8 Funciones elementales

Mucho camino ha habido que recorrer hasta llegar a considerar a una función como una relación entre dos magnitudes. Aunque no fue el único, el filósofo, matemático y científico francés René Descartes (1596 – 1650) impulsó el concepto de función al introducir métodos del Álgebra en la Geometría. Hoy las funciones son una herramienta fundamental en la física, la biología, la ingeniería, las ciencias sociales, etc.

Comenzamos la Unidad describiendo las notaciones habituales así como los conceptos de Dominio e Imagen o Recorrido de una función. A partir de ellos clasificamos las funciones en inyectivas, suprayectivas y biyectivas.

René Descartes (Wikimedia Commons)

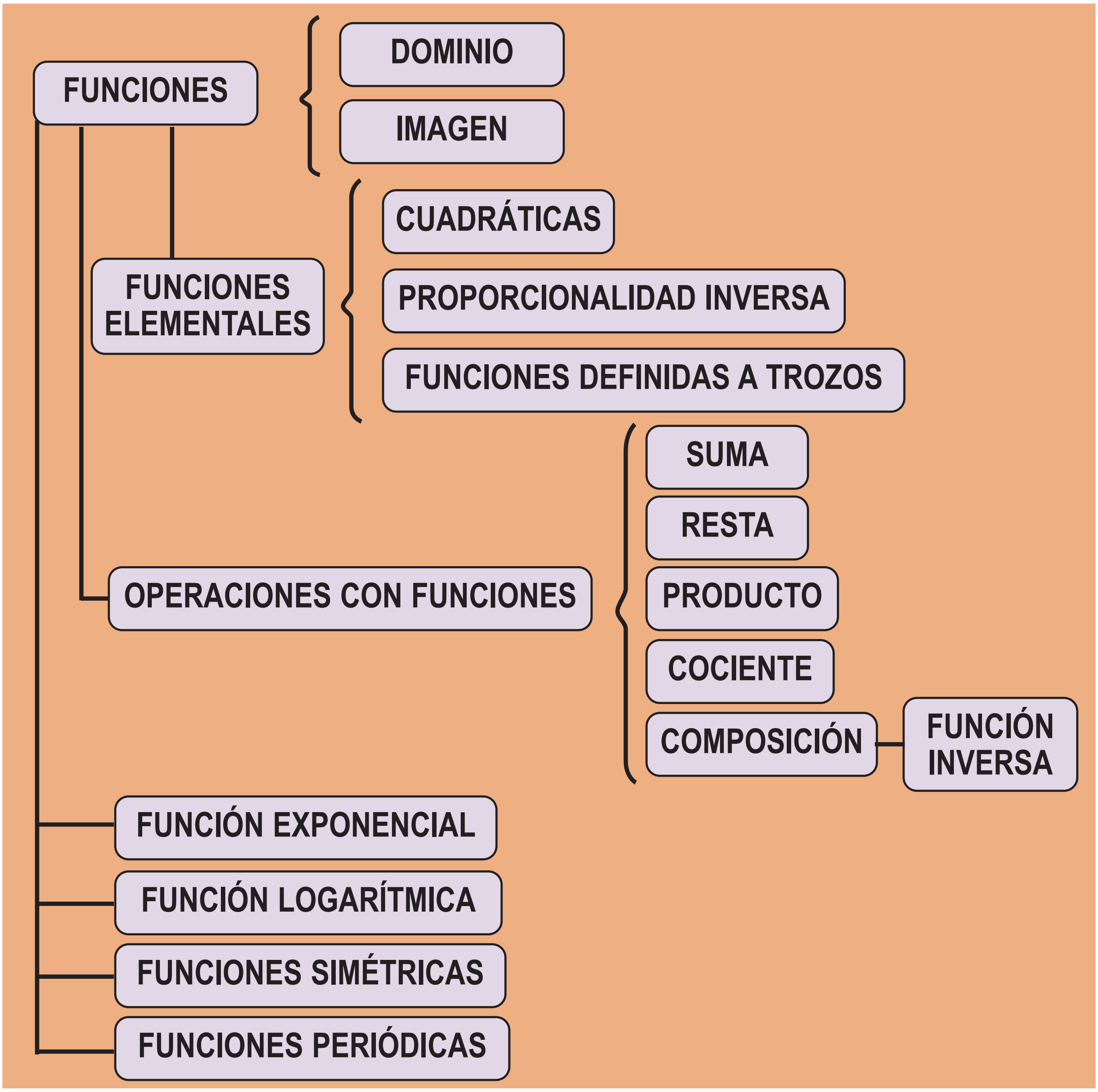
Continuamos con una relación de funciones elementales que ya han sido tratadas en la Educación Secundaria Obligatoria (cuadrática; de proporcionalidad inversa; definidas a trozos) hasta llegar al álgebra de funciones: qué operaciones podemos realizar con las funciones y cómo podemos llevarlas a cabo. Se trata de un ejercicio encaminado a dominar el lenguaje de las funciones.

Dedicamos a la operación de composición de funciones un apartado exclusivo, pues aparte de permitir escribir funciones más complejas a partir de otras más sencillas o descomponer complejas a partir de otras sencillas, nos lleva al importante concepto de función inversa. Aprenderemos qué es y cómo se calcula la función inversa de una dada y los problemas que pueden surgir en dicho cálculo.

La Unidad se completa con el estudio de funciones de gran importancia en Matemáticas: las funciones exponenciales, logarítmicas, simétricas y periódicas.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Introducir el conocimiento y uso de la notación matemática en el campo de las funciones.
2. Calcular el dominio de cualquier función.
3. Manejar las operaciones con funciones, especialmente la composición.
4. Calcular la inversa de cualquier función.
5. Profundizar en el estudio de las funciones definidas a trozos, exponenciales, logarítmicas.
6. Reconocer e interpretar los conceptos de simetría y periodicidad.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

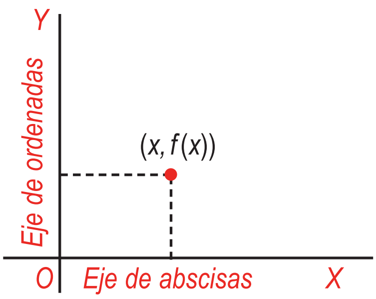
1. CONCEPTO DE FUNCIÓN. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN 184
2. DOMINIO E IMAGEN DE UNA FUNCIÓN 185
3. FUNCIÓN CUADRÁTICA 188
4. FUNCIÓN PROPORCIONALIDAD INVERSA 190
5. FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS: VALOR ABSOLUTO, PARTE ENTERA 195
6. OPERACIONES CON FUNCIONES 198
   6.1. Suma de funciones $f+g$ 198
   6.2. Resta de funciones $f-g$ 198
   6.3. Producto de funciones $f\cdot g$ 199
   6.4. Cociente de funciones $\frac{f}{g}$ 199
7. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES $f \circ g$ 200
8. FUNCIONES INVERSAS 202
9. FUNCIÓN EXPONENCIAL 204
10. FUNCIÓN LOGARÍTMICA 206
11. FUNCIONES SIMÉTRICAS 208
12. FUNCIONES PERIÓDICAS 209

1. Concepto de función. Gráfica de una función

Una función es *una regla que permite transformar un número real en otro*. El número que se transforma, habitualmente x, se llama original o variable independiente, y el resultado de la transformación, $f(x)$ o y, es la imagen o variable dependiente.

La notación completa es $\begin{array}{c} f: R \rightarrow R \\ x \longrightarrow f(x) \end{array}$, **función real de variable real**, aunque se abrevia a $f(x)$ = *regla para transformar* x, siendo la regla una fórmula como $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 3x + 5$, $y = \ln(x + 4)$. Sólo son funciones las reglas que transforman un original en una única imagen, es decir, un valor x sólo tiene una imagen $f(x)$.

La función se llama f y $f(x)$ es el valor que asigna la función f a la variable x, aunque también se emplea $f(x)$ para designar a la función, siempre que no haya problemas de interpretación. Llamar y a la función en lugar de $y(x)$ es muy habitual; el paréntesis sólo se usa cuando hay que calcular algún valor como $y(0)$, $y(-1)$.



Podemos hacernos una idea de la función mediante una gráfica. Para construirla se usan dos rectas o ejes (sistema de ejes cartesianos o sistema de ejes): una para las variables independientes, donde se marca el valor de x (**eje de abscisas** X), y otra para las variables dependientes (**eje de ordenadas** Y), donde se marca el de $f(x)$. Los ejes son perpendiculares entre sí y se cortan en el origen de coordenadas $O(0,0)$. La gráfica está constituida por infinitos pares de valores o puntos $(x, f(x))$.

Como x toma infinitos valores, no se puede representar una función mediante tablas de valores $(x, f(x))$, sino que la gráfica se construye a partir de unas pocas operaciones mediante un método que se estudiará en la **Unidad 10**. No obstante, algunas funciones sencillas se representan a partir de pocos puntos y pocas propiedades.

Ejemplos

1. Halla las imágenes de $-7, 1, \sqrt{5}$ por las funciones $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $y = \dfrac{4}{x+2}$.

Solución :

$$f(-7) = (-7)^2 - 3\cdot(-7) + 5 = 75; f(1) = 1^2 - 3\cdot 1 + 5 = 3; f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 - 3\cdot\sqrt{5} + 5 = 10 - 3\sqrt{5}.$$

$$y(-7) = \frac{4}{-7+2} = -\frac{4}{5}; y(1) = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}; y(\sqrt{5}) = \frac{4}{\sqrt{5}+2} \overset{\text{conjugado: } \sqrt{5}-2}{=} \frac{4(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{4\cdot(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4\cdot(\sqrt{5}-2).$$

2. Averigua las imágenes de -2, 0 y $x + h$ por las funciones $y = x + 4$, $g(x) = \dfrac{x+3}{x}$, $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Solución :

$$y(-2) = -2 + 4 = 2; y(0) = 0 + 4 = 4; y(x+h) = x + h + 4.$$

$$g(-2) = \frac{-2+3}{-2} = -\frac{1}{2}; g(0) = \frac{0+3}{0} \Rightarrow \textit{no existe } g(0); \quad g(x+h) = \frac{x+h+3}{x+h}.$$

$$f(-2) = \sqrt{-2+1} = \sqrt{-1} \Rightarrow \textit{no existe } f(-2); f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1; f(x+h) = \sqrt{x+h+1}.$$

2. Dominio e imagen de una función

En los ejemplos vemos que no todos los números reales tienen imagen para ciertas funciones. En las funciones polinómicas todo número real x tiene imagen, ya que un número podemos elevarlo a cualquier número natural.

Cuando la función tiene denominador, no existe imagen para aquellos valores que anulan dicho denominador, pues no se puede dividir por cero. Si la función es una raíz cuadrada (o de índice par) no tienen imagen aquellos números que hacen que el radicando sea negativo, porque la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real. También aparecen números sin imagen en el caso de los logaritmos, dado que no existen los logaritmos de los números negativos ni del cero.

Los números que tienen imagen por una determinada función constituyen su **dominio**: $Dom\ f=\{x\in R\ /\ \exists f(x)\}$. En el caso de las funciones polinómicas $Dom\ f=R$.

En la determinación del **dominio** se pueden presentar los casos siguientes:

1. f es una función racional (cociente de polinomios): $f(x)=\dfrac{NUM(x)}{DEN(x)}\Rightarrow$ el dominio lo forman todos los números reales menos aquellos que anulan al denominador, es decir, las soluciones de la ecuación $DEN(x)=0$. Así, $Dom\ f=R-\{x\in R\ /\ DEN(x)=0\}$.
2. f es la raíz de una expresión algebraica: $f(x)=\sqrt{RAD(x)}\Rightarrow$ el dominio lo forman todos los números para los que el radicando es positivo o cero, esto es, la solución de la inecuación $RAD(x)\geq 0$. Luego, $Dom\ f=\{x\in R\ /\ RAD(x)\geq 0\}$.
3. f es el logaritmo de una expresión algebraica: $f(x)=\ln ARG(x)\Rightarrow$ el dominio lo forman los números reales para los que el argumento es positivo, es decir, las soluciones de la inecuación $ARG(x)>0$. Así, $Dom\ f=\{x\in R\ /\ ARG(x)>0\}$.

Ejemplos

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$; **b)** $g(x)=\sqrt{x-4}$; **c)** $h(x)=\ln(x+5)$.

