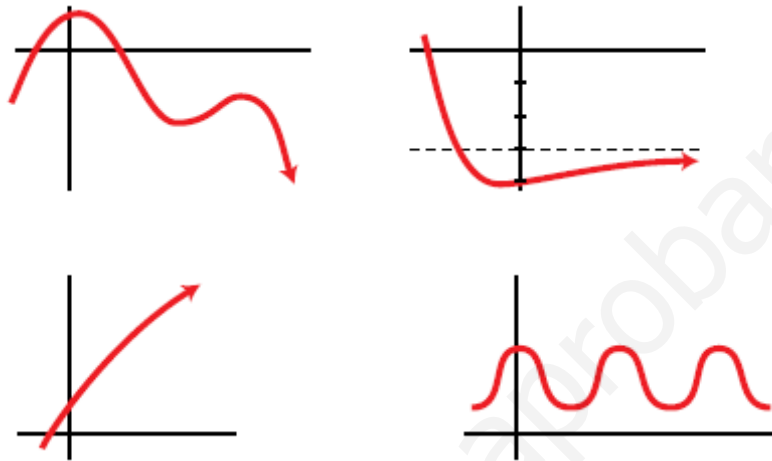


## Tema 5: Funciones, límites y Continuidad



- 0.- Introducción
- 1.- Definición de Función
  - 1.1.- Funciones elementales.
- 2.- Operaciones con funciones.
  - 2.1.- Composición de funciones.
  - 2.2.- Función inversa o recíproca
- 3.- Transformaciones de Funciones
- 4.- Límite de una función.
  - 4.1.- En un Punto.
  - 4.2.- En el Infinito.
- 5.- Límites indeterminados.
- 6.- Continuidad de una función en un punto.
- 7.- Continuidad de una función en un intervalo.
- 8.- Ejercicios Resueltos.

## 5.0.- Introducción

El concepto de función real de una variable real se remonta a unos 2000 años a.C., evolucionando en el tiempo desde una concepción puramente geométrica, en la que se considera que una función se identifica con una curva, hasta una concepción lógica, en la que se define función como una correspondencia entre conjuntos, pasando por una concepción algebraica, en la que una función se expresa mediante una fórmula, que en un principio (Euler, 1748) fue de tipo finito y más adelante (Fourier, 1822) se admitió que pudiera tener un número infinito de términos (la llamada "expresión analítica").

El concepto de función es uno de los más importantes no solo en matemáticas, sino en ingeniería y ciencias en general. La propiedad esencial que comparten todas las definiciones de función es que se trata de una regla que asigna a cada ente de un conjunto de partida un único ente de otro conjunto de llegada. Cuando no se plantea esta restricción, se dice que dicha regla es una relación o una correspondencia. Por ejemplo, la expresión  $f(x) = \pm\sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ con } x \geq 0$ , no define una función real de la variable real no negativa  $x$  porque asigna a cada número real  $x$ , no negativo, dos números reales,  $\sqrt{x}$  y  $-\sqrt{x}$ , mientras que la expresión  $f(x) = \sqrt{x}, \forall x \in \mathbb{R}, \text{ con } x \geq 0$ , si define una función real de la variable real no negativa  $x$ .

En este tema, además de definir los primeros conceptos relativos a las funciones reales de una variable real, repasando brevemente algunas de las funciones elementales con las que trabajaremos en este curso, introduciremos la idea de proximidad, definiendo una topología en la recta real.

## 5.1.- Definición de Función real de variable Real

Dados dos conjuntos numéricos A y B, una función de A a B es una ley que asigna a cada número del conjunto A uno y solo un número del conjunto B. La representaremos de la siguiente forma:

$$f : A \rightarrow B \quad \text{ó} \quad f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \quad \text{ó} \quad x \mapsto f(x)$$

**Ejemplo 1:**  $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$   
 $f(x) = 3x$

donde  $x$  es la variable independiente y  $f(x)$  es la variable dependiente. Si el conjunto B es el cuerpo de los números reales,  $\mathbb{R}$ , decimos que la función es una función real de variable real.

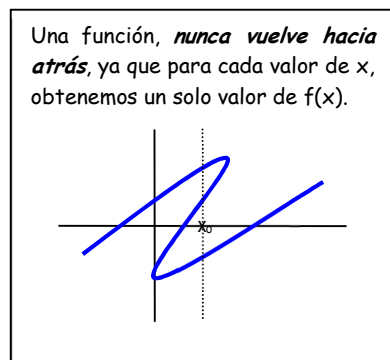
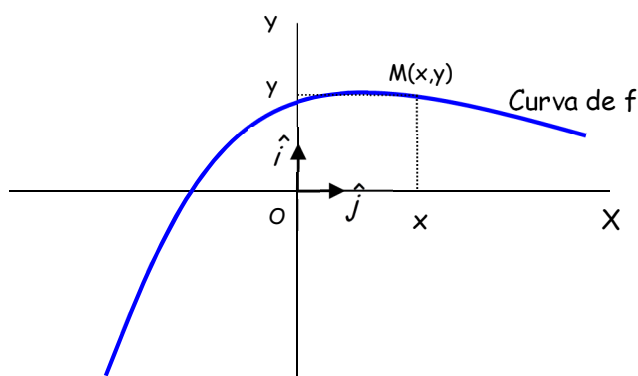
Al conjunto A se le llama conjunto de definición de  $f$  o **dominio**,  $Dom(f)$ , y son los valores de la variable independiente,  $x$ , para los que existe valor de la variable dependiente,  $f(x)$ , (la función está definida).

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}$$

Se llama **recorrido** de una función  $f$  o imagen de  $f$ ,  $Im(f)$ , al conjunto de valores que toma la variable dependiente  $f(x)$ .

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x), x \in Dom(f)\}$$

Respecto a un sistema de referencia  $(O, \hat{i}, \hat{j})$  del plano, el conjunto de puntos  $M(x,y)$  del plano tales que  $x \in A, y = f(x)$ , se llama gráfica o curva de la función  $f$ .



- La función  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está **acotada superiormente**, si  $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \leq c$ . A los números  $c$  que cumplen esta propiedad se les llama mayorantes o cotas superiores de  $f$ .
- La función  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  está **acotada inferiormente**, si  $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \geq c$ . A los números  $c$  que cumplen esta propiedad se les llama minorantes o cotas inferiores de  $f$ .

