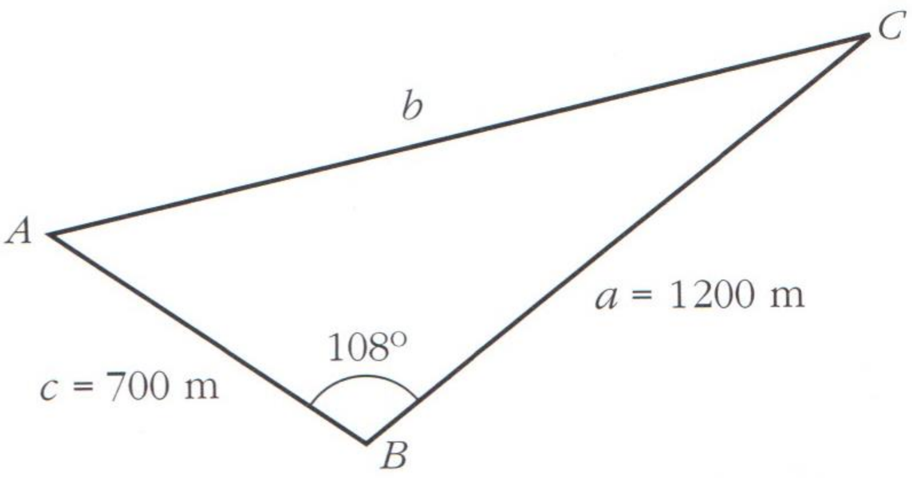
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C}$$

Se aplica cuando conocemos:

- Los tres lados
- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
- Dos lados y el ángulo que forman

Se usan conjuntamente los dos teoremas para resolver triángulos.

Ejemplo: Resuelve el triángulo de la figura:



Aplicamos el teorema del coseno para calcular el lado

$b \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos B \Rightarrow b^2 = 1200^2 + 700^2 - 2{\cdot}1200{\cdot}700{\cdot}\cos 108º \Rightarrow$

$b = \sqrt{1200^2 + 700^2 - 2{\cdot}1200{\cdot}700{\cdot}\cos 108º} \Rightarrow \boxed{b = 1564{,}98 \text{ m}}$

Aplicamos ahora el teorema del seno para calcular el ángulo A

$\frac{\text{sen A}}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \Rightarrow \frac{\text{sen A}}{1200} = \frac{\text{sen } 108º}{1564{,}98} \Rightarrow \text{sen A} = \frac{1200{\cdot}\text{sen } 108º}{1564{,}98} \Rightarrow \text{sen A} = 0{,}729 \Rightarrow \text{A} = \begin{cases} 46º\,49'26'' \\ 133º10'34'' \end{cases}$ Sólo es válida la solución del ángulo agudo, pues con la otra sumarian más de $180º$. Por tanto, $\boxed{\text{A} = 46º\,49'26''}$

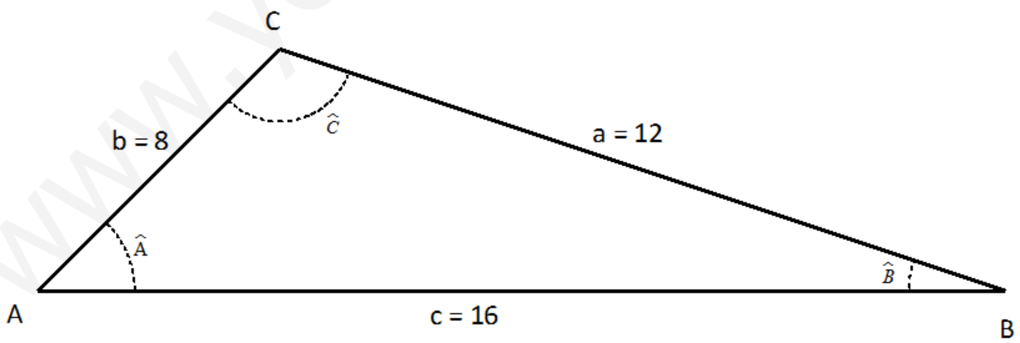
Nos falta calcular $C = 180º - 108º - 46º\,49'26'' \Rightarrow \boxed{C = 25º10'34''}$