Solución :

a) Al ser una función con denominador, lo igualamos a cero y resolvemos la ecuación: $x^2-5x+6=0\Rightarrow x_1=2$, $x_2=3$. Por lo tanto, $Dom\ f=R-\{2,\ 3\}$.

b) Como es una raíz cuadrada, resolvemos la inecuación $x-4\geq 0\Rightarrow x\geq 4\ \Rightarrow\ Dom\ g=[4,\infty)$.

c) Al ser un logaritmo neperiano, hay que resolver la inecuación: $x+5>0\Rightarrow x>-5\Rightarrow Dom\ h=(-5,\infty)$.

4. Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{x+7}{x^2-1}$; **b)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-7}}$; **c)** $g(x)=\ln\dfrac{x+7}{x^2-1}$.

Solución :

a) $DEN=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1\Rightarrow\ Dom\ \ y=R-\{1,-1\}$.

b) $RAD(x)\geq 0\Rightarrow\dfrac{x+3}{x-7}\geq 0\Rightarrow\begin{cases}NUM=0\Rightarrow x=-3\\ DEN=0\Rightarrow x=7\end{cases}$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 7)$	$(7, \infty)$
$\text{sgn}\left(\dfrac{x+3}{x-7}\right)$	$\dfrac{-}{-} = +$	$\dfrac{+}{-} = -$	$\dfrac{+}{+} = +$

Descomponemos la recta real en tres intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 7)$ y $(7, \infty)$. Construimos la tabla de signo y obtenemos *Dom f* = $(-\infty, -3] \cup (7, \infty)$.

En el dominio entra −3, porque anula al numerador ($f(-3) = 0$), pero no 7 que anula al denominador, luego $\nexists f(7)$.

c) $ARG(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{x+7}{x^2-1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = -7 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

Partimos la recta real en cuatro intervalos $(-\infty, -7)$, $(-7, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.

	$(-\infty, -7)$	$(-7, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$\text{sgn}\left(\dfrac{x+7}{x^2-1}\right)$	$\dfrac{-}{+} = -$	$\dfrac{+}{+} = +$	$\dfrac{+}{-} = -$	$\dfrac{+}{+} = +$

Construimos la tabla de signo y obtenemos *Dom f* = $(-7, -1) \cup (1, \infty)$. En este caso no entran ni −7 ($\nexists$ ln0), ni −1 ni 1 (*DEN* = 0). Aunque parezcan pocos, el cálculo del dominio de otro tipo de funciones consiste en mezclar convenientemente estos tres casos.

Podría darse algún otro caso como el siguiente, más de astucia que de dificultad:

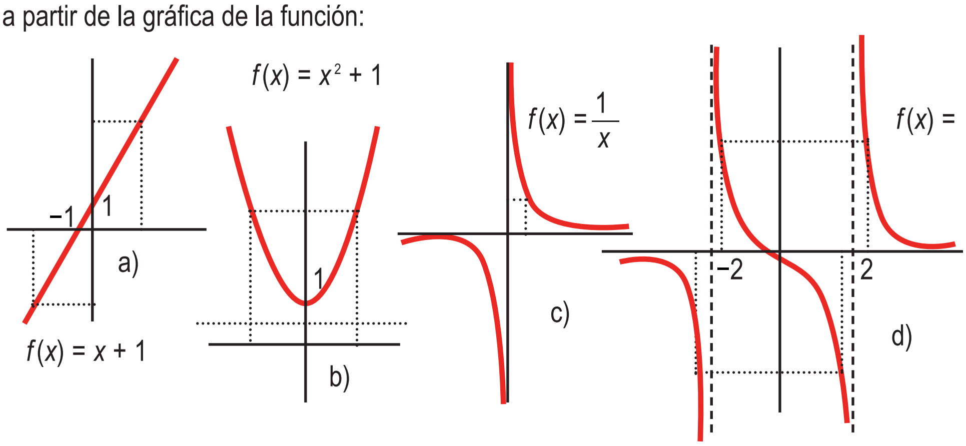
5. Averigua el dominio de la función $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ si } x < 0 \\ 4x, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Solución:

Observando la definición de esta función definida a trozos, se ve que el problema es que no se ha definido la función para $x = 0$, luego *Dom f* = $R - \{0\}$.

La Imagen o Recorrido es el conjunto complementario del Dominio, pues la **Imagen** es *el conjunto de los números reales que provienen de un original o antecedente por la función:* $\text{Im} f = \{y \in R / \exists x \text{ que verifica } y = f(x)\}$.

El problema de averiguar la Imagen es considerablemente más complejo que el de hallar el Dominio. Podemos hacerlo a partir de la gráfica de la función:



En la función a), $\text{Im} f = R$, pues cualquier valor de *y* tiene su respectiva *x*. En la función b), $\text{Im} f = [1, \infty)$, pues ningún valor de *y* menor que 1 tiene imagen. En la c), $\text{Im} f = R - \{0\}$, pues nunca se alcanza el valor $y = 0$. En la d), $\text{Im} f = R$.

Para resolverlo analíticamente se puede recurrir a la función inversa (apartado 8 de esta Unidad) o discutirlo a partir de la ecuación $y = f(x)$:

a) $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow x$ existe para cualquier valor de $y \Rightarrow \text{Im} f = R$.

b) $y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1} \Rightarrow \exists x \text{ si } y \geq 1 \Rightarrow \text{Im} f = [1, \infty)$.

c) $y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} \Rightarrow \exists x \text{ si } y \neq 0 \Rightarrow \text{Im} f = R - \{0\}$.

d) $y = \dfrac{x}{x^2-4} \Rightarrow yx^2 - x - 4y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+16y^2}}{2y} \Rightarrow \exists x \text{ si } y \neq 0$. El caso $y = 0$ se resuelve planteando que $0 = \dfrac{x}{x^2-4} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Im} f = R$.

Atendiendo a la relación entre originales e imágenes una función puede ser:

- **Inyectiva**: a todo valor del dominio le corresponde una imagen distinta. Se dice que *f* es **inyectiva** cuando $\forall x_1, x_2 \in Dom\, f$ si $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. En los ejemplos, sólo a) y c) son inyectivas (en c) *Dom f* = = *R* − {0}). En b) vemos que *f* (−1) =*f* (1) =2, por lo que no puede ser inyectiva. En d) se observa que al trazar rectas horizontales en la gráfica éstas cortan a la función en dos puntos (en la ecuación anterior aparece el doble signo , por lo que para un mismo valor de *y* habrá dos de *x*): no es inyectiva.

- **Suprayectiva** o **sobreyectiva**: toda imagen tiene al menos un original. Se dice que *f* es **suprayectiva** cuando $\forall y \in R\ \exists x \in R$ tal que $f(x) = y$. Son suprayectivas a) y d); c) sería suprayectiva si tuviéramos $f: R - \{0\} \to R - \{0\}$ y b) no es suprayectiva.

- **Biyectiva**: es inyectiva y sobreyectiva a la vez, esto es, cuando $\forall y \in R$ existe un único $x \in R$ tal que $f(x) = y$. Sólo es biyectiva a), pues d) tiene imágenes que poseen dos originales. La función c) sería **biyectiva** si tuviéramos $f: R - \{0\} \to R - \{0\}$.

Esta clasificación depende de cuál sea el conjunto de partida: la función b) sería biyectiva si fuera $f: [0,\infty) \to [1,\infty)$, pero no si es $f: R \to R$.

Actividades

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ averigua el valor de $f(-3), f(0), f(7), f(-x)$.

2. Calcula las imágenes de $-\sqrt{2}, x-h, 3$ por la función $f(x) = 7 - x^2$.

3. Dada la función $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, halla $g(-5), g(0), g(3+h), g(5)$.

4. Dada la función $y = \sqrt{x^2+20}$ calcula $y(-7), y(-4), y(x+h), y(4+h)$.

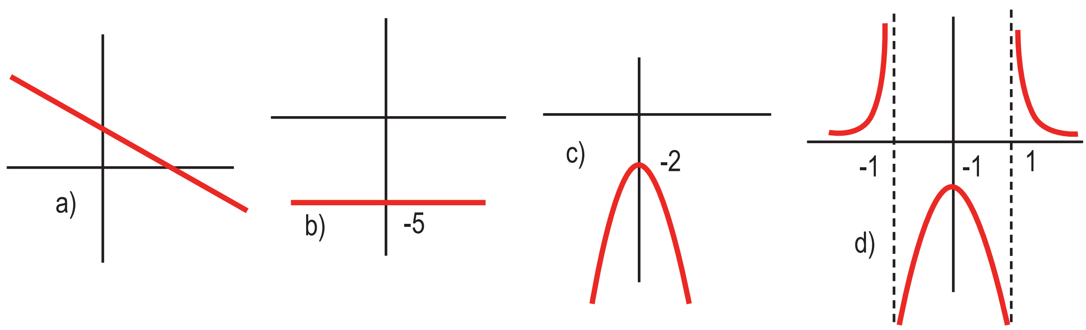
5. Halla el dominio de las funciones $f(x) = \dfrac{x+5}{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

6. Averigua el dominio de $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+x-6}$ y $g(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

7. Calcula el dominio de $f(x) = \ln(x^2 - x - 12)$ y $g(x) = \dfrac{1}{2x-5}$.

8. Averigua el dominio de $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x+5}}$ y $g(x) = \ln(x^2 - 2x)$.

9. A la vista de los gráficos, indica la imagen de las funciones representadas:



10. Halla la imagen de las funciones $f(x) = 3$, $g(x) = 1 - x$ e $y = 4 - x^2$.

3. Función cuadrática

La **función cuadrática** responde a la fórmula $y = ax^2 + bx + c$. Se trata de un polinomio de segundo grado cuya representación gráfica se llama **parábola**.

Se necesitan 3 puntos para su representación porque tiene tres coeficientes *a*, *b* y *c*. Como es una curva simétrica respecto a un eje de simetría que pasa por su vértice, de abscisa $x_V = \frac{-b}{2a}$ y ordenada $y_V = y(x_V)$, siempre hay que calcular sus coordenadas $V(x_V, y_V)$. Dicho eje de simetría es una recta vertical de ecuación $x = x_v$. Los otros dos pueden ser los puntos de corte con el eje *OX* (las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$) o se pueden obtener mediante un desplazamiento simétrico en torno al vértice (sumarle y restarle la misma cantidad a x_v). El primer método no sirve si la ecuación tiene una solución doble o soluciones complejas, mientras que el segundo siempre es válido.

Hay que recordar que si *a* es positivo el vértice es un mínimo ($\cup$) y si *a* es negativo el vértice es un máximo ($\cap$). Para trazar mejor la gráfica pueden hallarse otro par de puntos, siempre equidistantes del vértice (debido a la simetría de la parábola, las ordenadas *y* de estos puntos deben coincidir; así controlamos errores de cálculo). Sin embargo, un pequeño desplazamiento del vértice puede hacer que la parábola tome valores que se salgan de la escala del gráfico, por lo que es probable que no sea necesario calcular ningún punto más.

Ejemplos

6. Representa las funciones: **a)** $y = x^2 - x - 2$; **b)** $y = x^2 - 4x + 4$; **c)** $y = -x^2 - x - 1$.

Solución :

a) $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}; y_v = y(x_V) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1-2-8}{4} = \frac{-9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{4}\right)$. El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{2}$.

Sumamos y restamos $|x_V|$ para que una de las abscisas valga cero, de modo que su ordenada sea el término independiente:

$x_D = x_V + |x_v| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow y_D = y(x_D) = y(1) = -2 \Rightarrow (1,-2)$; (*D* = derecha del vértice).

$x_I = x_V - |x_v| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y_I = y(x_I) = y(0) = -2 \Rightarrow (0,-2)$; (*I* = izquierda del vértice).

Los dos puntos optativos pueden ser: $x_{D'} = \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4 \Rightarrow y_{D'} = y(4) = 10 \Rightarrow (4,10)$;

$x_{I'} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -3 \Rightarrow y_{I'} = y(-3) = 10 \Rightarrow (-3,10)$.

Ésta es la única de las 3 funciones que puede representarse usando los puntos de corte con el eje *OX* $(f \cap OX)$.

b) $x_V = \frac{-b}{2a} = 2; y_v = y(x_v) = y(2) = 2^2 - 8 + 4 = 0 \Rightarrow V(2,0)$; eje de simetría $x = 2$.