Se dice que  $f$  está **acotada** si existen cotas superiores e inferiores, ó  $\exists P \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in A, |f(x)| \leq P$

**Ejemplo 2:** Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$

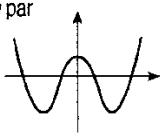
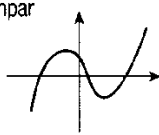
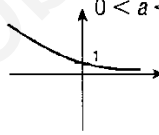
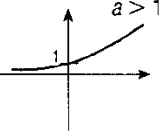
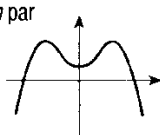
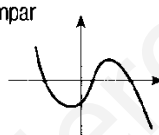
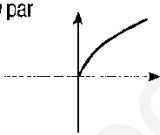
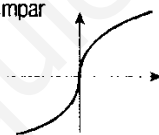
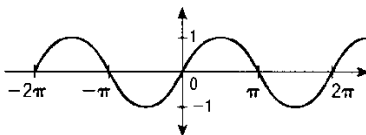
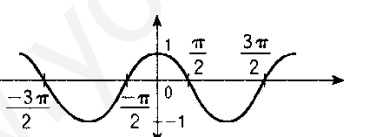
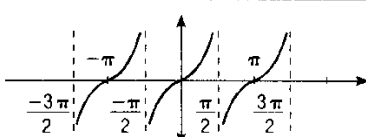
- Si  $A = [0, 2]$ , la función está acotada superiormente:  $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) \leq 4$ , y además, la función está acotada inferiormente ya que  $\forall x \in A, \exists c \in \mathbb{R} / f(x) > -7$

Por tanto la función es Acotada, por estar acotada superior e inferiormente.

- Si  $A = \mathbb{R}$ , la función no está acotada superiormente ya que cualquiera que sea el número real  $M$ , siempre existe un  $x$  tal que  $f(x) = x^2 \geq M$ . Esta función si está acotada inferiormente porque  $\forall x \in A, f(x) \geq 0$ .

Por tanto la función no es acotada porque no tiene cotas superiores.

### 5.1.1.- Funciones elementales de una variable real.

MODELO	GRÁFICA	MODELO	GRÁFICA
Polinómica	$a_n > 0$ $n$ par  $n$ impar 	Exponencial	$0 < a < 1$  $a > 1$ 
	$a_n < 0$ $n$ par  $n$ impar 		Logarítmica
Irracional	$n$ par  $n$ impar 	sen x	
cos x		tg x	

- **Funciones Polinómicas**, son de la forma  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  y su dominio es  $\mathbb{R}$ .
- **Funciones Racionales**, son de la forma  $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$  su dominio es  $\mathbb{R}$  menos los valores que anulan el denominador.
- **Funciones Irracionales**, son del tipo  $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ , siendo su dominio:
  - El mismo que el de  $g(x)$  si  $n$  es impar
  - El conjunto de valores reales que hagan  $g(x) \geq 0$  si  $n$  es par
- **Funciones exponenciales**, son de la forma  $f(x) = a^{g(x)}$ , con  $a > 0$  y  $a \neq 1$ , su dominio es el mismo que el de  $g(x)$
- **Funciones logarítmicas**, son de la forma  $f(x) = \log_a g(x)$ , con  $a > 0$ . Su dominio son los valores de  $x$ , que hacen  $g(x) > 0$ .
- **Funciones circulares:**  $f(x) = \text{sen } x, f(x) = \text{cos } x$ , su dominio es  $\mathbb{R}$ .

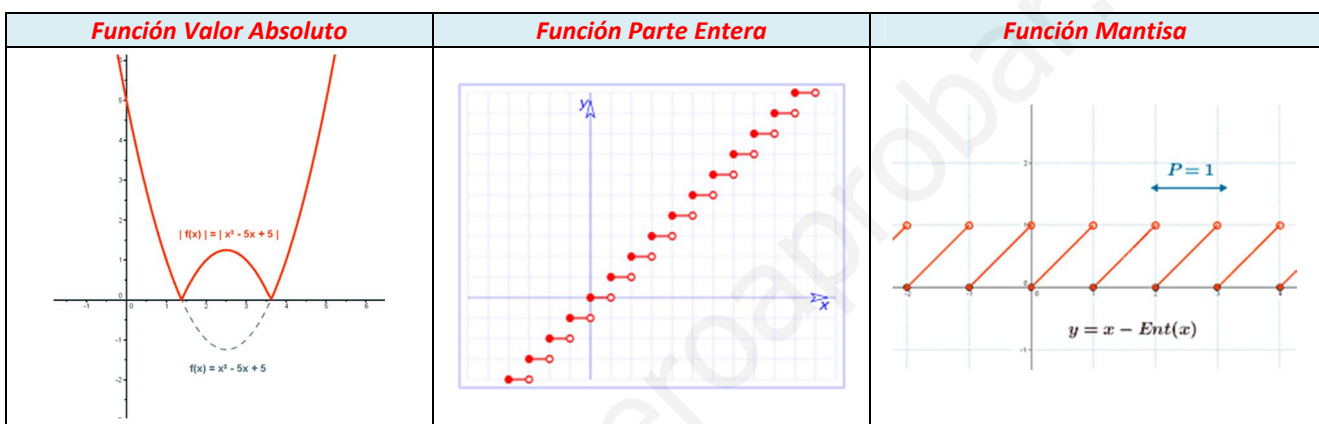
A partir de estas dos, podemos definir el resto de funciones circulares:

$$tg(x) = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}, \quad \text{sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}x} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$ctg(x) = \frac{\text{cos}x}{\text{sen}x}, \quad \text{cosec}(x) = \frac{1}{\text{sen}x} \text{ sus dominios son } \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

- **Función Valor Absoluto:**  $f(x) = |x| = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- **Función Parte entera E[x]:** Es una función que hace corresponder a cada número real, el número entero inmediatamente inferior.
- **Función mantisa:** Función que hace corresponder a cada número el mismo número menos su parte entera.

$$f(x) = x - E(x)$$

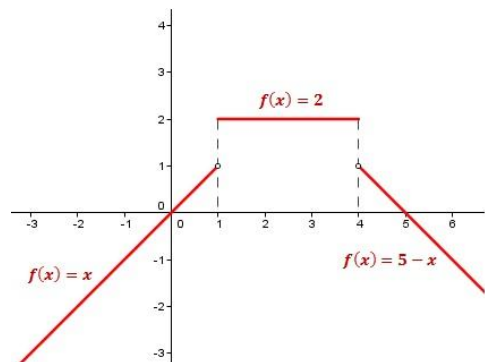


### 5.1.1.1.- Funciones definidas a trozos:

Decimos que una función está definida a trozos si su expresión algebraica depende del intervalo en el que se encuentre el número real cuya imagen se quiere calcular. A cada trozo llamaremos *rama de la función*.

