1. Simplifica todo lo posible la siguiente expresión: (**1 punto**)

$$\frac{\cos x + \cos y}{\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)}$$

2. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica, teniendo en cuenta que *no está permitido usar números decimales, sólo fracciones y radicales con las razones trigonométricas de los ángulos fundamentales*. (**1 punto**)

$$\operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 6 \operatorname{sen}^3 x$$

3. Halla las coordenadas del vector $\overrightarrow{x} = (1,4)$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u} = (3,1)$ y $\overrightarrow{v} = (2,-3)$. (**1 punto**)

4. Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (2,a)$ y $\overrightarrow{v} = (3,-2)$, calcula a para que $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:
(**1 punto; 0,5 puntos por apartado**)

   a) Sean perpendiculares.

   b) Formen un ángulo de 60º.

5. Dados los puntos $P(3,-1)$ y $Q(-1,4)$: (**4 puntos, 1 punto por apartado**)

   a) Hallar las ecuaciones paramétrica, continua, general y afín de la recta r que pasa por los puntos P y Q. ¿Qué ángulo forma r con el eje X?

   b) Hallar la ecuación general de una recta s que pase por el punto $R(-1,-1)$ y que sea perpendicular a r.

   c) Hallar el ángulo que forma la recta r con la recta $t \equiv 4x - y - 4 = 0$.

   d) Calcula la distancia de R a t.

6. Calcula la ecuación de la recta r que, pasando por el punto $A(2,3)$, forma con la recta $s \equiv 2x + y - 1 = 0$ un ángulo α de 45º. (**1 punto**)

7. Halla el punto simétrico A' del punto $A(3,2)$, respecto de la recta $s \equiv 2x + y - 12 = 0$.
(**1 punto**)

Soluciones

1.

$$\frac{\cos x+\cos y}{\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)}=\frac{\cos x+\cos y}{(\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y)(\operatorname{sen}x\cos y-\cos x\operatorname{sen}y)}=$$
$$=\frac{\cos x+\cos y}{\operatorname{sen}^2 x\cos^2 y-\cos^2 x\operatorname{sen}^2 y}=\frac{\cos x+\cos y}{(1-\cos^2 x)\cos^2 y-\cos^2 x(1-\cos^2 y)}=$$
$$=\frac{\cos x+\cos y}{\cos^2 y-\cos^2 x\cos^2 y-\cos^2 x+\cos^2 x\cos^2 x}=\frac{\cos x+\cos y}{\cos^2 y-\cos^2 x}=$$
$$=\frac{\cos x+\cos y}{(\cos y+\cos x)(\cos y-\cos x)}=\frac{1}{\cos y-\cos x}$$

2. $\operatorname{sen}2x\cdot\cos x=6\operatorname{sen}^3 x\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x\cdot\cos x=6\operatorname{sen}^3 x\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\cos^2 x=6\operatorname{sen}^3 x\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\operatorname{sen}x\cos^2 x-6\operatorname{sen}^3 x=0\Leftrightarrow\operatorname{sen}x(2\cos^2 x-6\operatorname{sen}^2 x=0)$
Ahora pueden ocurrir dos cosas:

- $\operatorname{sen}x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0^{\circ}+360^{\circ}k\\ x=180^{\circ}+360^{\circ}k\end{cases}$
- $2\cos^2 x-6\operatorname{sen}^2 x=0\Rightarrow 2(1-\operatorname{sen}^2 x)-6\operatorname{sen}^2 x=0\Rightarrow 2-2\operatorname{sen}^2 x-6\operatorname{sen}^2 x=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow -8\operatorname{sen}^2 x=-2\Rightarrow\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=30^{\circ}+360^{\circ}k\\ x=150^{\circ}+360^{\circ}k\end{cases}\\ \operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=210^{\circ}+360^{\circ}k\\ x=330^{\circ}+360^{\circ}k\end{cases}\end{cases}$$

3. Llamemos (a,b) a las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$.
Entonces: $(1,4)=a(3,1)+b(2,-3)=(3a,a)+(2b,-3b)=(3a+2b,a-3b)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}3a+2b=1\\ a-3b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a+2b=1\\ -3a+9b=-12\end{cases}\Rightarrow 11b=-11\Rightarrow b=-1.$$

Sustituyendo por ejemplo en la segunda ecuación del sistema inicial, $a=1$. Así pues las coordenadas de $\overrightarrow{x}$ respecto de la base formada por los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son $(1,-1)$.