También podemos usar cualquier cantidad para desplazarnos simétricamente:

$x_D = x_V + 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow y_D = y(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 4 = 25 - 20 + 4 = 9 \Rightarrow (5,9)$;

$x_I = x_V - 3 = 2 - 3 = -1 \Rightarrow y_I = y(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 4 = 1 + 4 + 4 = 9 \Rightarrow (-1,9)$.

No calculamos más puntos, porque las ordenadas se van de la escala.

c) $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{2}; y_v = y(x_V) = y\left(\dfrac{-1}{2}\right) = -\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{-3}{4} \Rightarrow V\left(\dfrac{-1}{2},\dfrac{-3}{4}\right).$

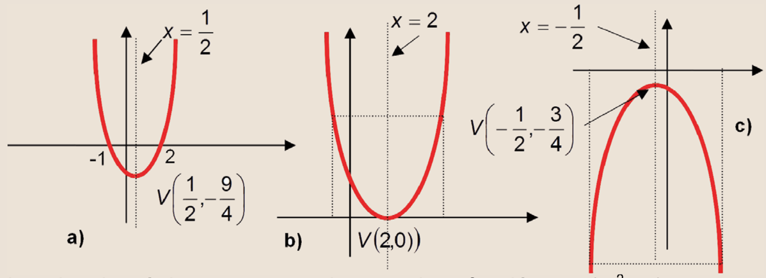
Como $a < 0$, la parábola tiene un máximo. Los puntos simétricos en torno al vértice son: $x_D = x_V + |x_v| = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow$ $y_D = y(0) = -1;\ x_I = x_V - |x_V| = -1 \Rightarrow y_I = y(-1) = -1.$

Los 3 puntos quedan demasiado cercanos por lo que conviene hallar otros dos más:

$x_{D'} = x_V + \dfrac{7}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{2} = 3 \Rightarrow y_{D'} = y(3) = -3^2 - 3 - 1 = -9 - 3 - 1 = -13 \Rightarrow (3,-13).$

$x_{I'} = x_V - \dfrac{7}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{7}{2} = -4 \Rightarrow y(-4) = -(-4)^2 - (-4) - 1 = -16 + 4 - 1 = -13 \Rightarrow (-4,-13).$

Usamos como desplazamiento fracciones con denominador 2 para obtener números enteros. Las gráficas de las tres funciones las hemos dibujado en la misma ilustración.



7. Halla las coordenadas del vértice, los puntos de corte de la función $y = 2x^2 + 9x - 5$ con los ejes coordenados y la ecuación de su eje de simetría.

Solución :

Vértice: $x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{9}{4}; y_v = y\left(\dfrac{-9}{4}\right) = \dfrac{-121}{8} \Rightarrow V\left(-\dfrac{9}{4}, -\dfrac{121}{8}\right).$

Puntos de corte: $f \cap OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 9x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}, -5 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2},0\right), (-5,0).$

Eje de simetría $x = x_V \Rightarrow x = -\dfrac{9}{4}.$

8. Un cañón lanza un disparo cuya trayectoria viene dada por $y = -3x^2 + 18x$, con x e y en cientos de metros. Calcula la altura máxima y el alcance del disparo.

Solución :

La altura máxima es y_V, y como $x_V = 3$, $y_v = y(3) = 27$. El alcance del disparo es el punto en el que la función vuelve a cortar al eje OX: $f(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 18x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 6$. Lógicamente 0 se corresponde con el punto en el que se encuentra el cañón, por lo que el alcance será $x_2 = 6$. Así, teniendo en cuenta la escala de x e y, la altura máxima que alcanza es de 2700 m y el alcance de 600 m.

9. Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(1,3)$, $B(0,-5)$ y $C(2,13)$.

Solución :

La ecuación es $y = ax^2 + bx + c$. Sustituyendo las coordenadas de los 3 puntos se obtiene un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Usamos el método de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l} A(1,3) \Rightarrow \quad a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \Rightarrow \quad a + b + c = 3 \\ B(0,-5) \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -5 \Rightarrow c = -5 \\ C(2,13) \Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 13 \Rightarrow 4a + 2b + c = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2'=F2-4F1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 2b + 3c = -1 \Rightarrow a = 1, b = 7, c = -5 \Rightarrow y = x^2 + 7x - 5. \\ c = -5 \end{cases}$$

4. Función proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando su producto se mantiene constante: $x \cdot y = k$, k constante. De aquí se deduce que si la magnitud y aumenta, la magnitud x ha de disminuir para que el producto permanezca constante, y viceversa. También se suele escribir la relación funcional como $y = \frac{k}{x}$, que es la nomenclatura de la que procede el término *inversa*, que en Matemáticas se aplica cuando la variable independiente está en un denominador (el término *directa* se usa cuando la x está en un numerador, como por ejemplo $y = kx$).

Tenemos dos funciones patrón para la representación gráfica: $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$. Su representación puede llevarse a cabo gracias a unas pocas propiedades. Veámoslo primero con $y = \frac{1}{x}$:

1. $Dom\ y = R - \{0\}$.

2. La función tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 0$, pues aparece una división por cero. En la siguiente tabla se ve lo que ocurre:

	$x \to 0^+$			$x \to 0^-$		
x	10^{-10}	10^{-20}	10^{-100}	-10^{-10}	-10^{-20}	-10^{-100}
$y = \frac{1}{x}$	10^{10}	10^{20}	10^{100}	-10^{10}	-10^{20}	-10^{100}

En las proximidades del origen la función se dirige hacia ∞ si nos acercamos a cero con valores positivos ($x \to 0^+$)y hacia $-\infty$ si lo hacemos con valores negativos ($x \to 0^-$). Abreviadamente escribimos $\frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\to} \infty$ ó $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$; $\frac{1}{x} \underset{x \to 0^-}{\to} -\infty$ ó $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

La flecha $\to$ se lee *tiende*, por lo que $x \to 0^+$ se lee *x tiende a cero por la derecha*, que es donde están los números mayores que cero y $x \to 0^-$ se lee *x tiende a cero por la izquierda*, que es donde están los números menores que cero.

3. La función tiene una asíntota horizontal de ecuación $y_H = 0$ pues cuando x aumenta o disminuye indefinidamente la función se aproxima a cero.

	$x \to \infty$			$x \to -\infty$		
x	10^{10}	10^{20}	10^{100}	-10^{10}	-10^{20}	-10^{100}
$y = \frac{1}{x}$	10^{-10}	10^{-20}	10^{-100}	-10^{-10}	-10^{-20}	-10^{-100}

Escribimos abreviadamente: $\frac{1}{x} \underset{x \to \infty}{\to} 0$ ó $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$; $\frac{1}{x} \underset{x \to -\infty}{\to} 0$ ó $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Ambos comportamientos pueden resumirse en que $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

4. Los puntos más próximos al origen de coordenadas, que aquí llamaremos puntos característicos, son aquellos que verifican que $y = x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow (1,1), (-1,-1)$.

Para la función $y=-\dfrac{1}{x}$ tendremos:

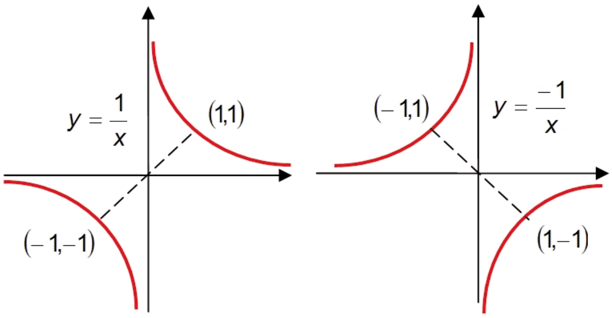
1. *Dom* $y = R - \{0\}$.

2. Asíntota vertical $x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=\dfrac{-1}{0^-}=\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty \end{cases}$.

3. Asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{-1}{x}\right)=0 \Rightarrow y_H=0.$

4. Puntos característicos: $y=-x \Rightarrow -x^2=-1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \Rightarrow (1,-1),(-1,1)$.

Su representación gráfica es la curva conocida como *hipérbola equilátera*, curva simétrica respecto al origen de coordenadas (función impar):



Los **cambios** que puede sufrir la curva son de tres tipos:

1) Acercamiento o alejamiento del origen. Si en la función $y=\dfrac{k}{x}$ hacemos $y=x$ tenemos $x^2=k \Rightarrow x=\pm\sqrt{k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{Bmatrix} (1,1)\to\left(\sqrt{k},\sqrt{k}\right) \\ (-1,-1)\to\left(-\sqrt{k},-\sqrt{k}\right) \end{Bmatrix}$. Si $k<1$ la curva se acerca al origen de coordenadas y si $k>1$ la función se aleja.

2) Desplazamiento horizontal: la función $y=\dfrac{1}{x-a}$ tiene como asíntota vertical la recta vertical de ecuación $x=a$. De este modo, la hipérbola se desplaza a la derecha si $a>0$ y hacia la izquierda si $a<0$. Este desplazamiento horizontal (dh) se refleja también en los puntos característicos $\begin{Bmatrix} (1,1) & \xrightarrow{dh=a} & (1+a,1) \\ (-1,-1) & & (-1+a,-1) \end{Bmatrix}$. Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-a}=0$, su asíntota horizontal sigue siendo $y_H=0$.

3) Desplazamiento vertical: la función $y=b+\dfrac{1}{x}$ tiene como asíntota horizontal la recta de ecuación $y_H=b$. Así, la hipérbola se desplaza hacia arriba si $b>0$ y hacia abajo si $b<0$. Este desplazamiento vertical (dv) se refleja también en los puntos característicos $\begin{Bmatrix} (1,1) & & (1,1+b) \\ (-1,-1) & \xrightarrow[dv=b]{} & (-1,-1+b) \end{Bmatrix}$. No se desplaza horizontalmente pues su asíntota vertical es $x=0$, ya que su dominio es $R-\{0\}$.

Estos cambios se generalizan en la función $y=b+\dfrac{k}{x-a}$, que tiene como asíntota vertical la recta $x=a$, como asíntota horizontal $y_H=b$ y sus puntos característicos son $\begin{Bmatrix} \left(\sqrt{k},\sqrt{k}\right) & \xrightarrow[dv=b]{dh=a} & \left(\sqrt{k}+a,\sqrt{k}+b\right) \\ \left(-\sqrt{k},-\sqrt{k}\right) & & \left(-\sqrt{k}+a,-\sqrt{k}+b\right) \end{Bmatrix}$. Para llegar a esta función desde otra del tipo $y=\frac{cx+d}{x-a}$ sólo hay que efectuar la división polinómica: el término b es el cociente y k el resto de dicha división. Si $k>0$ el patrón es $y=\frac{1}{x}$ y si $k<0$ el patrón es $y=-\frac{1}{x}$. La función es simétrica, impar, respecto de los ejes formados por sus asíntotas vertical y horizontal.

Ejemplos

10. Representa las siguientes funciones:

a) $y=\frac{4}{x+2}$; **b)** $y=2-\frac{1}{x}$; **c)** $y=\frac{-3x+7}{x-1}$.