**Ejemplo 3:**  $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Si la representamos, dibujo de la derecha, observamos que la función está compuesta por tres ramas.



### 5.2.- Operaciones con funciones

Sean  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dos funciones de variable real, las distintas operaciones con funciones, las podemos resumir en la siguiente tabla:

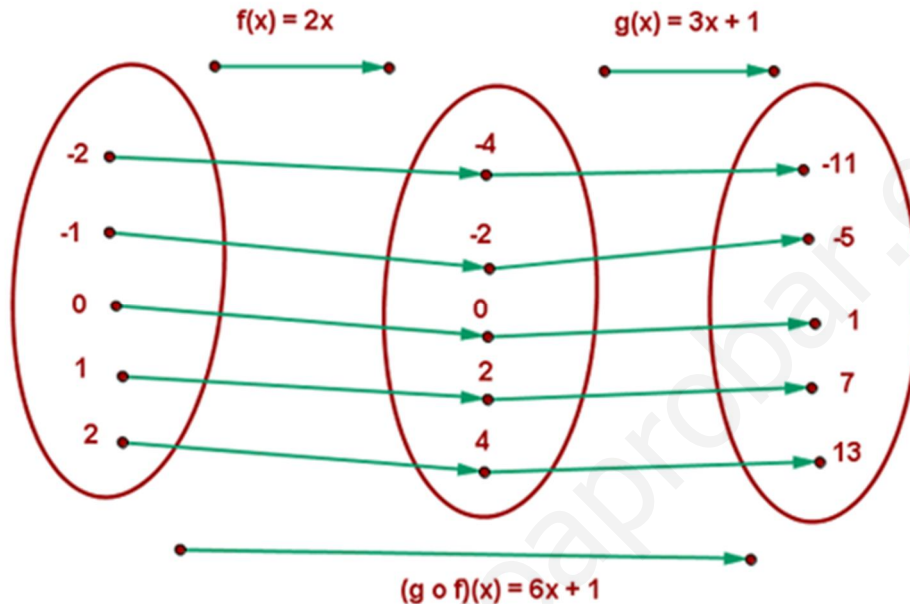
Operación	Notación	Operación	Notación
<b>Suma</b>	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	<b>Producto</b>	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x) \quad \forall k \in \mathbb{R}$
<b>Diferencia</b>	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	<b>Cociente</b>	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

**5.2.1.- Composición de Funciones**

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones, de modo que el dominio de la segunda esté incluido en el recorrido de la primera, se puede definir una nueva función que asocie a cada elemento del dominio de  $f(x)$  el valor de  $g[f(x)]$ , en otras palabras, componer dos funciones, es aplicar el resultado de una de ellas a la otra.

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] : g \text{ compuesta con } f \qquad (g \circ f)(x) = g[f(x)] : f \text{ compuesta con } g$$

Veamos un ejemplo con las funciones  $f(x) = 2x$  y  $g(x) = 3x + 1$ .



**Ejemplo 4:** Sean  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  y  $g(x) = x^2 - 1$ , calcula la composición de  $f$  con  $g$  y la de  $g$  con  $f$ .

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)^2 - 1] = \left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - 1 = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} \qquad (f \circ g)(x) = f[g(x)] = \frac{1}{g(x)-1} = \frac{1}{x^2-1-1} = \frac{1}{x^2-2}$$

**5.2.2.- Inversa de una función**

Dada una función  $f$ , se define su **inversa** de  $f$  o **recíproca** de la función  $f$ , y la representaremos por  $f^{-1}$ , a la función que verifica:

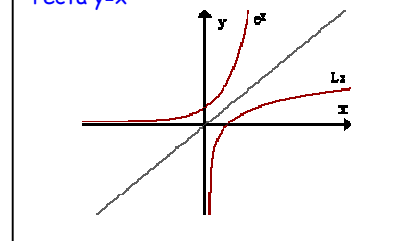
$$\text{Si } f(a) = b, \text{ entonces } f^{-1}(b) = a$$

Y que además cumple:

- El dominio de  $f^{-1}$  es el recorrido de  $f$ .
- El recorrido de  $f^{-1}$  es el dominio de  $f$ .
- Si queremos hallar el recorrido de una función tenemos que hallar el dominio de su función inversa.
- Si dos **funciones** son **inversas** su **composición** es la **función identidad**.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x.$$

Gráficamente, una función y su inversa son simétricas respecto de la recta  $y=x$



**Ejemplo 5:** Sean  $f(x) = 2^x$  y su función inversa:  $f^{-1}(x) = \log_2(x)$ , comprueba que realmente son funciones inversas.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = f[\log_2 x] = 2^{\log_2 x} = x \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(2^x) = \log_2 2^x = x \cdot \log_2 2 = x$$

Es importante que se distinga bien entre la inversa de una función,  $\frac{1}{f(x)}$ , y la función inversa  $f^{-1}(x)$ .

**5.2.2.1.- Cálculo de la función inversa o recíproca:**

Dada una función  $f(x)$ , para calcular su inversa, seguiremos los siguientes pasos:

- ✓ Se escribe la ecuación de la función con  $x$  e  $y$ .
- ✓ Se despeja la variable  $x$  en función de la variable  $y$ .
- ✓ Se intercambian las variables.

