1. Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: (**1 punto**)

$$\frac{2\,\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{tg}\,2x} = \cos x - \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{tg}\,x$$

2. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. (**1 punto**)

$$\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$$

3. Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{x} = (5, -2)$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u} = (3, -3)$ y $\overrightarrow{v} = (1, -4)$. (**1 punto**)

4. Encuentra un vector perpendicular a $\overrightarrow{u} = (4, 5)$ con módulo 1. (**1 punto**)

5. Contesta a los siguientes apartados:

   a) Hallar las ecuaciones vectorial, paramétrica, continua, general y afín de la recta r que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(2, 1)$. (**1 punto**)

   b) Hallar la ecuación continua de la recta paralela a $r \equiv -2x - y + 2 = 0$ que pasa por el punto $P(-1, 2)$ (**1 punto**)

   c) Hallar la distancia del punto $P(-1, 3)$ a la recta $r \equiv 3x - 4y - 5 = 0$. (**1 punto**)

   d) Hallar el ángulo que forman las rectas $r \equiv y = 2x - 3$ y $s \equiv 4x + 3y = 0$. (**1 punto**)

6. Halla la ecuación de una recta s, paralela a $r \equiv 3x - 4y + 4 = 0$ que esté a 3 unidades de distancia. (**2 puntos**)

Soluciones

1. $\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}2x}=\dfrac{2\operatorname{sen}x}{\dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}}=\dfrac{2\operatorname{sen}x(1-\operatorname{tg}^2x)}{2\operatorname{tg}x}=\dfrac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}x\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}x}=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{\operatorname{sen}x\operatorname{tg}^2x}{\operatorname{tg}x}=$
   $=\dfrac{\operatorname{sen}x}{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}-\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x=\dfrac{\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}x}-\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x=\cos x-\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x$

2. $\cos 2x-3\cos x+2=0\Leftrightarrow\cos^2x-\operatorname{sen}^2x-3\cos x+2=0\Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow\cos^2x-(1-\cos^2x)-3\cos x+2=0\Leftrightarrow 2\cos^2x-3\cos x+1=0$. Entonces:
   $$\cos x=\frac{3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{3\pm1}{4}=\begin{cases}\cos x=1\Rightarrow x=0^{\mathrm{o}}+360^{\mathrm{o}}k\\ \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=60^{\mathrm{o}}+360^{\mathrm{o}}k\\ x=300^{\mathrm{o}}+360^{\mathrm{o}}k\end{cases}\end{cases}$$

3. Llamemos (a,b) a las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
   Entonces: $(5,-2)=a(3,-3)+b(1,-4)=(3a,-3a)+(b,-4b)=(3a+b,-3a-4b)\Rightarrow$
   $$\Rightarrow\begin{cases}3a+b=5\\ -3a-4b=-2\end{cases}\Rightarrow -3b=3\Rightarrow b=-1$$
   Sustituyendo por ejemplo en la primera ecuación del sistema inicial, $a=2$. Así pues las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son $(2,-1)$.

4. Para hallar un vector perpendicular a $\overrightarrow{u}$ basta intercambiar las coordenadas y cambiar el signo de una de ellas, así no aseguramos de que el producto escalar de ambos sea cero. Así pues un vector perpendicular a $\overrightarrow{u}$ será $\overrightarrow{v}=(-5,4)$.
   Para conseguir uno de módulo 1 dividimos ambas coordenadas entre el módulo del vector, que es: $|\overrightarrow{v}|=\sqrt{(-5)^2+4^2}=\sqrt{41}$
   Por tanto un vector perpendicular a $\overrightarrow{u}$ de módulo 1 será: $\dfrac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}=\left(\dfrac{-5}{\sqrt{41}},\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right)$

5. a) Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{PQ}=(3,-1)$. Entonces:

   - Ecuación vectorial: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{v}\Rightarrow\boxed{(x,y)=(-1,2)+t(3,-1)}$
   - Ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases}x=-1+3t\\ y=2-t\end{cases}}$

- Ecuación continua: $\boxed{\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-1}}$
- Ecuación general: $-x-1=3y-6 \Leftrightarrow \boxed{-x-3y+5=0}$
- Ecuación afín: $3y=-x+5 \Leftrightarrow \boxed{y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}}$

b) Al ser paralelas, un vector director de la recta que buscamos es el mismo que el de la recta r: $\overrightarrow{u}=(1,-2)$. Así pues la recta que se pide es, en forma continua: $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}$

c) $d(P,r)=\dfrac{|-1\cdot 3+3\cdot(-4)+(-5)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|-20|}{\sqrt{25}}=\dfrac{20}{5}=4$

d) Poniendo r en forma general, $r\equiv 2x-y-3=0$, tenemos que un vector director de r es $\overrightarrow{u}=(1,2)$. Un vector director de la recta s es $\overrightarrow{v}=(-3,4)$. Llamando α al ángulo que forman las dos rectas:

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{u}|\cdot|\overrightarrow{v}|}=\frac{|1\cdot(-3)+2\cdot 4|}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\Rightarrow \alpha=63{,}43^{\text{o}}$$

6. La recta s tiene vector director $\overrightarrow{u}=(4,3)$ (el mismo vector director que r, pues son paralelas). Esto quiere decir que las dos rectas se diferencian únicamente en el término independiente, es decir, que la ecuación general de la recta s es de la forma:

$$3x-4y+C=0$$

Para hallar el término independiente C, se toma un punto de r y se le aplica la fórmula de la distancia a s.
Un punto de r es, por ejemplo, para $x=0$, $-4y+4=0\Rightarrow y=1$. O sea, que un punto de r es $P(0,1)$. La distancia de este punto a la recta s es:

$$d(P,s)=\frac{|3\cdot 0+(-4)\cdot 1+C|}{\sqrt{(3^2)+(-4)^2}}=\frac{|-4+C|}{5}$$

Entonces:

$$\frac{|-4+C|}{5}=3\Rightarrow\begin{cases}-4+C=15\Rightarrow C=19\\ -4+C=-15\Rightarrow C=-11\end{cases}$$

Por tanto hay dos rectas cuya distancia a r es de tres unidades:

$$\boxed{s_1\equiv 3x-4y+19=0}\qquad ; \qquad \boxed{s_2\equiv 3x-4y-11=0}$$