Solución :

a) $Dom\ y=R-\{-2\}$. Asíntota vertical: $x=-2\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{4}{x+2}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-2^+}\frac{1}{x+2}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{cases}\Rightarrow dh=-2$; Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+2}=0\Rightarrow$

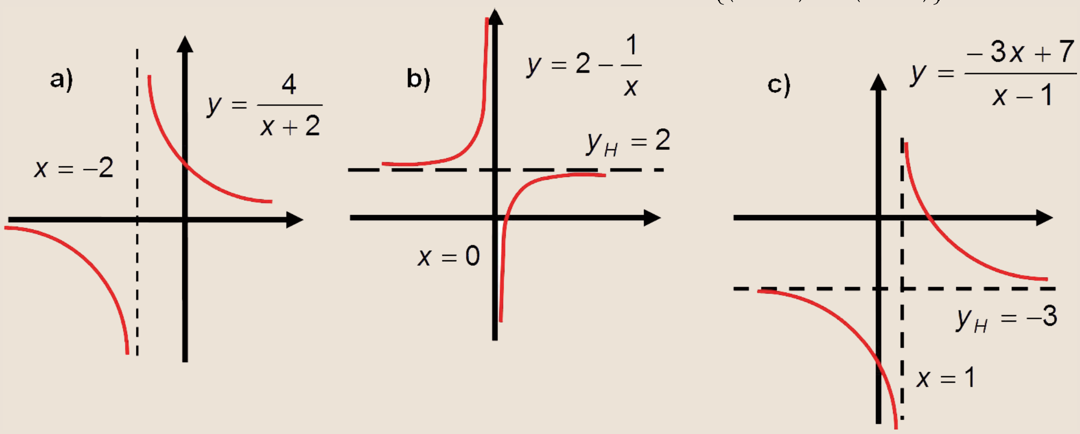
$\Rightarrow y_H=0\Rightarrow dv=0$. Puntos característicos: $y=x\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2\Rightarrow\begin{Bmatrix}(2,2) & \xrightarrow{dh=-2} & (0,2)\\ (-2,-2) & & (-4,-2)\end{Bmatrix}$.

b) $Dom\ y=R-\{0\}$. Asíntota vertical: $x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^-}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2-\frac{1}{0^-}=\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2-\frac{1}{0^+}=-\infty\end{cases}\Rightarrow dh=0$; Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2\Rightarrow$

$\Rightarrow y_H=2\Rightarrow dv=2$. Puntos característicos: $y=-x\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow\begin{Bmatrix}(1,-1) & \xrightarrow{dv=2} & (1,1)\\ (-1,1) & & (-1,3)\end{Bmatrix}$.

c) $y=\frac{-3x+7}{x-1}=-3+\frac{4}{x-1}$; $Dom\ y=R-\{1\}$. AV: $x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-3x+7}{x-1}=\frac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to1^+}\frac{-3x+7}{x-1}=\frac{4}{0^+}=\infty\end{cases}\Rightarrow dh=1$; AH: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-3+\frac{4}{x-1}\right)=-3\Rightarrow$

$\Rightarrow y_H=-3\Rightarrow dv=-3$. Puntos característicos: $y=x\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\pm2\Rightarrow\begin{Bmatrix}(2,2) & \xrightarrow[dv=-3]{dh=1} & (3,-1)\\ (-2,-2) & & (-1,-5)\end{Bmatrix}$.



11. Representa las siguientes funciones:

a) $y=\dfrac{2x+5}{2-x}$; **b)** $y=\dfrac{1-3x}{x+4}$; **c)** $y=\dfrac{4x}{2x+1}$.

Solución :

a) Como el denominador es $2-x$, escribimos $y=-\dfrac{2x+5}{x-2}$, para que se ajuste al patrón, y obtenemos:

$$y=-\left(2+\frac{9}{x-2}\right)=-2-\frac{9}{x-2}\Rightarrow Dom\ y=R-\{2\}.\ \text{AV: } x=2\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x+5}{2-x}=\dfrac{9}{0^+}=\infty\\[2mm]\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x+5}{2-x}=\dfrac{9}{0^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow dh=2;$$

$$\text{AH: }\lim_{x\to\pm\infty}\left(-2-\frac{9}{x-2}\right)=-2\Rightarrow y_H=-2\Rightarrow dv=-2.\ \text{Puntos característicos: } y=-x\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\pm3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}(3,-3)\xrightarrow{dh=2}(5,-5)\\(-3,3)\xrightarrow{dv=-2}(-1,1)\end{Bmatrix}.$$

b) $$y=\frac{-3x+1}{x+4}=-3+\frac{13}{x+4}\Rightarrow Dom\ y=R-\{-4\}.\ \text{AV: } x=-4\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-4^-}\dfrac{-3x+1}{x+4}=\dfrac{13}{0^-}=-\infty\\[2mm]\lim\limits_{x\to-4^+}\dfrac{-3x+1}{x+4}=\dfrac{13}{0^+}=\infty\end{cases};dh=-4;$$

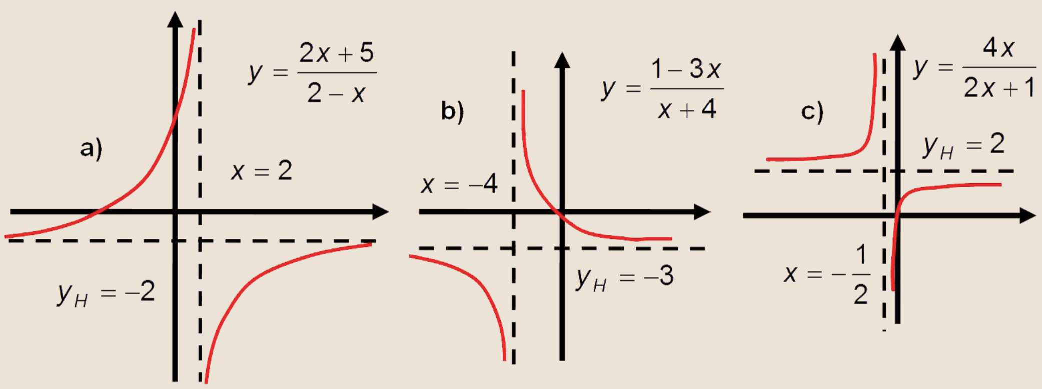
$$\text{AH: }\lim_{x\to\pm\infty}\left(-3+\frac{13}{x+4}\right)=-3\Rightarrow y_H=-3;\ dv=-3.\ \text{Puntos característicos: } y=x\Rightarrow x^2=13\Rightarrow x=\pm\sqrt{13}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}\left(\sqrt{13},\sqrt{13}\right)\xrightarrow{dh=-4}\left(\sqrt{13}-4,\sqrt{13}-3\right)\\\left(-\sqrt{13},-\sqrt{13}\right)\xrightarrow{dv=-3}\left(-\sqrt{13}-4,-\sqrt{13}-3\right)\end{Bmatrix}.$$

c) $y=2-\dfrac{2}{2x+1}=2-\dfrac{2}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}=2-\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$. Observa que, para ajustar la función a los patrones, hay que sacar factor común en el denominador el coeficiente de x y operar hasta que concuerde con el patrón.

$$Dom\ y=R-\left\{-\frac{1}{2}\right\}.\ \text{AV: } x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-}\dfrac{4x}{2x+1}=\dfrac{-2}{0^-}=\infty\\[2mm]\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+}\dfrac{4x}{2x+1}=\dfrac{-2}{0^+}=-\infty\end{cases};dh=-\frac{1}{2};\ \text{AH: }\lim_{x\to\pm\infty}\left(2-\frac{2}{2x+1}\right)=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_H=2;\ dv=2.\ \text{Puntos característicos: } y=-x\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1\Rightarrow\begin{Bmatrix}(1,-1)\xrightarrow{dh=-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2},1\right)\\(-1,1)\xrightarrow{dv=2}\left(-\frac{3}{2},3\right)\end{Bmatrix}.$$



Actividades

11. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-5x-14$; **b)** $y=3x-x^2$; **c)** $f(x)=-x^2+6x+6,40$.

12. Representa las siguientes funciones calculando sus vértices y sus puntos de corte con el eje OX:

a) $y=x^2+3x-4$; **b)** $f(x)=-2x^2+x+3$; **c)** $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-1$.

13. Un balón de fútbol describe una trayectoria dada por la ecuación $y=75x-2x^2$, donde x es la longitud e y la altura (ambos en m). Halla la altura máxima y la distancia recorrida por el balón.

14. Un estudio de mercado para el lanzamiento de teléfonos móviles ha obtenido que la función demanda de dicho producto en función del precio x (en €) es $D(x)=-\frac{1}{9}x^2+11250$ y la función oferta $F(x)=\frac{7}{18}x^2$. ¿A qué precio deben venderse los teléfonos móviles para que la demanda iguale a la oferta?

15. Indica las propiedades y representa las siguientes funciones:

a) $y=\frac{1}{x-1}$; **b)** $y=-1+\frac{1}{x+4}$; **c)** $y=\frac{5x+1}{x-3}$.

16. Indica las propiedades y representa las siguientes funciones:

a) $y=\frac{3-4x}{x-3}$; **b)** $y=\frac{x+1}{x+2}$; **c)** $f(x)=\frac{5x}{5-x}$.

Para saber más...

Aquí hemos tratado la parábola y la hipérbola desde un punto de vista meramente funcional, no como en la **Unidad 7** donde se estudiaron a partir de su definición como lugar geométrico y, por lo tanto, como parte integrante de las cónicas. Al ser tratadas funcionalmente, sólo aparecen las ecuaciones más sencillas para ambas: la parábola siempre tiene un eje de simetría vertical y la hipérbola siempre es equilátera.

También pueden ser tratadas como representación de la proporcionalidad. La parábola aparece cuando una magnitud es directamente proporcional al cuadrado de la otra: $y \propto x^2$, y la hipérbola cuando una magnitud es inversamente porporcional a la otra: $y \propto \frac{1}{x}$.

Este lenguaje es habitual en la física y la química; recuerda la ley de la gravitación universal, donde la fuerza con la que se atraen dos masas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, por lo que si representamos la fuerza en función de la distancia aparece una curva muy similar a la hipérbola.

5. Funciones definidas a trozos: valor absoluto, parte entera

No todas las funciones tienen una única fórmula en su dominio; puede ocurrir que respondan a fórmulas distintas en intervalos distintos: son las **funciones definidas a trozos**. Su manejo es sencillo: para calcular la imagen de una *x* dada, primero la situamos en un intervalo y después le aplicamos la fórmula que le corresponda:

$$\textbf{a)}\ f(x)=\begin{cases}4,\ si\ x<1\\ x+3,\ si\ 1\le x\le 5\\ 37-x^2,\ si\ x>5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}¿f(-3)? & \Rightarrow & -3<1 & \Rightarrow & f(-3)=4\\ ¿f(1)? & \Rightarrow & 1\in[1,5] & \Rightarrow & f(1)=1+3=4\\ ¿f(4)? & \Rightarrow & 4\in[1,5] & \Rightarrow & f(4)=4+3=7\\ ¿f(6)? & \Rightarrow & 6>5 & \Rightarrow & f(6)=37-6^2=1\end{cases}$$

$$\textbf{b)}\ |x|=\begin{cases}-x,\ si\ x<0\\ x,\ si\ x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}¿|-10|? & \Rightarrow & -10<0 & \Rightarrow & |-10|=-(-10)=10\\ ¿|0|? & \Rightarrow & 0=0 & \Rightarrow & |0|=0\\ ¿|5|? & \Rightarrow & 5>0 & \Rightarrow & |5|=5\end{cases}$$

$$\textbf{c)}\ \text{Ent}(x)=\ \text{parte entera de } x=\ \text{mayor entero menor o igual que } x\Rightarrow\begin{cases}\text{Ent}(7{,}234)=7\\ Ent(2)=2\\ Ent(0{,}987)=0\\ Ent(-0{,}987)=-1\end{cases}$$

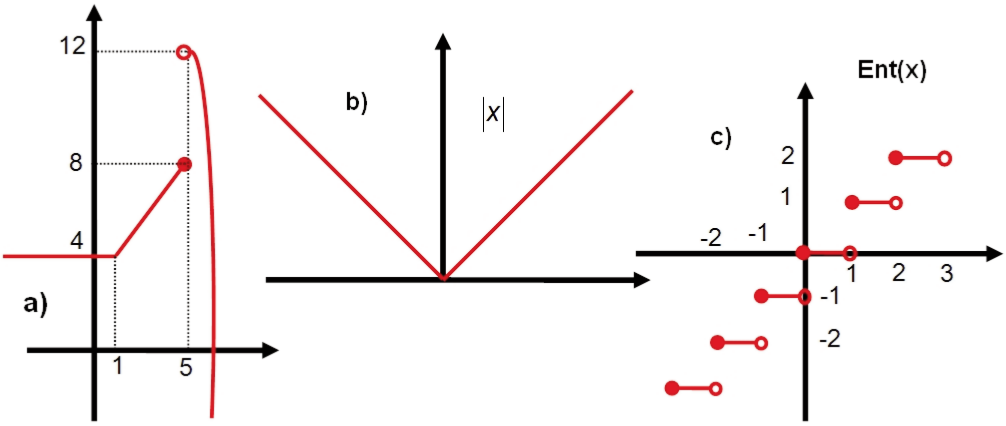
La función **b)** es el valor absoluto, ya conocido de la **Unidad 1**; la **c)** es ***Ent(x)*** ó ***[x]***, **parte entera de x**. En esta función hay que tener cuidado con los números negativos: Ent(−0,25) = −1, porque 0 > −0,25, Ent(−1,65) = −2, (−1 > −1,65); Ent(−3) = −3, pues – 3 es un número entero y, lógicamente, la parte entera de un número entero es él mismo.