**Ejemplo 6:** Calcula la función inversa de  $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ .

Primero, escribimos la función con las variables  $x$  e  $y$ :  $y = \frac{2x+3}{x-2}$

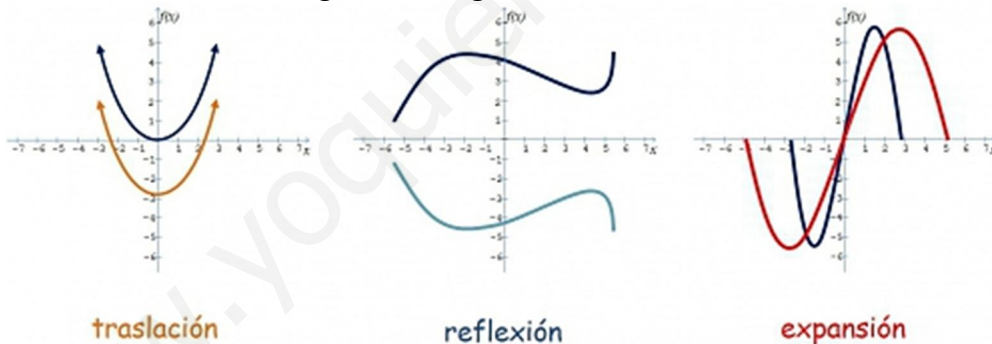
Segundo despejamos  $x$  en función de  $y$ :  $y = \frac{2x+3}{x-2} \rightarrow y(x-2) = 2x+3 \rightarrow yx - 2y = 2x+3 \rightarrow yx - 2x = 2y+3$

$$x(y-2) = 2y+3 \rightarrow x = \frac{2y+3}{y-2}$$

Tercero, intercambiamos las variables:  $y = \frac{2x+3}{x-2}$

**5.3.- Transformaciones de funciones**

Como hemos visto en cursos anteriores, conocida la gráfica de una función, podemos trazar la gráfica de otra similar utilizando técnicas aplicadas a los modelos gráficos de cada función llamadas **transformaciones**. Estas transformaciones afectan la forma general de la gráfica de cada función.

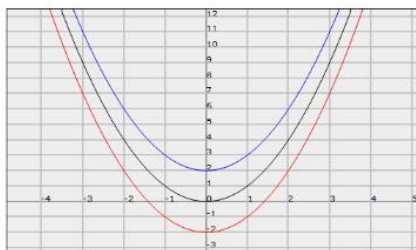


**Tabla Resumen de Transformaciones de Funciones**

Si sumamos o restamos una constante  $k \in \mathbb{R}$  a una función  $f$ , su gráfica se desplaza verticalmente.

- Si  $k > 0$  hacia arriba
- Si  $k < 0$ , hacia abajo

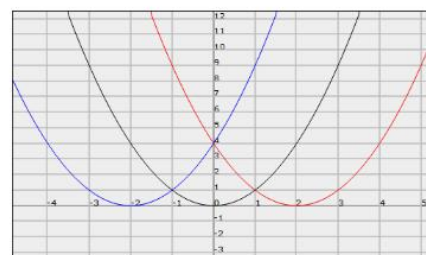
$x^2$   
 $x^2 - 2$   
 $x^2 + 2$

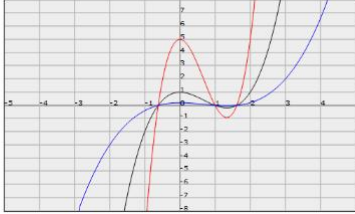
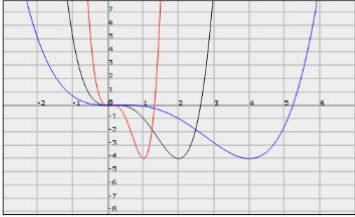
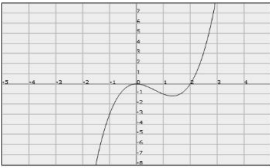
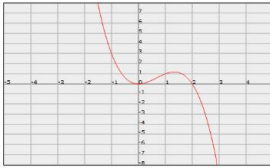
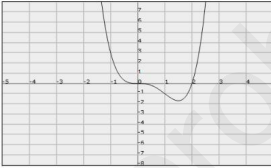
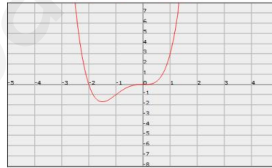
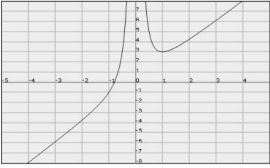
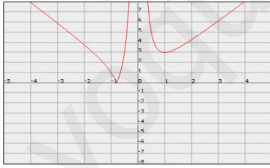
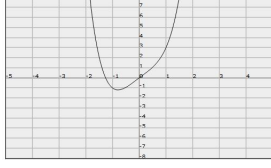
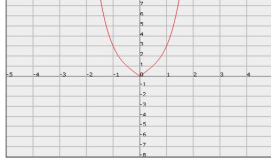


Si esa constante se añade o se quita a la variable independiente  $x$ , su gráfica se desplaza horizontalmente.

- Si  $k > 0$  hacia la izquierda
- Si  $k < 0$  hacia la derecha.

$x^2$   
 $(x - 2)^2$   
 $(x + 2)^2$



<p>Si multiplicamos la función por una constante <math>k \in \mathbb{R}^*</math>, su gráfica se comprime o estira verticalmente.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>k &gt; 1</math> la función se estira</li> <li>• Si <math>k &lt; 1</math>, la función se comprime</li> </ul> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">x^3 - 2x^2 + 1</math> <math display="block">5(x^3 - 2x^2 + 1)</math> <math display="block">\frac{1}{5}(x^3 - 2x^2 + 1)</math> </div>  </div> <p><b>Al multiplicar una función por una constante, los puntos de corte con el eje de abscisas no cambian.</b></p>	<p>Si multiplicamos la variable independiente por una constante, la función se estira o se comprime horizontalmente.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>k &gt; 1</math> la función se estira</li> <li>• Si <math>k &lt; 1</math>, la función se comprime</li> </ul> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <math display="block">x^4 - 3x^3 + x^2</math> <math display="block">(2x)^4 - 3(2x)^3 + (2x)^2</math> <math display="block">\left(\frac{1}{2}x\right)^4 - 3\left(\frac{1}{2}x\right)^3 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2</math> </div>  </div>
<p>Si multiplicamos la función por un número negativo, se produce una reflexión con respecto al eje X.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>x^3 - 2x^2</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>-(x^3 - 2x^2)</math>  </div> </div> <p><b>Multiplicar una función por un número negativo, convierte todos los puntos (x,y) del gráfico en (x,-y)</b></p>	<p>Si multiplicamos la variable independiente por un número negativo, se produce una reflexión con respecto al eje Y.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>x^4 - 2x^3</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>(-x)^4 - 2(-x)^3</math>  </div> </div> <p><b>Multiplicar la variable independiente por un número negativo, convierte todos los puntos (x,y) del gráfico en (-x,y)</b></p>
<p>Hacer el valor absoluto de una función, mueve todos los puntos que están por debajo del eje x a posiciones por encima del eje x.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>\frac{1}{x^2} + 2x</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math>\left \frac{1}{x^2} + 2x\right </math>  </div> </div>	<p>Hacer el valor absoluto de la variable independiente, hace que la parte izquierda de la gráfica sea igual que la parte derecha.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <math>x^4 + 2x</math>  </div> <div style="text-align: center;"> <math> x ^4 + 2 x </math>  </div> </div>

## 5.4.- Límites

Hasta ahora, en cursos anteriores hablamos de tendencias de una función, ahora utilizaremos límites.