NOTA: El cálculo del ángulo A se podía haber realizado con el teorema del coseno, así:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\cos \text{A} \Rightarrow 1200^2 = 1564{,}98^2 + 700^2 - 2{\cdot}1564{,}98{\cdot}700{\cdot}\cos \text{A} \Rightarrow$

$\cos \text{A} = \frac{1564{,}98^2 + 700^2 - 1200^2}{2{\cdot}1564{,}98{\cdot}700} \Rightarrow \cos \text{A} = 0{,}6842 \Rightarrow \text{A} = 46º\,49'25.37''$. No sale exactamente lo mismo por el efecto de los redondeos

Ejemplo: Resuelve el siguiente triángulo:



Vamos a aplicar el teorema del coseno para calcular el ángulo B

$b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos B \Rightarrow 8^2 = 12^2 + 16^2 - 2{\cdot}12{\cdot}16{\cdot}\cos B \Rightarrow 64 = 144 + 256 - 384{\cdot}\cos B \Rightarrow$

$64 = 400 - 384{\cdot}\cos B \Rightarrow 384{\cdot}\cos B = 400 - 64 \Rightarrow \cos B = \frac{336}{384} \Rightarrow \boxed{B = 28º\,57'18.09''}$

Lo mismo para el ángulo A , aunque también lo podríamos hacer por el teorema del seno, pero tendríamos que tener en cuenta que entonces nos salen dos soluciones y una sería desechable.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \mathrm{A} \Rightarrow 12^2 = 8^2 + 16^2 - 2 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \cos \mathrm{A} \Rightarrow \cos \mathrm{A} = \frac{8^2 + 16^2 - 12^2}{2 \cdot 8 \cdot 16} \Rightarrow \boxed{\mathrm{A} = 46^{\circ} 34' 2.87''}$$

Y por último el ángulo C, aplicando que la suma de los tres ángulos ha de ser 180°

$$C = 180^{\circ} - \mathrm{A} - B \Rightarrow C = 180^{\circ} - 46^{\circ} 34' 2.87'' - 28^{\circ} 57' 18.09'' \Rightarrow \boxed{C = 104^{\circ} 28' 39.04''}$$

5. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se trata de ecuaciones donde aparecen las razones trigonométricas actuando sobre un ángulo que hay que calcular. El resultado se dará en grados o radianes según el enunciado del problema.

Para resolverlas no hay un método concreto, se trata, pues, de ir aprendiendo con la práctica y los conocimientos adquiridos. Veamos mediante ejemplos como se realiza la resolución

Ejemplo: Resuelve la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Solución: Preparamos la ecuación, $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Dado que el enunciado no especifica nada daremos las soluciones en grados sexagesimales. Una solución como ya sabemos es $x = 60^{\circ}$, pero tiene más soluciones. Los ángulos suplementarios tienen el seno igual, por tanto otra solución es $x = 120^{\circ}$

Podríamos terminar diciendo que las soluciones son dos $\begin{cases} x_1 = 60^{\circ} \\ x_2 = 120^{\circ} \end{cases}$, pero no sería del todo correcto, pues hay más soluciones. Los ángulos que difieren un nº entero de vueltas ($k \cdot 360^{\circ}$) tienen las mismas razones trigonométricas, es decir, los ángulos de

$$420^{\circ} = 60^{\circ} + 1 \cdot 360^{\circ}, 780^{\circ} = 60^{\circ} + 2 \cdot 360^{\circ}, 480^{\circ} = 120^{\circ} + 1 \cdot 360^{\circ}, 840^{\circ} = 120^{\circ} + 2 \cdot 360^{\circ}, -300^{\circ} = 60^{\circ} + (-1) \cdot 360^{\circ}, \ldots\ldots.$$

también tienen por seno $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Por tanto, tiene infinitas soluciones, y la forma de expresarlo matemáticamente es:

$\boxed{\begin{cases} x_1 = 60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ} \\ x_2 = 120^{\circ} + k \cdot 360^{\circ} \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}}$, donde k es el nº de vueltas que da el ángulo

Este mismo ejemplo pero dando su solución en radianes sería:

$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2 \cdot \pi \end{cases}$ con $k \in \mathbb{Z}$, que se suele poner de la siguiente forma: $\boxed{\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \\ x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2 \cdot k \cdot \pi \end{cases} \text{con } k \in \mathbb{Z}}$

Ejemplo: Resuelve $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solución: Los ángulos cuyo coseno es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y son menores que $2 \cdot \pi$ son: $\begin{cases} \frac{\pi}{4} \\ \frac{7 \cdot \pi}{4} \ \text{(suma } 2 \cdot \pi \text{ con } \frac{\pi}{4}) \end{cases}$ y le hemos de añadir las vueltas, luego:

$$\begin{cases} x_1+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi \\ x_2+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\cdot\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k\in\mathbb{Z}\Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi \\ x_2=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{7\cdot\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k\in\mathbb{Z}\Rightarrow \begin{cases} x_1=0+2\cdot k\cdot\pi \\ x_2=\dfrac{6\pi}{4}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k\in\mathbb{Z}\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} x_1=2\cdot k\cdot\pi \\ x_2=\dfrac{3\cdot\pi}{2}+2\cdot k\cdot\pi \end{cases} \text{con } k\in\mathbb{Z}}$$

<u>Ejemplo</u>: Resuelve

$$\cos 2\cdot x = \cos x + 1$$

<u>Solución</u>: Lo primero que hacemos es convertir la ecuación trigonométrica en una ecuación donde sólo aparezcan el seno o el coseno de x

$$\cos 2\cdot x = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow$$

$$\cos^2 x - \left(1-\cos^2 x\right) = \cos x - 1 \Rightarrow \cos^2 x - 1+\cos^2 x = \cos x - 1 \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x - 1 = \cos x - 1 \Rightarrow$$

$$2\cdot\cos^2 x = \cos x \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x\cdot\left(2\cdot\cos x - 1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cdot\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \begin{cases} x_1=90^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \\ x_2=270^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \end{cases} \\ \begin{cases} x_3=60^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \\ x_4=300^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \end{cases} \end{cases} \text{con } k\in\mathbb{Z}}$$

<u>Ejemplo</u>: Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ 2\cdot\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Resolvemos el sistema por Gauss

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \\ 2\cdot\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow (\text{hacemos } E_2+E_1) \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \\ 3\cdot\operatorname{sen} x = 3 \end{cases} \begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases} \begin{cases} \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases}$$ Resolvemos ya cada ecuación:

$$\operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = 90^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \text{ con } k\in\mathbb{Z}}$$

$$\operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_1=30^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \\ y_2=150^{\circ}+k\cdot 360^{\circ} \end{cases} \text{con } k\in\mathbb{Z}}$$

Ejemplo: Resuelve la ecuación: $\cos x + \sec x = \dfrac{-5}{2}$ con $180^{\circ} < x < 270^{\circ}$

Solución: Operamos

$$\cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{-5}{2} \Rightarrow \frac{2\cdot\cos^2 x + 2}{2\cdot\cos x} = \frac{-5\cdot \cos x}{2\cdot\cos x} \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x + 2 = -5\cdot \cos x \Rightarrow 2\cdot\cos^2 x + 5\cdot \cos x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{-5+3}{4} \\ \cos x = \dfrac{-5-3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{-1}{2} \\ \cos x = -2 \text{ (no existe solución de aquí pues -}1 \le \cos x \le 1) \end{cases}$$

Sólo nos queda:

$\cos x = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^{\circ} + k\cdot 360^{\circ} \\ x_2 = 240^{\circ} + k\cdot 360^{\circ} \end{cases}$ De todas estas posibles soluciones, solo hay una que cumple la condición $180^{\circ} < x < 270^{\circ}$ dada por el problema. Luego, la solución es $\boxed{x = 240^{\circ}}$