La gráfica de estas funciones se obtiene representando cada fórmula en el intervalo en que está definida. Así, primero se mira qué función hay en cada trozo y, usando la estrategia adecuada, se representa. Hay que tener en cuenta que hay que calcular en cada trozo lo que vale la función en su comienzo y en su final. Por convenio, cuando el principio o el final sólo es una desigualdad, se representa un círculo sin rellenar y si también tiene la igualdad, el círculo se rellena; cuando un trozo y otro empalman con continuidad, no se ponen círculos. Representemos las tres funciones anteriores:

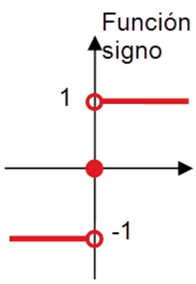
a)		b)		c)	
x	$f(x)$	x	$\|x\|$	x	$Ent(x)$
1^-	4	−3	3	−2,…	−3
1	4	0^-	0	−1,…	−2
5	8	0	0	−0,…	−1
5^+	12	3	3	0,…	0
6	1			1,…	1
7	−12			2,…	2

En la función **a)** hay un trozo que es constante: damos el valor 1^-, porque es donde acaba el trozo. En realidad lo que hacemos es sustituir el valor 1 en la función $y = 4$. El trozo consecutivo es una función afín, luego necesitamos dos puntos, que serán su principio y su fin. El último es una función cuadrática que tiene su vértice en $x_V=\frac{-b}{2a}=0\notin(5,\infty)$, por lo que no podemos usarlo. Damos tres puntos, incluyendo donde empieza (5^+). Así, sustituimos 5 en la parábola para ver en qué punto comienza. La función es continua en $x = 4$ (termina y comienza en el mismo punto), pero no en $x = 5$, donde presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.

El valor absoluto se compone de dos rectas que empalman con continuidad en el origen de coordenadas (donde termina una empieza la otra). La función ***Ent(x)*** está formada por segmentos de longitud 1 y presenta un salto de longitud 1 cada vez que encuentra un número entero: todos los números del intervalo [0,1) son de la forma 0,… por lo que su parte entera vale 0 y justo salta a 1 cuando entramos en el intervalo [1,2), que son números de la forma 1,… por lo que su parte entera vale 1 y salta a valer 2 cuando entramos en el intervalo [2,3), y así sucesivamente. Es el ejemplo de **función escalonada** (mira el dibujo). Una **función escalonada** está compuesta de escalones que no son más que funciones constantes en ciertos intervalos. Observa que esta función va a tener tantos puntos de discontinuidad como números enteros hay, es decir, infinitos puntos de discontinuidad, aunque los saltos son finitos.



La función signo, definida como $f(x) = \begin{cases} -1, \text{ si } x < 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$ es otra función escalonada, aunque sólo tiene dos escalones y es discontinua en $x = 0$. Aparecen funciones escalonadas, por ejemplo, cuando nos cobran el teléfono por pasos de 1 minuto: vale lo mismo una llamada de 3 segundos que otra de 50 s y una de 3 min 10 s lo mismo que otra de 3 min 59 s.



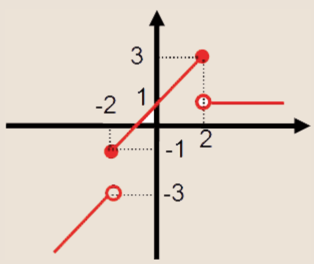
Ejemplos

12. Representa la función $f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ si } x < -2 \\ x+1, \text{ si } -2 \le x \le 2 \\ 1, \text{ si } x > 2 \end{cases}$.

Solución:

x	−5	−2	-2^-	2	2^+	5
y	−6	−3	−1	3	1	1

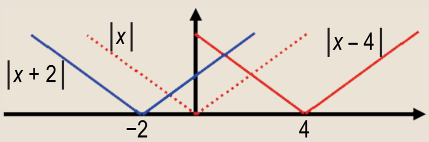
El primer trozo es una función afín (recta); el segundo también y el tercero es una función constante. Los valores -2^-, -2, 2, 2^+ son obligatorios, no así −5 y 5.



13. Representa las funciones $|x-4|$ y $|x+2|$.

Solución:

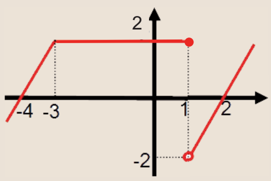
De acuerdo con la definición $|x-4| = \begin{cases} -(x-4), \textit{ si } x-4<0 \\ x-4, \textit{ si } x-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |x-4| = \begin{cases} -x+4, \textit{ si } x<4 \\ x-4, \textit{ si } x \geq 4 \end{cases}$ y $|x+2| = \begin{cases} -x-2, \textit{ si } x<-2 \\ x+2, \textit{ si } x \geq -2 \end{cases}$,



por lo que la gráfica de $|x|$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha ($x - 4 \Rightarrow x = 4$) y 2 unidades hacia la izquierda ($x + 2 \Rightarrow x = -2$), respectivamente, pasando a ser los vértices (4,0) y (−2,0).

14. Escribe la expresión matemática de la función *f* dada por la siguiente gráfica. ¿En qué puntos presenta *f* discontinuidades?

Solución:



En el intervalo (−∞, −3) tenemos una recta que pasa por (−4, 0) y (−3, 2), cuya ecuación es $y = 2x + 8$ (recuerda cómo hallamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos). En el intervalo [−3,1] la función es constante e igual a 2; la fórmula es $y = 2$. Fíjate que $x = -3$ podemos ponerlo tanto en el primero como en el segundo intervalo: por homogeneidad, como $x = 1$ está en el segundo trozo, se lo asignamos al segundo y no al tercero. En el intervalo (1, ∞) volvemos a tener una recta que pasa por (1, −2) y (2, 0) de ecuación $y = 2x - 4$. La función presenta una discontinuidad en $x = 1$.

La función será $f(x) = \begin{cases} 2x+8, \textit{ si } x<-3 \\ 2, \textit{ si } -3 \leq x \leq 1 \\ 2x-4, \textit{ si } x>1 \end{cases}$.

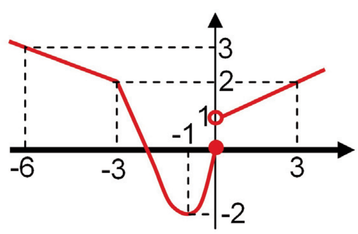
Actividades

17. Representa las funciones: **a)** $f(x) = |2x-4|$; **b)** $g(x) = |3x+3|$.

18. Representa las funciones: **a)** $y = |x|+4$; **b)** $y = |x-2|-5$.

19. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x, \textit{ si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0{,}5x^2+2, \textit{ si } 2<x<4 \\ 3x-2, \textit{ si } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$, represéntala y encuentra su dominio y su imagen.

20. Escribe la expresión matemática de la función *f* dada por la siguiente gráfica e indica en qué puntos presenta discontinuidades. Usa únicamente los valores que aparecen anotados en el gráfico.



6. Operaciones con funciones

Se puede sumar, restar, multiplicar, dividir y componer funciones. El resultado de cualquiera de estas operaciones es otra función. En este apartado estudiamos las cuatro primeras, pues en estos casos sólo se trata de aprender la notación que se usa habitualmente, y reservamos un apartado completo a la quinta.

Se llama **álgebra de funciones** al conjunto de las operaciones que podemos realizar con las funciones y a las reglas para efectuarlas.

6.1. Suma de funciones *f* + *g*

La suma de las funciones *f* y *g* se define como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in R$. Para sumar dos funciones sumamos los valores que toman las funciones en cada punto (ése es el significado del $\forall x$). La adición es una operación conmutativa $f+g = g+f$.

Ejemplo

15. Calcula $f+g$ para los siguientes pares de funciones:

a) $f(x)=4x-5,\ g(x)=x^2+7;$

b) $f(x)=\dfrac{3}{x},\ g(x)=x+1;$

c) $f(x)=x^3-5x+4,\ g(x)=5x^3-x^2-8x.$

Solución :

a) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=4x-5+x^2+7=x^2+4x+2;$

b) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{3}{x}+x+1=\dfrac{x^2+x+3}{x};$

c) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^3-5x+4+5x^3-x^2-8x=6x^3-x^2-13x+4.$

6.2. Resta de funciones *f* − *g*

La resta de las funciones *f* y *g* se define como $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in R$. Se resta punto a punto, cambiando el signo de todos los términos de la función que está restando y luego efectuando las operaciones pertinentes. Restar puede interpretarse como sumar la función opuesta (la opuesta de *g* es $-g$).

La diferencia no es conmutativa: $f-g \neq g-f$. Normalmente suma y resta se agrupan escribiendo $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $\forall x \in R$.

Ejemplo

16. Calcula $f-g$ para los pares de funciones del ejemplo **15**.

Solución :

a) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=4x-5-\left(x^2+7\right)=-x^2+4x-12;$

b) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{3}{x}-(x+1)=\dfrac{3}{x}-x-1=\dfrac{3-x-x^2}{x};$

c) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^3-5x+4-\left(5x^3-x^2-8x\right)=-4x^3+x^2+3x+4.$

La resta $(f-g)(x) = 0$ se interpreta como que al restarle ella misma a una función *f*, se obtiene la función constante $y = 0$ (no el número 0), porque el resultado de cualquier operación entre funciones es otra función, no un número.

6.3. Producto de funciones $f \cdot g$

El producto de las funciones f y g se define como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\forall x \in R$. Hay que multiplicar punto a punto. El producto de funciones sí es conmutativo $f \cdot g = g \cdot f$.

Ejemplo

17. Calcula $f \cdot g$ para los pares de funciones del ejemplo **15**.

Solución :

a) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (4x-5) \cdot (x^2+7) = 4x^3 - 5x^2 + 28x - 35;$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{3}{x} \cdot (x+1) = \dfrac{3(x+1)}{x};$

c) $(f \cdot g)(x) = (x^3 - 5x + 4)(5x^3 - x^2 - 8x) = 5x^6 - x^5 - 33x^4 + 25x^3 + 36x^2 - 32x.$

6.4. Cociente de funciones $\dfrac{f}{g}$

El cociente de las funciones f y g se define como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0, \forall x \in R.$ Como no se puede dividir por cero, deben excluirse de la definición aquellos puntos que hacen cero el denominador. La indicación $g(x) \neq 0$ se usa en las fórmulas, pero no en los cálculos; fíjate que sólo se trata de escribir el dominio de la función cociente.

Un caso particular de división de funciones es $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, $f(x) \neq 0$. La función $\dfrac{1}{f}$ se llama *inversa de f para el producto*, pues $\left(f \cdot \dfrac{1}{f}\right)(x) = f(x)\dfrac{1}{f(x)} = 1$ (el resultado no es el número 1, sino la función constante $y = 1$). Hay que tener cuidado con el nombre ya que habitualmente *inversa* es la obtenida a partir de la composición de funciones. El cociente de funciones tampoco es conmutativo: $\dfrac{f}{g} \neq \dfrac{g}{f}$.

Ejemplo

18. Calcula $\dfrac{f}{g}$ para los pares de funciones del ejemplo **15**.

Solución :

a) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{4x-5}{x^2+7}$; **b)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{3/x}{x+1} = \dfrac{3}{x(x+1)} = \dfrac{3}{x^2+x}$; **c)** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x^3-5x+4}{5x^3-x^2-8x}$.

Actividades

21. Calcula $f+g, f-g, f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ para los pares de funciones:

a) $f(x) = x+3,\ g(x) = 2x-1.$

b) $f(x) = 3x^2+8,\ g(x) = x^2+3.$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ g(x) = \dfrac{2}{x}.$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ g(x) = \dfrac{x}{2}.$

7. Composición de funciones $f \circ g$

La **composición** de dos funciones *f* y *g* se define como $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ y se lee ***g* compuesta con *f*** (se lee de derecha a izquierda y no de izquierda a derecha como es habitual).

La composición de funciones conduce a otra función que produce el mismo efecto que *g* y *f* actuando sucesivamente, pues la función de la derecha, en este caso *g*, es la variable independiente para la función de la izquierda, en este caso *f*. Es decir, en lugar de poner *x* en *f* hay que poner $g(x)$.