### 5.4.1.- Límite de una función en un punto

El límite, L, de una función  $f(x)$  en el punto  $x_0$  es el valor al que se aproxima  $f(x)$  cuando la variable independiente  $x$  se aproxima al valor  $x_0$ . Lo representaremos por  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

$x \rightarrow a$  se lee "x tiende al valor a" y significa que x toma valores muy próximos al valor a.

Una forma rápida de calcular este límite es sustituir directamente x por el valor  $x_0$ .

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)}$$

**Ejemplo 7:** Sea  $f(x) = 3x$ , calcular el límite de  $f(x)$  en el punto  $x_0 = 2$

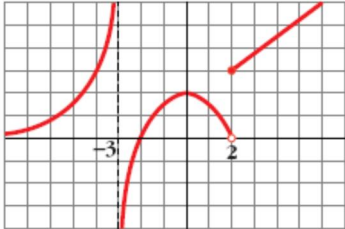
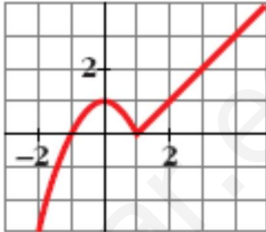
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3x = f(2) = 6$$



**5.4.1.1.- Límites Laterales finitos de una función:**

- Llamamos **límite por la izquierda** de una función, y lo representaremos por  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$  al valor que toma  $f(x)$  cuando nos acercamos al número  $x=a$  por números menores que a (por la izquierda).
- Llamamos **límite por la derecha** de una función, y lo representaremos por  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$  al valor que toma  $f(x)$  cuando nos acercamos al número  $x=a$  por números mayores que a (por la derecha).

Veamos con algunos ejemplos gráficos:

	
<p>Al acercarnos a <math>x=2</math> por la izquierda, la función se acerca a <math>y=0</math>, por tanto <math>\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0</math></p> <p>Al Acercarnos a <math>x=2</math> por la derecha, la función se acerca a <math>y=3</math>, por tanto <math>\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3</math></p>	<p>Al acercarnos a <math>x=1</math> por la izquierda, la función se acerca a <math>y=0</math>, por tanto <math>\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0</math></p> <p>Al Acercarnos a <math>x=2</math> por la derecha, la función se acerca a <math>y=0</math>, por tanto <math>\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0</math></p>

En el primer caso los límites laterales en el valor de  $x=2$  son distintos, mientras que en el segundo ejemplo los límites laterales en el valor de  $x = 1$  coinciden (valen cero).

Si una función está definida a trozos, se dice que  $f$  tiene límite en un punto  $x_0$  si existen los límites laterales y estos coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

Si los límites laterales toman distinto valor en  $x = x_0$  se dice que no existe el límite de  $f(x)$  en  $x = x_0$ .

Así que en la función de la derecha no existe el límite en  $x=2$ , mientras que en la función de la izquierda si existe el límite en  $x=1$ .

**Ejemplo 8:** Sea  $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Calcula el límite de  $f(x)$  en el punto  $x_0=0$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1 \end{aligned} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Álgebra de límites finitos**

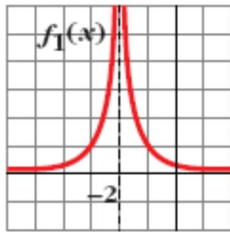
Si existen  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , se cumplen las siguientes relaciones:

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b + c$
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} [\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lambda \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = a \cdot b$
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}$
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{f(x)} \right] = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{0} = \pm\infty$
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$



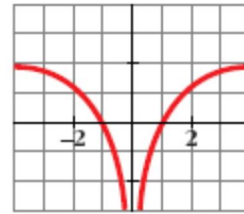
**5.4.1.2.- Límites Laterales No finitos de una función:**

- Se dice que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  si cuando  $x$  toma valores próximos a  $a$ , por su izquierda,  $f(x)$  toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que este sea.
- Se dice que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  si cuando  $x$  toma valores próximos a  $a$ , por su derecha,  $f(x)$  toma valores cada vez mayores, llegando a superar a cualquier valor, por muy grande que este sea.



En esta gráfica de la función  $f_1(x)$  vemos que se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_1(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f_1(x) = +\infty$$



En esta gráfica de la función  $f(x)$  vemos que se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

- Se dice que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  si cuando  $x$  toma valores próximos a  $a$ , por su izquierda,  $f(x)$  toma valores cada vez “más negativos” (o sea, más pequeños).
- Se dice que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  si cuando  $x$  toma valores próximos a  $a$ , por su derecha,  $f(x)$  toma valores cada vez “más negativos” (o sea, más pequeños).

Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  entonces:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$   
 Si  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  entonces:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Si los límites laterales toman distinto valor en  $x = a$  se dice que no existe el límite de  $f(x)$  en  $x = a$ .