4. a) Para que sean perpendiculares el producto escalar deber ser cero:
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow (2,a)\cdot(3,-2) = 0 \Leftrightarrow 6-2a = 0 \Leftrightarrow 2a = 6 \Leftrightarrow a = 3$

b) $\cos 60^{\text{o}} = \dfrac{(2,a)\cdot(3,-2)}{|(2,a)|\cdot|(3,-2)|} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{6-2a}{\sqrt{4+a^2}\sqrt{13}} \Leftrightarrow \sqrt{52+13a^2} = 12-4a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 52+13a^2 = 144-96a+16a^2 \Leftrightarrow 3a^2-96a+92 = 0$
Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen dos soluciones para a: $a_1 = 31{,}01$ y $a_2 = 0{,}99$

5. a) Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = (-4,5)$. Entonces:

Ecuaciones paramétricas: $\boxed{\begin{cases} x = 3-4t \\ y = -1+5t \end{cases}}$

Ecuación continua: $\boxed{\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y+1}{5}}$

Ecuación general: $5x-15 = -4y-4 \Leftrightarrow \boxed{5x+4y-11 = 0}$

Ecuación afín: $4y = -5x+11 \Leftrightarrow \boxed{y = -\dfrac{5}{4}x+\dfrac{11}{4}}$

La pendiente de la recta es $m = -\dfrac{5}{4}$. Por tanto, el ángulo α que forma la recta con el eje X es: $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{5}{4} \Rightarrow \alpha = 128{,}66^{\text{o}}$.

b) Un vector $\overrightarrow{u}$ perpendicular a r es: $\overrightarrow{u} = (5,4)$. Por tanto la recta perpendicular s que pasa por $R(-1,-1)$ será: $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y+1}{4} \Leftrightarrow 4x+4 = 5y+5 \Leftrightarrow \boxed{4x-5y-1 = 0}$

c) Llamemos α al ángulo que forma la recta r con la recta t. Recordemos que un vector director de r era $\overrightarrow{v} = (-4,5)$. Un vector director de t es $\overrightarrow{w} = (1,4)$. Entonces:
$\cos\alpha = \dfrac{(-4,5)\cdot(1,4)}{|(-4,5)|\cdot|(1,4)|} = \dfrac{16}{\sqrt{41}\sqrt{17}} \approx 0{,}606 \Rightarrow \alpha \approx 52{,}7^{\text{o}}$

d) $d(R,t) = \dfrac{|(-1)4+(-1)(-1)+(-4)|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{17}} \approx 1{,}7$

6. Llamemos m_1 a la pendiente de s. La pendiente de s es $m_2 = -2$ pues su ecuación afín es $y = -2x + 1$. Utilizando la expresión que relaciona el ángulo con las pendientes:
$\operatorname{tg} 45^{\circ} = \left|\dfrac{-2 - m_1}{1 + m_1(-2)}\right| \Leftrightarrow 1 = \left|\dfrac{-2 - m_1}{1 - 2m_1}\right|$. Ahora hay dos posibilidades:

$$\begin{cases} \dfrac{-2 - m_1}{1 - 2m_1} = 1 \Rightarrow -2 - m_1 = 1 - 2m_1 \Rightarrow m_1 = 3 \\ \dfrac{-2 - m_1}{1 - 2m_1} = -1 \Rightarrow -2 - m_1 = -1 + 2m_1 \Rightarrow -3m_1 = 1 \Rightarrow m_1 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Y también dos rectas que serán solución:

- r_1, que tendrá pendiente igual a 3 y vector director (1,3). O sea: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{3} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow 3x - 6 = y - 3 \Leftrightarrow \boxed{r_1 \equiv 3x - y - 3 = 0}$
- r_2, que tendrá pendiente igual a $-\frac{1}{3}$ y vector director $(1, -\frac{1}{3})$. Tomaremos un vector proporcional para que sea más fácil obtener la ecuación de la recta: $(3, -1)$
  $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-3}{-1} \Leftrightarrow -x + 2 = 3y - 9 \Leftrightarrow \boxed{r_2 \equiv x + 3y - 11 = 0}$

7. Llamemos $A'(a, b)$ al simétrico de A respecto de la recta s.
Calculemos la recta r perpendicular a s que pasa por $A(3, 2)$. Un vector perpendicular a s es $\overrightarrow{u} = (2, 1)$. Éste será un vector de dirección de r. Por tanto su ecuación es:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x - 3 = 2y - 4 \Leftrightarrow \boxed{r \equiv x - 2y + 1 = 0}$$

La solución del sistema $\begin{cases} 2x + y - 12 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$, es el punto de corte de las rectas r y s. Llamémoslo M. Resolviendo el sistema se tiene que $M\left(\dfrac{23}{5}, \dfrac{14}{5}\right)$. Este punto es el punto medio de A y su simétrico $A'(a, b)$ respecto de la recta s. O sea:

$$M\left(\frac{23}{5}, \frac{14}{5}\right) = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3+a}{2} = \frac{23}{5} \Rightarrow 15 + 5a = 46 \Rightarrow 5a = 31 \Rightarrow a = \frac{31}{5} = 6{,}2 \\ \frac{2+b}{2} = \frac{14}{5} \Rightarrow 10 + 5b = 28 \Rightarrow 5b = 18 \Rightarrow b = \frac{18}{5} = 3{,}6 \end{cases}$$

Por tanto el simétrico de $A(2, 3)$ respecto de la recta s es $A'\left(\dfrac{31}{5}, \dfrac{18}{5}\right) = A'(6{,}2, 3{,}6)$