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))$$

Ejemplo

19. Calcula $f \circ g$ y $g \circ f$ para los siguientes pares de funciones:

a) $f(x) = x+3,\ g(x) = 2x-1$; **b)** $f(x) = 5x-4,\ g(x) = x^2+3$; **c)** $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{2}{x}$; **d)** $f(x) = \frac{x+1}{x-1},\ g(x) = \frac{1}{x}$.

Solución:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = (2x-1)+3 = 2x+2; (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+3) = 2(x+3)-1 = 2x+5.$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = 5(x^2+3)-4 = 5x^2+11; (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x-4) = (5x-4)^2+3 =$

$= 25x^2 - 40x + 16 + 3 = 25x^2 - 40x + 19.$

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2/x} = \frac{x}{2}; (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{1/x} = 2x.$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1/x + 1}{1/x - 1} = \frac{(1+x)/x}{(1-x)/x} = \frac{1+x}{1-x}; (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-1}{x+1}.$

Se observa claramente que, en general, la composición no es conmutativa $f \circ g \neq g \circ f$, ya que el orden de colocación de las funciones cambia completamente el resultado. Se pueden componer tantas funciones como se quiera, sin más que tener en cuenta el orden para efectuar las operaciones: se va de derecha a izquierda, cambiando en cada paso la variable independiente.

También es interesante descomponer funciones, es decir, dada una función compleja averiguar qué funciones más sencillas la componen. Esto nos facilitará el estudio de la **regla de la cadena** que veremos al tratar la derivada de funciones.

Ejemplos

20. Dadas $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ y $h(x) = -x$, calcula $f \circ g \circ h$, $g \circ f \circ h$ y $h \circ g \circ f$.

Solución:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(-x)) = f\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \frac{1}{\frac{-x+1}{-x-1}} = \frac{-x-1}{-x+1} = \frac{x+1}{x-1};$$

$$(g\circ f\circ h)(x)=g\left(f\left(h(x)\right)\right)=g\left(f(-x)\right)=g\left(\frac{-1}{x}\right)=\frac{\frac{-1}{x}+1}{\frac{-1}{x}-1}=\frac{-1+x}{-1-x}=\frac{1-x}{1+x};$$

$$(h\circ g\circ f)(x)=h\left(g\left(f(x)\right)\right)=h\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)=h\left(\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}\right)=h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=-\frac{1+x}{1-x}=\frac{x+1}{x-1}.$$

21. Dada $h(x) = (3x - 7)^2$ averigua dos funciones f y g tales que $(f\circ g)(x) = h(x)$.

Solución:

Para hallar f y g hay que averiguar, en la función a descomponer, el orden en el que deben realizarse las operaciones en ella especificadas: primero hay que multiplicar x por 3 y restarle 7; después elevamos el resultado al cuadrado. La primera operación es la primera función que actúa (la de la derecha, g) y la segunda operación es la función que actúa en segundo lugar tras haberlo hecho g (la de la izquierda, f). Así, $g(x) = 3x - 7$, $f(x) = x^2$. Comprobación: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 7) = (3x - 7)^2$.

22. Halla dos funciones f y g tales que $(f\circ g)(x)=\sqrt{\frac{x}{2x-1}}$.

Solución :

La primera operación es efectuar el cociente $\Rightarrow g(x)=\frac{x}{2x-1}$.

La segunda es sacar la raíz cuadrada $\Rightarrow f(x)=\sqrt{x}$.

Comprobación: $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\frac{x}{2x-1}\right)=\sqrt{\frac{x}{2x-1}}$.

23. Averigua dos funciones que verifiquen que $(f\circ g)(x)=\frac{7}{6x+2}$.

Solución :

La primera operación es multiplicar por 6 y sumar 2 $\Rightarrow g(x)=6x+2$.

La segunda operación es dividir 7 entre el resultado anterior $\Rightarrow f(x)=\frac{7}{x}$.

Comprobación $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f(6x+2)=\frac{7}{6x+2}$.

En las Actividades **24** y **25** que proponemos a continuación, encontraremos funciones para las que la composición sí es conmutativa, aunque dicha conmutatividad es un tanto especial, tan especial que nos conducirá al concepto de función inversa. No es una regla general, de ahí que digamos que la composición no es conmutativa.

Actividades

22. Dadas $f(x)=2-7x$ y $g(x)=1-x^2$, calcula $f\circ g$ y $g\circ f$.

23. Dadas $f(x)=\frac{1}{x+1}$ y $g(x)=\frac{x-1}{2}$, calcula $f\circ g$ y $g\circ f$.

24. Calcula $f\circ g$ y $g\circ f$ siendo $f(x)=\sqrt{x+1}$ y $g(x)=x^2-1$.

25. Halla $f\circ g$ y $g\circ f$ siendo $f(x)=\sqrt{3x+2}$ y $g(x)=\frac{x^2-2}{3}$.

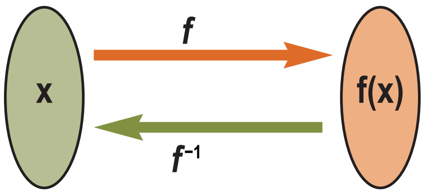
26. Averigua dos funciones que verifiquen que $(f\circ g)(x)=\sqrt{4-5x}$.

8. Funciones inversas

Las Actividades **24** y **25** muestran cómo al componer dos funciones el resultado ha sido el mismo que dejar las cosas como estaban. Dejar las cosas como estaban es la llamada función identidad, representada por $Id(x) = x$ (observa que esta función le asocia a cada número x el mismo número x). Es decir, se parte de la variable x y se vuelve a ella tras la acción de una y otra función, como si lo que hiciera una lo deshiciera la otra. Cuando esto ocurre, se dice que son funciones inversas una de la otra.

> Se dice que f^{-1} es la **función inversa** de f cuando $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.
>
> Simbólicamente $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$, siendo Id la **función identidad**.

También se verifica que $(f \circ Id)(x) = (Id \circ f)(x) = f(x)$, pues la función identidad es la única que conmuta con cualquier otra en la composición de funciones.



¿Cómo calcular la inversa de una función? En principio parece que hay dos maneras: o bien con $f \circ f^{-1} = Id$ o con $f^{-1} \circ f = Id$. En la primera forma se cambia x por $f^{-1}(x)$ en la definición de f y se opera; en la segunda hay que cambiar x por $f(x)$ en la definición de f^{-1}, pero esto es imposible, pues no conocemos la forma de f^{-1}. Por lo tanto, sólo tenemos una forma de calcularla. Habitualmente lo que se hace es cambiar x por y e y ó f por x en la fórmula de $f(x)$ y luego despejar y. Finalmente se cambia y por f^{-1}.

Ejemplos

24. Calcula la inversa de $f(x) = x + 1$.

Solución :

Usando f^{-1}: $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow f^{-1}(x) + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$.

Con el cambio: $\begin{cases} x \to y \\ f \to x \end{cases} \Rightarrow x = y + 1 \Rightarrow y = x - 1 \Rightarrow y = f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1$.

El cambio, aunque pueda ser más largo, se compensa con la claridad, pues escribir f^{-1} cuando hay exponentes dificulta la lectura del ejercicio. Como comprobación, se compone la función con su inversa, debiéndose obtener la función identidad: $(f \circ f^{-1})(x) = f(x-1) = (x-1) + 1 = x$ ó $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(x+1) = (x+1) - 1 = x$.

Conviene que hagas la comprobación de todos los ejemplos y actividades que vienen a continuación.

25. Halla la inversa de $f(x) = 3x - 2$.

Solución :

$$\begin{cases} x \to y \\ f \to x \end{cases} \Rightarrow x = 3y - 2 \Rightarrow 3y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}.$$

26. Halla la inversa de $y = \dfrac{2x+1}{x-5}$.

Solución:

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-5} \Rightarrow xy - 5x = 2y + 1 \Rightarrow xy - 2y = 5x + 1 \Rightarrow (x-2)y = 5x + 1 \Rightarrow y = \frac{5x+1}{x-2} \Rightarrow y^{-1}(x) = \frac{5x+1}{x-2}.$$

Observa que hay que sacar factor común y para poder despejarla.

27. Dada $f(x) = x^2 + 3$ halla $f^{-1}(x)$.

Solución:

$$\begin{cases} x \to y \\ f \to x \end{cases} \Rightarrow x = y^2 + 3 \Rightarrow y^2 = x - 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{x-3}.$$

Aquí aparece un problema característico de las raíces cuadradas: el doble signo de la raíz. Así, para un mismo valor de x tenemos dos posibles resultados: uno al coger la parte positiva de la raíz y otro al coger la parte negativa. Si se deja el doble signo, $f(x) = x^2 + 3$ no tiene función inversa porque $\pm\sqrt{x-3}$ no da una única imagen para x. Se resuelve el problema separando las partes positiva y negativa de la raíz como si fueran funciones independientes y escribiendo $f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-3} \\ f_2^{-1}(x) = -\sqrt{x-3} \end{cases}$.

28. Halla la inversa de $y = \dfrac{1}{x}$.

Solución :

$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} \Rightarrow y = \dfrac{1}{x} \Rightarrow y^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$. Curiosamente la inversa de esta función es ella misma, como le pasa a la función identidad $Id(x) = x$ (compruébalo).

29. Averigua la inversa de $y = x^2 - 3x - 1$.

Solución :

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = y^2 - 3y - 1 \Rightarrow y^2 - 3y - 1 - x = 0 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(-1-x)}}{2} \Rightarrow \begin{cases} y_1^{-1}(x) = \dfrac{3 - \sqrt{13+4x}}{2} \\ y_2^{-1}(x) = \dfrac{3 + \sqrt{13+4x}}{2} \end{cases}.$$

30. Dada $g(x) = \sqrt{\dfrac{4x}{3x+7}}$ halla $g^{-1}(x)$.

Solución :

$$\begin{cases} x \to y \\ g \to x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{4y}{3y+7}} \Rightarrow x^2 = \frac{4y}{3y+7} \Rightarrow 3x^2y + 7x = 4y \Rightarrow (3x^2 - 4)y = -7x \Rightarrow y = \frac{-7x}{3x^2-4} = \frac{7x}{4-3x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{7x}{4-3x^2}.$$

Actividades

27. Halla la inversa de $f(x) = 7x + 5$.

28. Dada $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x+7}{4}}$ calcula $f^{-1}(x)$.

29. Dada $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ averigua $f^{-1}(x)$.

30. Calcula la inversa de $g(x) = \dfrac{4x-3}{7x+5}$.

31. Halla la inversa de $h(x) = x^2 + 2x - 1$.

9. Función exponencial

Se llama **función exponencial** a la función $f(x) = e^x$ (la base es el número e).

Cualquier exponencial de la forma $f(x) = a^x$, $a > 0$, se escribe usando e como base: $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$. Por extensión, una función es exponencial cuando la variable independiente está en el exponente $f(x) = (x + 1)^{x-1}$. Verifica las siguientes propiedades:

i. $Dom\ e^x = R$, ya que siempre podemos elevar e a cualquier exponente.

ii. $e^x > 0, \forall x \in R$, pues al elevar un número positivo como e a cualquier exponente, el resultado siempre será positivo. Recuerda que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

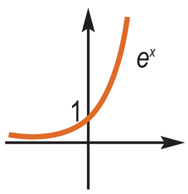
iii. Pasa por el punto (0, 1), porque $e^0 = 1$.

iv. $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$, es decir, $e^x \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} \infty$, pues crece indefinidamente.

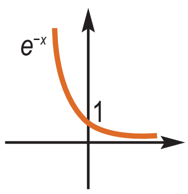
v. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, es decir, $e^x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$. Esto es debido a que $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ y a que $\dfrac{1}{\infty} = 0$.

Las dos últimas propiedades se ven en esta tabla construida con la calculadora:

x	−100	−50	−10	…	10	50	100
e^x	$3{,}72 \cdot 10^{-44}$	$1{,}93 \cdot 10^{-22}$	$4{,}54 \cdot 10^{-5}$	…	$2{,}20 \cdot 10^{4}$	$5{,}19 \cdot 10^{21}$	$2{,}69 \cdot 10^{43}$



Observa que $f(x) = e^x$ es una función que crece muy rápidamente, de ahí el uso de **crecimiento exponencial** para indicar un crecimiento desmesurado y rapidísimo. Su representación gráfica aparece a la izquierda. Todas las funciones de la forma a^x, con $a > 1$, responden al patrón de e^x.