**Álgebra de límites infinitos**

- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  (Si el resultado no es  $\infty - \infty$ )
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} [\lambda \cdot f(x)] = \lambda \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  (Si el resultado no es  $0 \cdot \infty$ )
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  (Si el resultado no es  $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ )
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} \left[ \frac{1}{f(x)} \right] = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \frac{1}{0} = \pm\infty$
- Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  (Si no resulta  $\infty^0, 1^\infty, 0^0$ )

**Ejemplos 9:** Calcula los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 6}{5x - 1} = \frac{4 - 6 + 6}{9} = \frac{4}{9}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt[3]{x + 4} = \sqrt[3]{4 + 4} = \sqrt[3]{8} = 2$     c)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\text{Sen} 2x + \text{Cos} 2x) = \text{sen} \pi + \text{cos} \pi = 0 - 1 = -1$

d)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6}{x - 1} = \frac{7}{0}$  → hemos de hacer los límites laterales     $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 6}{x - 1} = \frac{7}{0^+} = +\infty$      $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 6}{x - 1} = \frac{7}{0^-} = -\infty$

Por tanto en este último caso, como los límites laterales no coinciden, la función no tiene límite cuando  $x \rightarrow 1$

**5.4.1.3.- Cálculo de límites**

A la hora de sumar números e infinitos es importante tener en cuenta la siguiente tabla:

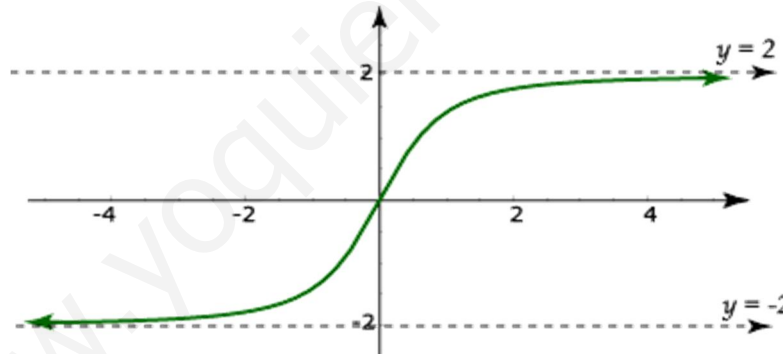
Sumas	Productos	Cocientes	Potencias
$(+\infty) + (l) = (+\infty)$ $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)$ $(-\infty) + (l) = (-\infty)$ $(-\infty) + (-\infty) = (-\infty)$ $-(-\infty) = (+\infty)$	$(+\infty) \cdot (l) = \begin{cases} (+\infty) & \text{si } l > 0 \\ (-\infty) & \text{si } l < 0 \end{cases}$ $(+\infty) \cdot (+\infty) = (+\infty)$ $(-\infty) \cdot (l) = \begin{cases} (+\infty) & \text{si } l < 0 \\ (-\infty) & \text{si } l > 0 \end{cases}$	$\frac{(l)}{(\pm\infty)} = 0$ $\frac{(l)}{(0)} = (\pm\infty) \text{ si } l \neq 0$ $\frac{(\pm\infty)}{0} = (\pm\infty)$ $\frac{(0)}{(\pm\infty)} = (0)$	$(+\infty)^{(+\infty)} = (+\infty)$ $(+\infty)^{(-\infty)} = (0)$ $(+\infty)^{(l)} = (+\infty) \text{ si } l > 0$ $(+\infty)^{(l)} = (0) \text{ si } l < 0$ $(1)^{(0)} = 1 \text{ si } l \neq 0$ Si $l > 1$ $\begin{cases} (1)^{(+\infty)} = (+\infty) \\ (1)^{(-\infty)} = (0) \end{cases}$ Si $0 < l < 1$ $\begin{cases} (1)^{(+\infty)} = (0) \\ (1)^{(-\infty)} = (+\infty) \end{cases}$

**5.4.1.- Límites en el infinito**

Cuando  $x \rightarrow \infty$ , una función puede comportarse de diversas maneras:  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty \end{cases}$

**5.4.2.1.- Límite finito**

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$  Podemos conseguir que  $f(x)$  esté tan próximo de  $l$  como queramos, agrandando  $x$ .



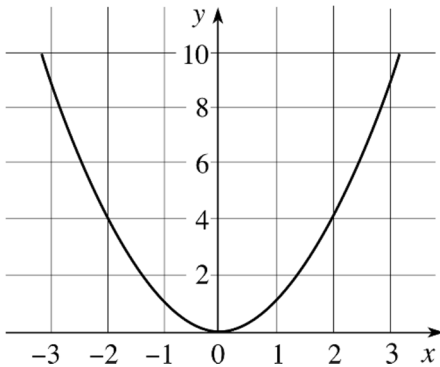
Se observa que cuanto más grande es  $x$ , más nos acercamos al valor  $y=2$ , y cuanto “más negativo” es  $x$ , más nos acercamos al valor  $y=-2$

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$  y  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = b$ , se cumplen las siguientes relaciones:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a + b$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a - b$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = a \cdot b$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{a}{b}$  Si  $b \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{g(x)} = \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = a^b$  Si  $f(x) > 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)} = \sqrt[n]{a}$  Si  $n$  es impar ó  $n$  es par pero  $f(x) \geq 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log_b f(x)] = \log_b [\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = \log_b a$  Si  $b > 0$  y  $f(x) > 0$ .

**5.4.2.2.- Límite infinito**

Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ , podemos conseguir que  $f(x)$  sea tan grande ó tan “negativa” como queramos simplemente con hacer  $x$  lo suficientemente grande.



En el ejemplo de la derecha,  $y=x^2$ , vemos que cuanto más grande es  $x$ , más grande es  $y$ , por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Y de igual modo, cuanto más “negativo” es  $x$ , más grande es la  $y$ , por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

**5.4.2.3.- Funciones equivalentes en un punto**

Se dice que las funciones  $f$  y  $g$  son equivalentes en un punto  $a$  ( $a$  finito,  $+\infty, -\infty$ ), si:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Si en una expresión figura como factor o divisor una función, el límite no varía al sustituir dicha función por otra equivalente.

$x \rightarrow 0$	
Sen $x$	$X$
tg $x$	$X$
Arcsen $x$	$X$
Arctg $X$	$X$
$1 - \cos X$	$X^2/2$
$e^x - 1$	$X$
$\ln(1 + x)$	$X$
$x \rightarrow 1$	
$\ln(x)$	$X - 1$
Sen $(X - 1)$	$X - 1$

**5.4.2.4.- Cociente de polinomios**

Cuando calculamos el límite de una función racional, o de un cociente de polinomios, es importante saber que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^p + a'x^{p-1} + \dots}{bx^q + b'x^{q-1} + \dots} = \begin{cases} \pm\infty & \text{Si } p > q \\ 0 & \text{Si } p < q \\ \frac{a}{b} & \text{Si } p = q \end{cases}$$

**5.5.- Límites indeterminados**

Existen 7 tipos de indeterminaciones:  $\infty - \infty$   $\frac{0}{0}$   $\frac{\infty}{\infty}$   $0^0$   $(\pm\infty) \cdot 0$   $1^\infty$   $\infty^0$

Vamos a explicar cómo se resuelven algunas de ellas:

**5.5.1.- Tipo  $\infty - \infty$**

La forma de resolverla es efectuar la operación y estudiar la expresión resultante. Si aparecen raíces, utilizaremos el conjugado.