La función e^{-x} es el patrón de aquellas de la forma a^x, con $0 < a < 1$, pues entonces $\ln a < 0$. Verifica las tres primeras propiedades anteriores, mientras que la cuarta y la quinta cambian entre sí, pasando a ser $\lim\limits_{x \to \infty} e^{-x} = 0$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$ (de una a otra función sólo cambia el signo del exponente, por lo que las propiedades cambiarán al cambiar el signo de la variable independiente).

La función exponencial aparece en aquellos fenómenos en los que hay una tasa de crecimiento o de decrecimiento constante, como:

- **Desintegración radioactiva**: $C(t) = C_0\, e^{-\lambda t}$, siendo C_0 la masa inicial, λ la constante de desintegración radioactiva y t el tiempo.

- **Evolución de una población**: $P(t) = P_0\, e^{kt} = P_0\, (1 \pm tc)^t$, siendo P_0 la población inicial (la población en un determinado instante); $k = \ln(1 \pm tc)$ (tc es la tasa de crecimiento en tanto por uno) y t el tiempo.

Ejemplos

31. El carbono 14, isótopo del carbono que se usa para la datación de restos arqueológicos, se desintegra de acuerdo con la función $C(t) = C_0\, e^{-0,000121t}$, t en años. ¿Cuántos años han de pasar para que la cantidad se reduzca a la mitad (período de semidesintegración)? ¿Qué porcentaje de la cantidad inicial quedará tras 10000 años?

Solución:

Para que se reduzca a la mitad tendremos:

$$\frac{1}{2}C_0 = C_0 \cdot e^{-0,000121t} \Rightarrow e^{-0,000121t} = \frac{1}{2} \overset{\textit{tomando ln}}{\Rightarrow} -0,000121t = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\ln\frac{1}{2}}{-0,000121} = 5728,49 \text{ años.}$$

Al cabo de 10000 años quedará: $C(t) = C_0\, e^{-0,000121\cdot 10000} = C_0 \cdot 0,2982 \approx 0,3 \cdot C_0$. Es decir, en 10000 años el carbono 14 queda reducido al 30% de la cantidad inicial.

32. Una ciudad tiene una tasa de crecimiento anual constante del 1,5%. Escribe la función de crecimiento y halla cuánto tiempo tardará en duplicarse la población.

Solución:

La función de crecimiento es $P(t) = P_0\, e^{t \ln 1,015} = P_0\, e^{0,015t}$. El tiempo que tarda en duplicarse la población será:

$$P_0 \cdot e^{0,015t} = 2P_0 \Rightarrow e^{0,015t} = 2 \overset{\textit{tomando ln}}{\Rightarrow} 0,015t = \ln 2 \Rightarrow t = 46,21 \text{ años.}$$

33. La concentración en la sangre de un fármaco en función del tiempo transcurrido desde su administración es $C(t) = C_0\, e^{-0,005t}$, donde C_0 es la concentración en el momento de la administración del fármaco y t el tiempo en minutos. ¿Qué concentración de fármaco habrá en la sangre pasadas dos horas desde su administración?

Solución:

2 horas = 120 minutos $\Rightarrow C(120) = C_0 e^{-0,005\cdot 120} = C_0 \cdot e^{-0,6} = 0,549C_0 \Rightarrow$ Al cabo de dos horas habrá un poco más de la mitad de la concentración inicial de fármaco.

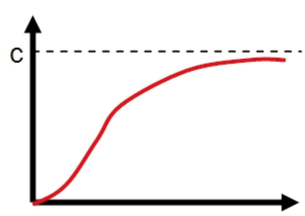
El crecimiento exponencial es tan fuerte que lo invalida para reflejar la evolución a largo plazo de una población o de otros fenómenos que se estabilizan tras un fuerte crecimiento inicial; éstos se ajustan mejor a una **función de crecimiento limitado**:

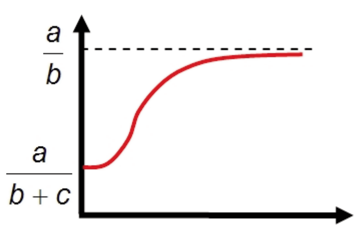
$$f(x) = c\left(1 - e^{-kx}\right),\ x \geq 0, c, k > 0.$$

$$f(x) = \frac{a}{b + ce^{-kx}}, x \geq 0, a, b, c, k > 0.$$

Ambas expresiones sirven para el propósito buscado. El valor inicial es $f(0)$ y el de equilibrio es $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, pues es hacia el que tiende la función.

En la primera, $f(0) = c(1-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$, mientras que en la segunda, $f(0) = \dfrac{a}{b+c}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$. Ambos resultados se obtienen porque $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-kx} = 0$.





10. Función logarítmica

Si la función exponencial es e^x, la **logarítmica**, que es su inversa, será el logaritmo neperiano $\ln x$. Recuerda que $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$, por lo que $x = e^{\ln x}$, que es la relación que usamos para escribir cualquier función exponencial $a^x = e^{x \ln a}$ usando como base e. Que son inversas se comprueba componiendo ambas funciones:

$$(\ln \circ e)(x) = \ln\left(e^x\right) = x \cdot \ln e = x \cdot 1 = x,\ (e \circ \ln)(x) = e(\ln x) = e^{\ln x} = x.$$

Las siguientes propiedades permiten representar la función logarítmica:

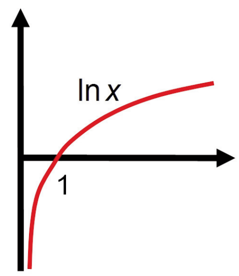
i. $Dom \ln x = R^+ = (0,\infty) \Rightarrow$ sólo tienen logaritmo los números positivos.

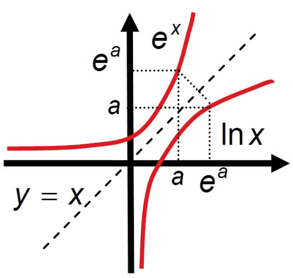
ii. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow$ asíntota vertical $x = 0 \Rightarrow$ no está acotada inferiormente.

iii. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty \Rightarrow$ No está acotada superiormente.

iv. $\ln 1 = 0 \Rightarrow$ pasa por el punto (1, 0).

v. El logaritmo es una función continua en todo su dominio.





El logaritmo es una función que crece muy lentamente, ya que es la inversa de la exponencial que lo hace muy rápidamente: gráficamente se trata de curvas simétricas respecto de la recta $y = x$, que es la función identidad. Esta lentitud lo convierte en la mejor herramienta para la medida de magnitudes que presentan un rango de variación enorme, como la escala de Richter para la medida de la magnitud de un terremoto o la medida del nivel de intensidad de un sonido (los belios y decibelios).

Ejemplos

34. Calcula la inversa de $y = e^{3x+1}$.

Solución :

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = e^{3y+1} \overset{\text{tomando } ln}{\Rightarrow} ln\,x = 3y + 1 \Rightarrow y = \frac{ln\,x - 1}{3} \Rightarrow y^{-1}(x) = \frac{ln\,x - 1}{3}.$$

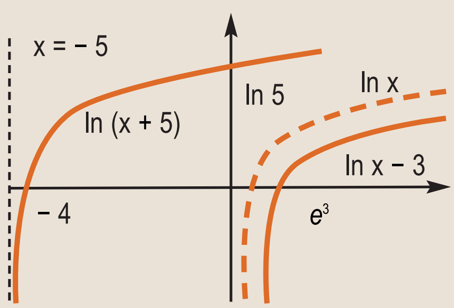
35. Calcula la inversa de $y = e^{\sqrt{4x+5}}$.

Solución :

$$\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases} \Rightarrow x = e^{\sqrt{4y+5}} \overset{\text{tomando } ln}{\Rightarrow} \sqrt{4y+5} = ln\,x \Rightarrow y = \frac{(ln\,x)^2 - 5}{4} \Rightarrow y^{-1}(x) = \frac{(ln\,x)^2 - 5}{4}.$$

36. Representa $y = ln(x-3)$ e $y = ln(x+5)$.

Solución :



$y = ln\,x - 3$: al restarle 3 a la ordenada sufre un desplazamiento vertical hacia abajo con respecto a $ln\,x$. El punto de corte de la función con el eje OX es: $y = 0 \Rightarrow ln\,x - 3 = 0 \Rightarrow x = e^3 \Rightarrow \left(e^3, 0\right)$, $e^3 \approx 20,09$. Sigue teniendo como asíntota vertical la recta $x = 0$.

$y = ln(x+5)$: al sumar 5 en el argumento sufre un desplazamiento horizontal hacia la izquierda con respecto a $ln\,x$. Corta al eje OX en $(-4,0)$, pues $ln(x+5) = 0 \Rightarrow x + 5 = 1 \Rightarrow x = -4$, y a OY en $(0, ln\,5)$, pues $f(0) = ln\,5$. Su asíntota vertical es la recta $x = -5$.

37. Halla la inversa de: **a)** $f(x)=\ln\left(\frac{3x-5}{7}\right)$; **b)** $g(x)=\ln\frac{x+5}{x-2}$.

Solución :

a) $\begin{cases} x\to y \\ f\to x \end{cases} \Rightarrow x=\ln\frac{3y-5}{7}\Rightarrow \frac{3y-5}{7}=e^x\Rightarrow 3y-5=7e^x\Rightarrow y=\frac{7e^x+5}{3}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{7e^x+5}{3}.$

b) $\begin{cases} x\to y \\ g\to x \end{cases} \Rightarrow x=\ln\frac{y+5}{y-2}\Rightarrow \frac{y+5}{y-2}=e^x\Rightarrow y+5=ye^x-2e^x\Rightarrow y-ye^x=-5-2e^x\Rightarrow ye^x-y=5+2e^x\Rightarrow$

$\Rightarrow (e^x-1)y=5+2e^x\Rightarrow y=\frac{5+2e^x}{e^x-1}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{5+2e^x}{e^x-1}.$

38. Halla la inversa de: **a)** $f(x)=e^{-x^2+5x}$; **b)** $g(x)=\ln\left(x^2-3x+7\right)$.

Solución :

a) $\begin{cases} x\to y \\ f\to x \end{cases} \Rightarrow x=e^{-y^2+5y}\overset{\text{tomando ln}}{\Rightarrow}\ln x=-y^2+5y\Rightarrow y^2-5y+\ln x=0\Rightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{25-4\ln x}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases} f_1^{-1}(x)=\frac{5-\sqrt{25-4\ln x}}{2} \\ f_2^{-1}(x)=\frac{5+\sqrt{25-4\ln x}}{2} \end{cases}.$

b) $\begin{cases} x\to y \\ g\to x \end{cases} \Rightarrow x=\ln\left(y^2-3y+7\right)\Rightarrow y^2-3y+7=e^x\Rightarrow y^2-3y+7-e^x=0\Rightarrow y=\frac{3\pm\sqrt{9-4\left(7-e^x\right)}}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\begin{cases} g_1^{-1}(x)=\frac{3-\sqrt{4e^x-19}}{2} \\ g_2^{-1}(x)=\frac{3+\sqrt{4e^x-19}}{2} \end{cases}.$

Actividades

32. Un jarrón antiguo contiene el 25 % del carbono 14 que contenía cuando se fabricó. Estima su antigüedad por el método del carbono 14, sabiendo que dicho elemento se desintegra de acuerdo con la fórmula $C(t) = C_0\, e^{-0{,}000121t}$, t en años.

33. La población de una ciudad en función del tiempo t, en años, a partir de 2000, viene dada por $P(t)=\frac{250\,000}{1+4\cdot e^{-0{,}15t}}$.

Averigua la población que tenía inicialmente, la que tenía en 2010 y la población alrededor de la cual se estabilizará.

34. La función $f(x) = 4000\left(1-e^{-0{,}05x}\right)$ proporciona la relación entre el número de veces que se emite un anuncio (x) y las ventas obtenidas (en miles de €). Calcula $f(10)$, $f(100)$, $f(200)$ y $f(500)$. ¿Es beneficioso emitir el anuncio más de 200 veces si se paga la misma cantidad cada vez que se emite?