**Ejemplo 10:**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{x^2 - 6}{x(x-3)} - \frac{1}{x-3} \right] = \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{x^2 - 6}{x(x-3)} - \frac{x}{x(x-3)} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{x^2 - 6 - x}{x(x-3)} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \left[ \frac{x+2}{x} \right] = \frac{5}{3}$$

5.5.2.- Tipo 0/0

Normalmente se da en el cociente de polinomios., para resolverla, tenemos que dividir numerador y denominador por la raíz que haga cero el denominador. Si aparecen raíces utilizaremos el conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P_1(x)(x-c)}{Q_1(x)(x-c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

**Ejemplo 11:**

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{(x+2)(x^2+5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2+5} = \frac{-4}{9}$$

5.5.3.- Tipo  $\frac{\infty}{\infty}$

Normalmente se da en el cociente de polinomios. La forma de resolverla es comparar los infinitos de numerador y denominador.

**Ejemplo 12:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 7}{x^3 + 2x^2} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 7}{x^3 + 2x^2} = 0 \text{ porque el grado del numerador es menor que el del denominador}$$

5.5.4.- Tipo  $\infty \cdot 0$

Esta indeterminación la transformaremos en una del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$

5.5.5.- Tipo  $1^\infty$

Utilizaremos la “**regla del zapato**” ó regla del  $n^\circ$  e.  $\lim (f(x))^{g(x)} = e^{\lim (f(x)-1) \cdot g(x)}$

Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,7172..... = e$ , pues trataremos de convertir límites con indeterminación de este tipo en límites de esta forma.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) + 1 - 1]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} [1 + f(x) - 1]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{f(x)-1}{1}}\right]^{g(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{f(x)-1}{1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1} \cdot g(x) \cdot (f(x)-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\frac{f(x)-1}{1}}\right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \cdot (f(x)-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-1) \cdot g(x)} \end{aligned}$$

**Ejemplo 13:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 7}{x^2 + 2}\right)^{3x} &= 1^\infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 7}{x^2 + 2}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2 - 9}{x^2 + 2}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 2} + \frac{-9}{x^2 + 2}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-9}{x^2 + 2}\right)^{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 2}{-9}}\right)^{3x \cdot \left(\frac{-9}{x^2 + 2}\right) \cdot \left(\frac{x^2 + 2}{-9}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 + 2}{-9}}\right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-9}{x^2 + 2}\right) \cdot 3x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-9}{x^2 + 2}\right) \cdot 3x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-27x}{x^2 + 2}\right)} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Éstas y el resto de indeterminaciones las resolveremos más adelante de otra forma, utilizando la regla de L'Hôpital, que veremos más adelante.

### 5.6.- Continuidad de una función en un punto

Sea  $f$  una función real definida en un intervalo  $I$ , y  $a$  un punto de  $I$ . Se dice que la función  **$f$  es continua en el punto  $c$**  si y solo si existe el límite de  $f$  en el punto  $c$  y éste es igual a  $f(c)$ .

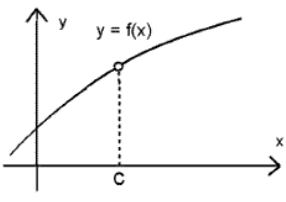
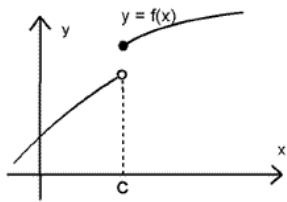
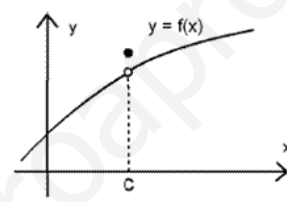
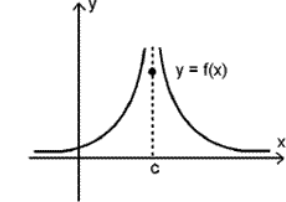
Por tanto, una función  $f$  es continua en un punto  $c$  si se cumple tres propiedades:

- La función  $f$  está definida en  $c$ , es decir, existe  $f(c)$
- Existe  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

La función  $f$  es continua en el punto  $c$  si es continua por la derecha y por la izquierda ó si los límites laterales coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$$

Existen cuatro casos de discontinuidad:

$f(x)$ no definida en $C$	De salto	Evitable	Asintótica
			
La función no está definida en el punto $C$	No coinciden los límites laterales de la función en el punto $C$ .	No coincide el límite de la función en el punto $C$ , con el valor de la función en el punto $C$ .	No existe alguno de los límites laterales de la función en el punto $C$ .
<b>Ejemplo:</b>	<b>Ejemplo:</b>	<b>Ejemplo:</b>	<b>Ejemplo:</b>
$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \neq 3 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen } \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
$f(3) = ?$	$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x - 1 = 5$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + 2 = 6$	$f(1) = 4$ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1 = 2$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen } \frac{1}{x} = +\infty$

Todas las funciones elementales descritas con anterioridad son continuas en su dominio de definición, excepto:

- **Funciones Racionales:** Son discontinuas en los puntos que no son del dominio, es decir, donde  $Q(x) = 0$ . Las discontinuidades son de tipo asintótico o evitables, en ningún caso pueden ser de salto.
- **Funciones Trigonométricas:** La tangente, la secante, la cosecante y la cotangente presentan discontinuidades asintóticas en los puntos que no son de su dominio.
- **Funciones a trozos:** Se debe estudiar la continuidad de cada una de las ramas en su dominio, y la continuidad en el punto donde cambiamos de rama, donde puede aparecer una discontinuidad de salto.

### 5.6.1.- Propiedades de las funciones continuas

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones continuas en un punto  $c$ , entonces:

- ✓  $f + g$  es una función continua en  $c$ .
- ✓  $\lambda \cdot f$  es una función continua en  $c$ .
- ✓  $\frac{f}{g}$  es una función continua en  $c$ , si  $g(c) \neq 0$
- ✓  $|f|$  es una función continua en  $c$ .

### 5.7.- Continuidad de una función en un intervalo I

Una función,  $f$ , es **continua en un intervalo  $I=[a,b]$**  si  $f$  es continua en todo punto de  $(a,b)$ , continua por la derecha en el punto  $a$  y continua por la izquierda en el punto  $b$ .

- ✓ Las **funciones polinómicas** son continuas en todo intervalo real.
- ✓ Las **funciones racionales** son continuas en un todo intervalo real donde no aparezcan las raíces del denominador.
- ✓ Las **funciones trigonométricas**  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  son continuas en todo intervalo real.
- ✓ Las **funciones  $\operatorname{tg}(x)$ ,  $\operatorname{sec}(x)$**  son continuas en todo intervalo real donde  $\cos(x) \neq 0$ .
- ✓ Las **funciones  $\operatorname{ctg}(x)$ ,  $\operatorname{cosec}(x)$**  son continuas en todo intervalo real donde  $\sin(x) \neq 0$ .
- ✓ La **función exponencial**,  $a^x$  con  $a > 0$  es continua en todo intervalo real.
- ✓ La **función logarítmica**,  $\log_a(x)$  con  $a > 0$  es continua en el intervalo  $(0, +\infty)$

**Ejemplo 14:** Estudiar en la continuidad de la función definida en  $\mathbb{R}$  por:  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ e^x + 1 & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

La función  $f$  es una función definida a trozos compuesta por dos ramas, la primera rama es el cociente de dos funciones exponenciales, que es continua, porque las funciones exponenciales son siempre continuas y  $e^x + 1$  es siempre distinto de cero, la segunda rama es una función polinómica, y por tanto continua, por tanto esta función solo puede tener problemas de continuidad en el punto en el que cambia de rama. O sea, en  $x=0$ . Estudiemos ese punto:

La función es continua en el punto  $x=0$  si verifica las tres propiedades vistas anteriormente:  $\begin{cases} \exists f(0) \\ \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \end{cases}$

Calculamos  $f(0) = \frac{1}{2}$ ;

Calculamos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{2}$  → Como los límites laterales son distintos,  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  y por tanto la función no es continua en  $x=0$ .

Así que la función  $f(x)$  es una función continua en  $\mathbb{R} - \{0\}$ , donde presenta una discontinuidad de salto finito.

### 5.8.- Ejercicios Resueltos

1.- Determinar el valor de  $a$  para que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$

Tenemos una indeterminación del tipo  $\infty - \infty$ , por tanto vamos a multiplicar y dividir por el conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x)(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1}{(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)} = \frac{a}{2}$$

De donde  $a = 4$ .

2. - Calcular:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$

Como tenemos  $\infty - \infty$ , multiplicamos y dividimos por el conjugado:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax} - x)(\sqrt{x^2 + ax} + x)}{(\sqrt{x^2 + ax} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax - x^2}{(\sqrt{x^2 + ax} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{(\sqrt{x^2 + ax} + x)} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

3. - Calcular el límite de la función  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ , en el punto 0, en el punto 1 y en  $+\infty$

En  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

En  $x = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1 - \cos 1$$

En  $x = \infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0,$$

porque la función  $1 - \cos x$  es una función acotada entre 0 y 2, y el denominador tiende a  $+\infty$  cuando  $x$  tiende a  $+\infty$ .

4. - Calcular el siguiente límite:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^x$

Utilizando la regla del "zapato", tenemos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{2x-1} - 1 \right) \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3-2x+1}{2x-1} \right) \cdot x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4x}{2x-1} \right)} = e^2$$

5. - Calcular el valor de la constante  $c$  para que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{cx} = e$

Utilizando la regla del "zapato":

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{cx} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{x} - 1 \right) \cdot cx} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{x} \right) \cdot cx} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3c} = e^{3c} \quad \rightarrow \quad c = \frac{1}{3}$$

6. - Determinar  $a$  y  $b$  para que la función real  $f$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} a e^{\frac{\sin^2 x}{x}} + b \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 3a \frac{\sin x}{x} + b(x-1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

sea continua en la recta real.

Para que esta función sea continua en toda la recta real, tiene que ser continua en todos los puntos de la recta real, pero vemos que para  $x=0$ , la función no está definida, así que como no es continua en  $x=0$ , no puede ser continua en toda la recta real, y por tanto no existen  $a$  y  $b$  que hagan que esta función sea continua.



7.- Calcular  $a$  y  $b$  para que la función definida por  $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  sea continua

La función  $f$  es una función definida a trozos compuesta por tres ramas, la primera rama es el producto de una polinómica por una exponencial, que es continua, porque las funciones exponenciales y las polinómicas son siempre continuas, la segunda rama es una función polinómica, y por tanto continua, la tercera rama es la composición de una polinómica y una logarítmica, que está bien definida porque  $x > 1$ , así que también es continua siempre, por tanto esta función solo puede tener problemas de continuidad en los puntos en los que cambia de rama. O sea en  $x=0$  y  $x=1$ . Estudiemos esos puntos:

Una función es continua en un punto  $x=a$  si ocurre: 
$$\begin{cases} \exists f(a) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

**En  $x=0$ :**

$$f(0) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = b; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \rightarrow \text{Por tanto para que } f \text{ sea continua en cero } b=0.$$

**En  $x=1$ :**

$$f(1) = 1; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a + b \rightarrow \text{Por tanto para que } f \text{ sea continua en uno, } a+b=1.$$

Y para que la función sea continua, se han de cumplir las dos condiciones, por tanto  $f$  es continua si  $b=0$  y  $a=1$ .

8.- Probar que la función definida por  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 7x - 8}$  no es continua en  $x=1$ . Indicar que tipo de discontinuidad presenta.

Lo primero es factorizar el denominador, y para ello utilizamos la regla de Ruffini.

$$x^3 + 7x - 8 = (x - 1)(x^2 + x + 8), \text{ por tanto la función:}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 7x - 8} = \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 8)}$$

La función no está definida en  $x=1$ , por tanto no es continua, presenta una discontinuidad de segunda especie, llamada discontinuidad asintótica.