35. Calcula la inversa de: **a)** $y=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; **b)** $f(x)=e^{x^2-4}$.

36. Calcula la inversa de: **a)** $f(x)=\ln\frac{3x+2}{4x-3}$; **b)** $g(x)=\ln\left(5x^2-2x\right)$.

11. Funciones simétricas

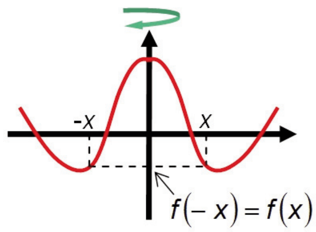
Cuando se trata de funciones se contemplan dos tipos de simetría:

Función par: f es par cuando $f(-x) = f(x)$.

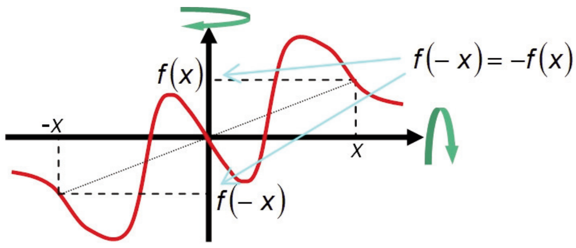
En este caso, f es simétrica respecto al eje OY. Gráficamente, al doblar respecto al eje OY la gráfica de f en la parte positiva del eje OX coincide con su gráfica en la parte negativa de dicho eje.

Función impar: f es impar cuando $f(-x) = -f(x)$.

Es simétrica respecto al origen de coordenadas. Ahora primero hay que doblar respecto a OY y después a OX para que la gráfica en la parte positiva coincida con la de la parte negativa del eje OX.



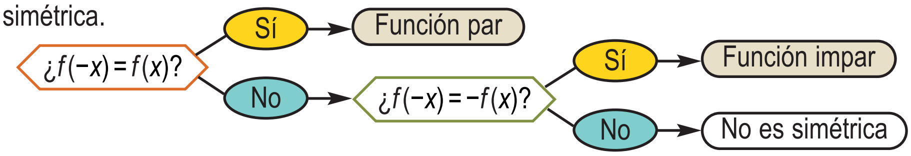
Función par



Función impar

Cuando una función es simétrica podemos extender las propiedades encontradas en la parte positiva del eje OX a la parte negativa y evitarnos ese trabajo. Normalmente no lo hacemos así, pero la simetría la usaremos como método de comprobación.

Para averiguar si una función es simétrica se cambia x por $-x$ en la función y después se mira si la función cambia o no de signo. Si no cambia de signo es par y si cambia es impar. Si no se da ninguno de estos casos, la función no es simétrica.



Ejemplo

39. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$; **b)** $g(x) = -2x^3 + 5x$; **c)** $y = x^2 - 7x$; **d)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$; **e)** $y = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Solución :

a) $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 5 = x^4 - 3x^2 + 5 \rightarrow ¿f(-x) = f(x)?$ Sí $\Rightarrow$ Función par, simétrica respecto del eje OY.

b) $g(-x) = -2(-x)^3 + 5(-x) = -2(-x^3) - 5x = 2x^3 - 5x \rightarrow ¿g(-x) = g(x)?$ No; $¿g(-x) = -g(x)?$ Sí $\Rightarrow$ Función impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

c) $y(-x) = (-x)^2 - 7(-x) = x^2 + 7x \rightarrow ¿y(-x) = y(x)?$ No; $¿y(-x) = -y(x)?$ No $\Rightarrow$ Función no simétrica.

d) $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x^3}{x^2-4} = -\dfrac{x^3}{x^2-4} \rightarrow ¿f(-x) = f(x)?$ No; $¿f(-x) = -f(x)?$ Sí $\Rightarrow$ Función impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

e) $y(-x) = \dfrac{-x+1}{-x-1} = \dfrac{x-1}{x+1} \rightarrow ¿y(-x) = y(x)?$ No; $¿y(-x) = -y(x)?$ No $\Rightarrow$ Función no simétrica.

Una función polinómica es par si sólo tiene potencias pares (**a)**), impar si sólo tiene potencias impares (**b)**) y no es simétrica si tiene mezcla de potencias (**c)**).

12. Funciones periódicas

Una función *f* es **periódica** cuando $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in R$.

El número *T* es el **período** e indica cuánto debe incrementarse *x* para que la función repita sus valores. Los ejemplos por excelencia son las funciones trigonométricas *senx*, *cosx* y *tgx*. Las dos primeras tienen por período 2π rad y la tercera π rad.

Mediante combinaciones de estas tres funciones se obtienen otras funciones también periódicas, como *sen*5*x*, cuyo período es $5T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{5}$ rad, o $3senx + tgx$, cuyo período es 2π rad, pues, al combinar linealmente funciones con distinto período, el período de la función resultante es igual al mínimo común múltiplo de esos períodos.

Ejemplo

40. Averigua el período de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \cos\frac{x}{6}$; **b)** $g(x) = tg\,7x$; **c)** $y = 3\cos\frac{x}{4} - 5tg\frac{x}{2}$; **d)** $y = 4sen2x + 5\cos 3x$; **e)** $y = |senx|$.

Solución:

a) $\frac{T}{6} = 2\pi \Rightarrow T = 12\pi$ rad; **b)** $7T = \pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{7}$ rad;

c) $\frac{T_1}{4} = 2\pi \Rightarrow T_1 = 8\pi$ rad, $\frac{T_2}{2} = \pi \Rightarrow T_2 = 2\pi$ rad $\Rightarrow mcm(8\pi, 2\pi) = 8\pi$ rad;

d) $2T_1 = 2\pi \Rightarrow T_1 = \pi$ rad, $3T_2 = 2\pi \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{3}$ rad $\Rightarrow mcm\left\{\pi, \frac{2\pi}{3}\right\} = 2\pi$rad.

El mínimo común múltiplo de dos fracciones es igual al mínimo común múltiplo de sus numeradores: si $m = mcm\left\{\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right\}$, al efectuar las divisiones $\frac{m}{a/b} = \frac{m \cdot b}{a}$, $\frac{m}{c/d} = \frac{m \cdot d}{c}$, los denominadores multiplican a m y quienes dividen son los numeradores, por lo que m sólo tiene que ser múltiplo de estos últimos.

e) El valor absoluto convierte la parte negativa en positiva y, como son idénticas, ahora sólo es necesario recorrer π rad para que se repitan los valores. Así, $T = \pi$ rad.

Actividades

37. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 4x^5 + 5x$; **b)** $y = 7x^3 - x^2 + x$; **c)** $g(x) = \frac{5x}{x+6}$; **d)** $y = \frac{5x}{x^2+6}$; **e)** $y = e^{-x^2}$.

38. Estudia la periodicidad de las siguientes funciones:

a) $y = \cos 7x$; **b)** $f(x) = 4sen5x + 2tg\frac{x}{4}$; **c)** $g(x) = 3sen9x - 5\cos 2x$.

39. Estudia la simetría de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{|x|}{x+1}$; **b)** $f(x) = \dfrac{|x|}{|x|+1}$; **c)** $g(x) = \left|\dfrac{x}{x+1}\right|$.

40. Estudia la periodicidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{sen 4x}{\cos 2x + tgx}$; **b)** $g(x) = |\cos x|$; **c)** $y = |tg\, x|$.

Recuerda

- ✓ Una **función real de variable real** $\begin{matrix} f: R \to R \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$ es una regla que permite transformar un número real en otro.
- ✓ La funciones se representan en un **sistema de ejes cartesianos** o sistema de ejes, formado por el **eje de abscisas** OX y el **eje de ordenadas** OY.
- ✓ El **dominio** de una función es el conjunto formado por todos los números que tienen imagen por dicha función: $Dom\, f = \{x \in R \,/\, \exists f(x)\}$.
- ✓ La **Imagen** es el conjunto de los números reales que provienen de un original o antecedente por la función: $\operatorname{Im} f = \{y \in R / \exists\ x \text{ que verifica } y = f(x)\}$.
- ✓ Atendiendo a la relación entre originales e imágenes una función puede ser **inyectiva**, **suprayectiva** o **biyectiva**.
- ✓ La **función cuadrática** $y = ax^2 + bx + c$ es un polinomio de segundo grado cuya representación gráfica se llama parábola.
- ✓ La **función inversa** $y = \dfrac{cx+d}{x-a}$ se representa atendiendo a sus funciones patrón $y = \dfrac{1}{x}$ e $y = -\dfrac{1}{x}$. Siempre tiene asíntota vertical y horizontal. Su gráfica se llama hipérbola.
- ✓ Una **función definida a trozos** es una función que responde a fórmulas distintas en intervalos distintos. Un ejemplo significativo es el **valor absoluto**. La **parte entera** y la **función signo** son ejemplos de **funciones escalonadas**, que son un tipo especial de funciones definidas a trozos.
- ✓ El **álgebra de funciones** es el conjunto de las operaciones que podemos realizar con las funciones y las reglas para efectuarlas:
  - Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in R$.
  - Resta: $(f-g)(x) = f(x) - g(x),\ \forall x \in R$.
  - Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ \forall x \in R$.
  - Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0,\ \forall x \in R$.
  - Composición: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
- ✓ f^{-1} es la **función inversa** de f y verifica que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$. Simbólicamente $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$.
- ✓ Id, definida como $Id(x) = x$, es la **función identidad** y verifica que $(f \circ Id)(x) = (Id \circ f)(x) = f(x)$, pues es la única que conmuta con cualquier otra en la composición de funciones.

- ✓ Se llama **función exponencial** a la función $f(x)=e^x$. Cualquier otra función de la forma $f(x)=a^x, a>0,$ puede escribirse usando como base el número e: $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$.
- ✓ La **función de crecimiento limitado** puede ser de la forma $f(x)=c\left(1-e^{-kx}\right),\ x\geq 0, c, k>0$, o también $f(x)=\dfrac{a}{b+ce^{-kx}}, x\geq 0, a, b, c, k>0$.
- ✓ La **función logarítmica**, inversa de la exponencial, es el logaritmo neperiano $\ln x$.
- ✓ Cuando se trata de funciones se contemplan dos tipos de **simetría**:
  - **Función par**: f es par cuando $f(-x)=f(x)$. En este caso, f es simétrica respecto al eje OY.
  - **Función impar**: f es impar cuando $f(-x)=-f(x)$. Es simétrica respecto al origen de coordenadas $O(0,0)$.
- ✓ Una función f es **periódica** cuando $f(x+T)=f(x), \forall x\in R$. El número T es el **período** e indica cuánto debe incrementarse x para que la función repita sus valores.

Para saber más...

Cuando se amplía el estudio de la trigonometría y el de las funciones, aparecen las denominadas razones trigonométricas hiperbólicas, a saber, el seno hiperbólico, el coseno hiperbólico y la tangente hiperbólica. Sus definiciones respectivas son:

$$sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \mathrm{tg}h\,x=\frac{sh\,x}{ch\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

Aunque parezcan definiciones extrañas, están muy relacionadas con las definiciones que en Análisis Matemático se dan para *sen x*, *cos x* y *tg x*. A partir de las definiciones se demuestra que:

- ✓ $ch^2x - sh^2x = 1$, pues

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}-\frac{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}{4}=\frac{4e^xe^{-x}}{4}=e^0=1.$$

- ✓ Sus funciones inversas son, respectivamente, *arc sh x*, *arc ch x* y *arc tgh x*. Usando las técnicas vistas en la función inversa se obtiene que

$$arc\,sh\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad arc\,ch\,x=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right),\quad arc\,tgh\,x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Como ejemplo aquí tienes el cálculo de la inversa de *sh x*:

$$\begin{cases} x\to y \\ sh\to x\end{cases}\Rightarrow x=\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{e^y-\frac{1}{e^y}}{2}=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\Rightarrow e^{2y}-1=2xe^y\Rightarrow e^{2y}-2xe^y-1=0.$$

Hacemos el cambio $z=e^y$; se obtiene la ecuación de segundo grado $z^2-2xz-1=0$, cuyas soluciones son $z=\dfrac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2+1}$. Al deshacer el cambio, como siempre ha de ser positivo, hay que desechar la solución $x-\sqrt{x^2+1}$. Tenemos entonces que $e^y=x+\sqrt{x^2+1}\overset{\text{tomando ln}}{\Rightarrow} y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, por lo que $arc\,sh\,x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Intenta demostrar las otras dos fórmulas para las inversas de *ch x* y tg*h x*.